

" Gauss の和 " 付き 2 次形式の空間のゼータ函数

京大・理 村瀬 篤 (Atsushi Murase)

東大・教養 菅野 孝史 (Takashi Sugano)
(学振特別研究員)

§.0 Introduction

概均質ベクトル空間 (以後, P.V. と略称) に付随するゼータ函数の理論は, M. Sato により創出され, 多くの人々により研究されてきた。(たとえば, M. Sato - T. Shintani [6], T. Shintani [7, 8], T. Suzuki [9], F. Sato [5] 参照)。特に, F. Sato [5] は, regular な P.V. に付随するゼータ函数の解析接続と函数等式と, (ある弱い条件の下で) 示している。ここで, ある特別な non-regular な P.V. に付随するある種のゼータ函数 ([8] の 2 次形式の空間のゼータ函数を modify したもの) を定義し, 解析接続と函数等式とを証明する。

一般に, regular P.V. の場合は, 函数等式は, 元の P.V. と その dual (再び P.V. になる) に付随するゼータ函数の間で成立する。しかしながら, 我々の扱う P.V. の

dual は P.V. ではなく, 函数等式の定式化の爲に,
ある概均質アフィン空間 (定義は後述) を導入する
ことが必要になる。

§3 で述べるように, ここで定義するゼータ函数は
Jacobi 型式の空間の次元公式へのある共役類の寄与に
密接に関係している ([8] の analogy)。

証明の詳細については, [3] を参照されたい。

§1. 概均質アフィン空間

G を $\mathbb{C}$ 上の連結線形代数群, V を $\mathbb{C}$ 上の有限
次元ベクトル空間, $\rho \in G$ から V の affine 変換全体の
なす群 $\text{Aff}(V) = \text{GL}(V) \ltimes V$ への準同型有理写像
とする。Triplet (G, V, ρ) が 概均質アフィン空間
(P.A. と略称) とは, V の代数的真部分集合 S で,
 $V-S$ が single G -orbit になるものが存在するをいう。
 $S \in \text{P.A.}(G, V, \rho)$ の singular set と呼ぶ。 Imp
 $\subset \text{GL}(V)$ のとき (G, V, ρ) は P.V. である。

以下の主題となる P.A. を導入する爲に, 正整数
 m, n および size m の半整数正定値対称行列 S
を固定する。 $V = \text{Sym}_n (= m\text{-次対称行列の空間})$,

$W = M_{mn}$ (= m 行 n 列) の行列の空間), $V = V \times W$ とおく. non reductive の代数群

$$G = \left\{ (\xi, g) =_{\text{def}} \begin{pmatrix} I_m & \xi \\ & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & \\ & g \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} \xi \in M_{mn} \\ g \in GL_n \end{matrix} \right\}$$

の V への作用を二通り次のように定める: $X = [x, u] \in V$, $g = (\xi, g) \in G$ に対し

$$X \circ g = [g^{-1} x {}^t g^{-1}, (u - \xi x) {}^t g^{-1}]$$

$$X * g = [{}^t g (x + S[\xi] + S(u, \xi) + S(\xi, u)) g, (u + \xi) g],$$

ここで, $u, v \in M_{mn}$ に対し $S(u, v) = {}^t u S v$, $S[u] = {}^t u S u$ と書く. 前者を dot action, 後者を star action と呼ぶ.

Lemma 1 $(G, V, \circ)$ と $(G, V, *)$ は P.A. であり, singular set は $\xi + \xi' u$,

$$S = \{ X \in V \mid P(X) \stackrel{\text{def}}{=} \det x = 0 \},$$

$$S^* = \{ X \in V \mid P^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} \det (x - S[u]) = 0 \}$$

で与えられる.

($(G, V, \circ)$ は non regular の P.V. である.)

$0 \leq i \leq n$ に対し,

$$V_i = \{ [x, u] \in V_{\mathbb{R}} \mid \text{sgn } x = (i, n-i) \},$$

$$\nabla_i^* = \{ [x, u] \in \nabla_R \mid \operatorname{sgn}(x - S[u]) = (i, n-i) \}$$

とおく。 $\nabla_R - S_R$ 及び $\nabla_R - S_R^*$ の $G_R^+ = \{ (z, g) \in G_R \mid \det g > 0 \}$ - orbit decomposition (dot action 及び star action に $\mathbb{R}^{\times}$ 作用) は,

$$\begin{aligned} \nabla_R - S_R &= \bigcup_{i=0}^n \nabla_i, \\ \nabla_R - S_R^* &= \bigcup_{i=0}^n \nabla_i^* \end{aligned} \quad (\text{disjoint union})$$

