

Equivariant S-duality

阪市大理 村山光孝

G を有限群とするとき, G -equivariant stable homotopy に対して, Spanier [12] と同様の議論ができ, それによって G -homology と G -cohomology の間の duality について論じることを目的とする。

§ 1 では, その準備として, unstable G -homotopy の性質, 特に Blakers-Massey の定理, suspension 同型について調べる。§ 2 では, Equivariant S-duality について, [12], [1] に従って論じる。

§1 G -homotopy groups

G を compact Lie group とする。 G -CW complex ([9]) は同変写像に対して, CW-complex と同様の構成が可能である。例えば, G -H.E.P をもち, G -胞体近似, J.H.C Whitehead の定理, 等が成立する。(cf. [9]) さらに次の命題が成り立つ。

以下、簡略化の為に G -space を pointed G -space を表わし、

G -map は基点を保つものとする。又 $\mathcal{A}(G)$ は G の閉部分群全体からなる集合、とする。

命題 1.1 X を G -space, (K, L) を G -CW complex pair とする。

$\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し $X^H = \{x \in X \mid gx = x, g \in H\}$ は n_H -connected, かつ

$\dim_G(K^H, L^H) \leq n_H + 1$, $n_H \geq -1$ ならば, 任意の G -map

$f: L \rightarrow X$ は K 上に (G -map として) 拡張可能である。

[証明] K の s -skeleton K^s に f が帰納的に拡張されることを示す。 K^{s-1} まで拡張されたと仮定する。 $e^s \subset K-L$ を s -cell で isotropy subgroup が H であるものとするれば, $s \leq n_H + 1$, $f(\partial e^s) \subset X^H$ であるから, f は e^s に, $f(e^s) \subset X^H$ をみたすように拡張できる。これを G -action で拡張すれば, f は $K^{s-1} \cup G e^s$ 上に G -map として拡張される。これを続ければよい。 (終)

命題 1.2 (X, A) を G -space pair, (K, L) を G -CW complex pair

とする。 $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し, (X^H, A^H) は n_H -connected, かつ

$\dim_G(K^H, L^H) \leq n_H$, $n_H \geq 0$ ならば, 任意の (pair の) G -map

$f: (K, L) \rightarrow (X, A)$ は, A への G -map に G -homotopic relative A , である。

証明は 1.1 と同様にすればよい。

写像の n -equivalence の定義は [13] p404 を参照する。上の

命題により, [13] Theorem 7.6.22, [8] 4章, 定理 2.15 と同様にして

次の命題を得る。

命題 1.3 X, Y を G -space, $f: X \rightarrow Y$ を G -map とする。

$f^H = f|_{X^H}: X^H \rightarrow Y^H$ が n_H -equivalence, $n_H \geq 0, \forall H \in \mathcal{A}(G)$ ならば,

G -CW complex K に対して,

$$f_*: [K, X]^G \rightarrow [K, Y]^G$$

は, すべての $H \in \mathcal{A}(G)$ に対して, $\dim_G K^H < n_H$ のとき同型, $\dim_G K^H \leq n_H$ のとき全射, である。

この relative form として次を得る。

命題 1.4 $(X, A), (Y, B)$ を G -space pair で $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し

$(X^H, A^H), (Y^H, B^H)$ は 1-connected とする。 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は G -map で,

$\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し

$$f_*^H: \pi_i(X^H) \rightarrow \pi_i(Y^H)$$

は $i < n_H$ のとき同型, $i = n_H$ のとき全射, であるものとする。

このとき, G -CW complex K に対して

$$f_*: [CK, K; X, A]^G \rightarrow [CK, K; Y, B]^G$$

は, $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対して, $\dim_G K^H + 1 < n_H$ のとき同型, $\dim_G K^H + 1 \leq n_H$ のとき全射である。(ここで CK は K の cone.)

上の命題と Blakers-Massey [5] を組み合わせることで次の命題を得る。

命題 1.5 (X, A) は次をみたす G -space pair とする。

A は X の closed G -subspace。 $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対して,

(i) (X^H, A^H) は m_H -connected, $m_H \geq 1$, (ii) A^H は n_H -connected, $n_H \geq 1$

$i: (X, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$, $i': (CA, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$ を

inclusion とするとき, G -CW complex K に対し

$$i_*: [CK, K; X, A]^G \rightarrow [CK, K; X \cup CA, CA]^G,$$

$$i'_*: [CK, K; CA, A]^G \rightarrow [CK, K; X \cup CA, CA]^G$$

は $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し, $\dim_G K^H + 1 \leq m_H + n_H$ のとき同型,

$\dim_G K^H + 1 \leq m_H + n_H + 1$ のとき全射, である。

G -CW complex pair (X, A) は G -HEP をもつので $X \cup CA \xrightarrow{\cong} X/A$ が成り立つ。従って上の命題を次の様に書き直せる。

定理 1.6 (X, A) は G -CW complex pair で, $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し