で与えられる。

$f \in \mathcal{S}(\nabla_R)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned} \mathcal{T}f(X) &= \int_{\nabla_R} f(Y) \mathcal{E}[\mathfrak{h}(xy + 2S(u, v))] dY \\ (X = [x, u], Y = [y, v]) \end{aligned}$$

及び

$$\Phi_i(\lambda, f) = \int_{\nabla_i} |P(x)|^{\lambda} \mathcal{E}[\mathfrak{h}(x'S[u])] f(x) dX,$$

$$\Phi_i^*(\lambda, f) = \int_{\nabla_i} |P^*(x)|^{\lambda} f(x) dX$$

とおく。 $z = \tau$ $x \in \mathbb{R}$ に対し $\mathcal{E}[x] = \exp(2\pi i x)$ と書く。

Proposition 2 $f \in \mathcal{S}(\nabla_R)$ に対し、

(i) $\Phi_i(\lambda, f)$, $\Phi_i^*(\lambda, f)$ ($0 \leq i \leq n$) は 全 λ -平面へ有理型函数として解析接続される。

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad & \Phi_i(\Lambda - (m+n+1)/2, f) \\
 &= \sqrt{C_{n,S}}^{-1} (2\pi)^{n(n-1)/4 - n\Lambda} e^{[m(2i-n)/8 + n\Lambda/4]} \\
 & \cdot \Gamma_n(\Lambda) \sum_{j=0}^m u_{ij}(\Lambda) \Phi_j^*(-\Lambda, f)
 \end{aligned}$$

==12

$$C_{n,S} = (\det 2S)^n 2^{n(n-1)/2},$$

$$\Gamma_n(\Lambda) = \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(\Lambda - k/2),$$

$u_{ij}(\Lambda)$: $e[-\Lambda/2]$ の多項式 ([8] の (2.4) 式
で与えられる)。

§ 2. P.A. に付随する G -群

$X \in \mathbb{V}_R - \mathbb{S}_R$ および $X^* \in \mathbb{V}_R - \mathbb{S}_R^*$ に対し,

$$G_X = \{ g \in G_R^+ \mid X \cdot g = X \},$$

$$G_{X^*}^* = \{ g \in G_R^+ \mid X^* \cdot g = X^* \}$$

と置く。 G_R^+ の右不変 Haar 測度 dr が

$$dr g = (\det g)^{-n} \prod_{1 \leq i, j \leq n} dg_{ij} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} d\zeta_{ij} \quad (g = (g, \zeta))$$

により定めると, G_X および $G_{X^*}^*$ の Haar 測度
 $d\nu_X$ および $d\nu_{X^*}^*$ が 次式により (canonical) 定義
される:

$$\begin{aligned}
& \int_{G_R^+} \phi(g) d\cdot g \\
&= \int_{G_X \backslash G_R^+} |P(X \cdot g)|^{-(m+n+1)/2} d(X \cdot g) \int_{G_X} \phi(hg) d\mu_X(h) \\
&= \int_{G_{X^*}^* \backslash G_R^+} |P^*(X^* \cdot g)|^{-(m+n+1)/2} d(X^* \cdot g) \int_{G_{X^*}^*} \phi(h^*g) d\mu_{X^*}^*(h^*)
\end{aligned}$$

($\phi \in C_0^\infty(G_R^+)$).

ただし, $d(X \cdot g)$ と $d(X^* \cdot g)$ は, $V_i = X \cdot G_R^+$ および $V_i^* = X^* \cdot G_R^+$ 上の Lebesgue 測度とする.

$L = L_{m,n} = \text{Sym}_n(\mathbb{Z}) \times M_{m,n}(\mathbb{Z})$, $L^* = L_{m,n}^* = \{ [x, u] \in \mathbb{V}_R \mid x \neq \text{整数}, u \in (2S)^{-1} M_{m,n}(\mathbb{Z}) \}$ とおくと L (resp. L^*) は dot action (resp. star action) に對し $\Gamma = G_R^+ \cap G_{\mathbb{Z}}$ -不変である.
 $X \in L' = L \cap (\mathbb{V}_R - \mathbb{S}_R)$ (resp. $X^* \in L'^* = L^* \cap (\mathbb{V}_R - \mathbb{S}_R^*)$) に対し, $\Gamma_X = \Gamma \cap G_X$ (resp. $\Gamma_{X^*}^* = \Gamma \cap G_{X^*}^*$) とおくと, $n=2$ かつ $-P(X)$ (resp. $-P^*(X^*)$) が $\mathbb{Q}$ の平方根でない場合を除くとき, $\Gamma_X \backslash G_X$ (resp. $\Gamma_{X^*}^* \backslash G_{X^*}^*$) は volume finite である. 同様.

$$\mu(X) = \int_{\Gamma_X \backslash G_X} d\mu_X \quad (\text{resp. } \mu^*(X^*) = \int_{\Gamma_{X^*}^* \backslash G_{X^*}^*} d\mu_{X^*}^*)$$

と置く。除外した場合は $\mu(X)=0$ (resp. $\mu^*(X^*)=0$) と置く。

$0 \leq i \leq n$ に対し $L_i = L \cap V_i$, $L_i^* = L^* \cap V_i^*$ と置き, $L_i / \circ$ (resp. $L_i^* / *$) は L_i の (resp. L_i^* の) Γ の dot action (resp. star action) に属する一つの完全代表系とする。

$\Lambda \in \mathbb{C}$ に対し

$$\xi_i(\Lambda, L) = \sum_{X=[x,u] \in L_i / \circ} \mu(X) e[-\text{tr}(x^t S[u])] |P(X)|^{-\Lambda}$$

$$\xi_i^*(\Lambda, L^*) = \sum_{X^* \in L_i^* / *} \mu^*(X^*) |P^*(X^*)|^{-\Lambda}$$

と置く。前者は, [8] の 2-近形式の空間のゼータ函数を "Gauss の和" により twist したものと考える。

Lemma 3 Dirichlet 級数 $\xi_i(\Lambda, L)$, $\xi_i^*(\Lambda, L^*)$ は $\text{Re } \Lambda > (m+n+1)/2$ で絶対収束する。

主結果は次の通り。

Theorem 4 $n \neq 2$ と仮定する

(i) $\xi_i(\Lambda, L)$, $\xi_i^*(\Lambda, L^*)$ ($0 \leq i \leq n$) は, 有理型

函数として全 Λ -平面へ解析接続し、 $\Lambda = \frac{m+k+1}{2}$
 ($k=1, \dots, m$) での高々 simple pole を持つ他は
 正則) である。

(ii) 次の函数等式が成立する。

$$\begin{aligned} & \xi_i^* \left((m+n+1)/2 - \Lambda, L^* \right) \\ &= C_n S^{1/2} \Theta[n\Lambda/4] (2\pi)^{n(n+1)/4 - n\Lambda} \Gamma_n(\Lambda) \\ & \cdot \sum_{j=0}^m u_{ji}(\Lambda) \Theta \left[\frac{n(2j-n)}{8} \right] \xi_j(\Lambda, L) \end{aligned}$$

注意: $n=2$ の時も, $\xi_2^*(\Lambda, L^*)$ は定義され,
 $\Lambda = (m+2)/2, (m+3)/2$ での高々 simple pole を持つ
 他は正則な有理型函数として全 Λ -平面へ解析
 接続される。

§3. Jacobi form の次元公式との関係

Siegel cusp form の空間の次元公式におけるある
 共役類の寄与が, 2次形式の空間のゼータ函数の特殊値で
 記述されること, Shintani [8] で示されている。この§
 では類似のこと, Jacobi form の場合にも成立するこ

と述べる。そのために, Jacobi form の定義から始める
(詳細については [2] および Yamazaki [10] を参照)。

$$\underline{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1_m & \xi & \eta \\ 0 & 1_n & 0 \\ 0 & 0 & 1_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_m & \xi & 0 \\ 0 & 1_n & 0 \\ 0 & -\xi & 1_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_m & a & b \\ c & 1_m & d \end{bmatrix} \right. \\ \left. \mid \xi, \eta \in M_{mn}, \xi \in \text{Sym}_m, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Sp}_n \right\}$$

とおく。 $\underline{G}$ の各元 $\underline{g}$, $\underline{g} = (\xi, \eta, \xi)g$ とおく。 degree n の Siegel 上半空間 $\mathcal{H}_n$ とすると, $\underline{G}_{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{D} = \mathcal{H}_n \times M_{mn}(\mathbb{C})$ に次のように作用する:

$$\underline{g} \langle Z \rangle = (g \langle Z \rangle, w \cdot j(g, z)^{-1} + \xi \cdot g \langle z \rangle + \eta)$$

($\underline{g} = (\xi, \eta, \xi)g \in \underline{G}_{\mathbb{R}}$, $Z = (z, w) \in \mathcal{D}$; $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $g \langle z \rangle = (az + b)(cz + d)^{-1}$, $j(g, z) = cz + d$)
weight ℓ , index N ($\xi \mid z$ fix $L \neq 0$) の保型因子 $J_{S, \ell} \in$,

$$J_{S, \ell}(\underline{g}, Z) = \det j(g, z)^{\ell} \exp \left[\ell \left\{ -S \xi \right. \right. \\ \left. \left. + S[w] j(g, z)^{-1} c - 2S(\xi, w) j(g, z)^{-1} - S[\xi] g \langle z \rangle \right\} \right]$$

により定まる。このとき, weight ℓ , index N の Jacobi cusp form の空間 $\mathcal{G}(S, \ell)$ は, 次の (i) (ii) を満たす

上の正則函数 f たちの可 $\mathbb{C}$ -vector space とする:

$$(i) \quad f(\underline{z} \langle Z \rangle) = J_{s,l}(\underline{z}, Z) f(Z) \\ (\text{for } \forall \underline{z} \in \underline{I} = \underline{G}_Z, \forall Z \in \mathcal{D})$$

$$(ii) \quad \underline{g} \mapsto |J_{s,l}(\underline{g}, Z_0)^{-1} f(\underline{g} \langle Z_0 \rangle)| \quad \text{は} \\ \underline{G}_R \text{ 上 有界 } (Z_0 = (\sqrt{-1}1_n, 0) \in \mathcal{D}).$$

$z, Z = (z, w), Z' = (z', w') \in \mathcal{D}$ に対し

$$K_{s,l}(Z, Z') = a_{s,l} \det \left(\frac{z - \bar{z}'}{z - i} \right)^{-l} \\ \times e \left[-\frac{1}{2} (z - \bar{z}')^{-1} S [w - \bar{w}'] \right]$$

とおく。 $z = z$,

$$a_{s,l} = (\det 2S)^m 2^{-n(n+3)/2} \pi^{-n(n+1)/2}$$

$$\prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=1}^{m-i} \left(l - \frac{m+i}{2} - j \right),$$

また $d\mu(Z) \in$,

$$d\mu(Z) = (\det y)^{-m-n-1} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} dx_{ij} dy_{ij}$$

$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} du_{ij} dv_{ij}$$

$$(Z = (z, w), \quad z = x + \sqrt{-1}y, \quad w = u + \sqrt{-1}v)$$

により定まる $\mathcal{D}$ の $\underline{G}_R$ -不変 μ 測度とする。

Satake [4] の結果より, 次を得る.

Lemma 5 $l > m + 2n$ である. このとき,
 $\dim \Theta(S, l)$ は有限である,

$$(3.1) \quad \int_{\Gamma \backslash D} \sum_{\underline{x} \in \Gamma \backslash Z(\Gamma)} K_{S, l}(\underline{x} \langle Z \rangle, Z) \\ \cdot |J_{S, l}(\underline{x}, Z)|^{-1} |J_{S, l}(\underline{g}_Z, Z_0)|^{-2} d\mu(Z)$$

によって与えられる. ここで $\underline{g}_Z$ は $\underline{g}_Z \langle Z_0 \rangle = Z$ なる $\underline{g} \in \underline{G}_{\mathbb{R}}$ の元であり, $Z(\Gamma) = \{ (0, 0, \gamma) \mid \gamma \in \text{Sym}_m(\mathbb{Z}) \}$ は Γ の中心である.

$\underline{g} \in \underline{G}$ に対し,

$$H(\underline{g}) = \{ h \in H \mid h^{-1} \underline{g} h \underline{g}^{-1} = (0, 0, \psi_{\underline{g}}(h)) \}$$

とかく. ここで $H = \{ (\xi, \eta, \gamma) \} \subset \underline{G}$, Γ の真部分集合 Γ' と

$$\Gamma' = \{ \underline{x} \in \Gamma \mid \mathcal{E}[\psi_{\underline{x}}(\psi_{\underline{g}}(h))] = 1 \\ \text{for } \forall h \in H(\underline{x})_{\mathbb{R}} \}$$

により定まる.

Lemma 6 $l > m + 2n$ とする。 $\varepsilon = a \leq 2$,

$\dim \mathcal{G}(S, l)$ は (3.1) z' , $\underline{z}$ に $\mathbb{P}^1$ する 和 ε ,
 $\underline{\Gamma}' / Z(\underline{\Gamma})$ を 47-3 和 z' の 3 か z' も a z' ε z' ε z'
 る。

整数 r ($0 \leq r \leq n$) に対し, $\underline{\Pi}_r \in$,
 $h \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($h \in H \cap \underline{\Gamma}$, $x \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})$, $\text{rank } x$
 $= r$) なる形の元は $\underline{\Gamma}$ -共役にある $\underline{\Gamma}$ の元全体
 の可算集合とする。 (3.1) の部分和 $I_{S, l}(\underline{\Pi}_r) \in$,

$$I_{S, l}(\underline{\Pi}_r) = \int_{\underline{\Gamma} \backslash \mathcal{G}} \sum_{\underline{z} \in \underline{\Pi}_r \cap \underline{\Gamma}' / Z(\underline{\Gamma})}$$

$$K_{S, l}(\underline{z} \langle Z \rangle, Z) J_{S, l}(\underline{z}, Z)^{-1} |J_{S, l}(\underline{g}_Z, Z_0)|^{-2} d\mu(Z)$$

により定まる。 Shintani [8] により、

$$\sum_{r=0}^n I_{S, l}(\underline{\Pi}_r)$$

ε , " $\mathcal{G}(S, l)$ の次元公式" の purely parabolic
 共役類の寄与" と呼ぶ。 [8] の議論を踏襲
 することにより、次を得る。

Theorem 7 $l \geq 2n+m+3$ ならば,

$\text{Is.e}(\square_r)$ ($0 \leq r \leq n$) は 絶対収束し,

$$\begin{aligned} & (\det 2S)^{n-r} 2^{r(n-r)-1} (2\pi)^{-(n-r)(n-r+1)/2} \\ & \cdot \omega_{n-r} U_{n-r}^{-1} \prod_{i=1}^{n-r} \prod_{j=1}^i \left(l - \frac{m+n-i}{2} - j \right) \\ & \cdot \zeta_r^*(r-n; \mathbb{L}_{m,r}^*) \end{aligned}$$

に等しい。 $\equiv 2$,

$$U_r = \prod_{k=1}^r 2\pi^k / \Gamma(k), \quad C_r = \prod_{k=1}^r 2\pi^{k/2} / \Gamma(k/2),$$

$$\omega_l = \zeta(2) \zeta(4) \cdots \zeta(2l).$$

ただし, $r=0$ $n \geq 2$,

$$\zeta_0^*(A; \mathbb{L}_{m,0}^*) \equiv 2$$

と置く。

注意 $\zeta_n^*(A; \mathbb{L}_{mn}^*)$ の 非負整数点 z の特殊値は, $n \leq 2$ の場合のみ explicit にわかる。
 $n=1$ のときは, classical の Hurwitz zeta function に帰着し, Bernoulli 多項式 で記述される。一方,
 $n=2$ の時は, $\zeta_2^*(A; \mathbb{L}_{m,2}^*)$ は Arakawa [1] で研究している partial zeta function の線形結合

と表わされ, [1] の結果を用いることにし,
 $\xi_2^*(1-k; L_{m,2}^*) \in \mathbb{Q} \quad (k=1,2,\dots)$ が示される.
 (S が与えられれば具体的に計算できる: たとえば,
 $m=1, S=(1)$ ならば $\xi_2^*(0, L_{1,2}^*) = 2^{-6}$ である.)

References

- [1] Arakawa, T. : Special values of L-functions associated with the space of quadratic forms and the representation of $Sp(n, \mathbb{F}_p)$ in the space of Siegel cusp forms , preprint.
- [2] Murase, A. : L-functions attached to Jacobi forms of degree n , preprint.
- [3] Murase, A. and Sugano, T. : A note on zeta functions associated with certain prehomogeneous affine spaces , preprint.
- [4] Satake, I. : A group extension and its unitary representation (in Japanese), Sugaku 21 (1969), 241-253.
- [5] Sato, F. : Zeta functions in several variables

associated with prehomogeneous vector spaces I : Functional equation , Tôhoku Math. J. 34 (1982) , 437-483.

- [6] Sato, M. and Shintani, T. : On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces , Ann. of Math. 100 (1974) , 131-170 .
- [7] Shintani, T. : On Dirichlet series whose coefficients are class - numbers of integral binary cubic forms , J. Math. Soc. Japan , 24 (1972) , 132-188.
- [8] Shintani, T. : On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 22 (1975) , 25-65.
- [9] Suzuki, T. : On zeta functions associated with quadratic forms of variables coefficients , Nagoya Math. J. , 73 (1979) , 117-147.
- [10] Yamazaki, T. : Jacobi forms and a Maass relation for Eisenstein series , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 33 (1986) , 295-310 .