(i) (X^H, A^H) は m_H -connected, $m_H \geq 1$, (ii) A^H は n_H -connected, $n_H \geq 1$,

とする。このとき G -CW complex K に対して

$$P_*: [CK, K; X, A]^G \rightarrow [ZK, X/A]^G$$

は $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し, $\dim_G K^H + 1 \leq m_H + n_H$ のとき同型,

$\dim_G K^H + 1 \leq m_H + n_H + 1$ のとき全射である。

G を有限群とするとき, G -CW complex は G -complex (Bredon [6])

になる。 G -spectrum $E = \{E_n, \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ を次の様に定義する。(cf [1])

ω を, 同値でない既約 G -module を 1 つずつ含む G -module と

する。 E_n は G -complex の G -homotopy type をもつ G -space とし,

$\varepsilon_n: \Sigma^\omega E_n \rightarrow E_{n+1}$ を G -map とする。ここで Σ^ω は ω の 1 点 compact

化である。 smooth G -manifold は G -CW complex structure をもつ

(G が compact Lie group のとき, [10]) の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^W$ は G -CW complex structure を (従って G -complex structure を) もつ。

G -spectrum $\mathbb{E}$, G -space X, Y , $\alpha = U - W \in RO(G)$, U, W G -module に対し $[X, \mathbb{E} \wedge Y]^G$ を

$$[X, \mathbb{E} \wedge Y]^G = \varinjlim [Z^{n_U + U} X, E_n Z^W \wedge Y]^G$$

($Z^U X = Z^U \wedge X$, $E_n Z^W = E_n \wedge Z^W$) と定義する。 X を fixed finite G -complex とするとき, 上の定理が適用できて, $[X, \mathbb{E} \wedge (\cdot)]^G$ は G -complex の category 上の half exact functor であることが示される。

次に写像空間 $\bar{F}(X, Y)$ について論じる。 G -space X, Y に対して $\bar{F}(X, Y)$ は, G -action を, $g(t)(x) = gt(gx)$ で定義して G -space になる。このとき, $\bar{F}(X, Y)^G$ は G -map 全体になる。特に, $\bar{F}(X^G, Y)^G = \bar{F}(X^G, Y^G)$ となる。又 Y を locally compact G -space, X, Z を G -space とすると,

$$[X \wedge Y, Z]^G \cong [X, \bar{F}(Y, Z)]^G$$

が成立する。このとき次が成り立つ。

補題 1.7 X を locally compact G -CW complex, Y を G -space とする。 $\gamma: \bar{F}(X, Y)^G \rightarrow \bar{F}(X^G, Y)^G = \bar{F}(X^G, Y^G)$ を制限写像とする。 $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し, Y^H は n_H -connected, $n_H \geq 0$ とするとき

$$\gamma_*: \pi_j(\bar{F}(X, Y)^G) \rightarrow \pi_j(\bar{F}(X^G, Y^G))$$

は $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し, $j \leq n_H$ のとき同型, $j \leq n_H + 1$ のとき全射

である。ここで

$$N_H = \begin{cases} n_H - \dim_G (X^H - X^G) & \text{if } X^H \neq X^G \\ \infty & \text{if } X^H = X^G \end{cases}$$

$$[\text{証明}] \quad \pi_0(F(X, Y)^G) = [\Sigma^1, F(X, Y)^G] \cong [\Sigma^1 \wedge X, Y]^G$$

であるから

$$(1 \wedge \lambda)^* : [\Sigma^1 \wedge X, Y]^G \rightarrow [\Sigma^1 \wedge X^G, Y]^G$$

を考えればよい。命題 1.1 を用いて, λ に対して [8], 4 章定理 2.15 と同様な議論を行なえば, この命題を得る。終

X, Y を G -space とする。 G -module V に対し Σ^V -suspension

$$\Sigma_X^V : [X, Y]^G \rightarrow [\Sigma^V X, \Sigma^V Y]^G$$

を考える。これは adjoint isomorphism

$$[\Sigma^V X, \Sigma^V Y]^G \cong [X, \Omega^V \Sigma^V Y]^G$$

を通して次の写像に移して考えることができる。

$$\lambda_* : [X, Y]^G \rightarrow [X, \Omega^V \Sigma^V Y]^G$$

ここで $\Omega^V \Sigma^V Y = F(\Sigma^V, \Sigma^V Y)$, $\lambda : Y \hookrightarrow \Omega^V \Sigma^V Y$ は $\lambda(y)(t) = (t, y)$

で定義される inclusion である。 Σ^V は compact G -CW complex と考えられるので, λ_* に上の命題を適用して次を得る。

定理 1.8 X は G -CW complex, Y は G -space with non-degenerate base point とする。 $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し Y^H は n_H -connected, $n_H \geq 0$ ならば

$$\Sigma_X^V : [X, Y]^G \rightarrow [\Sigma^V X, \Sigma^V Y]^G$$

は, $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対して, $\dim_{\mathbb{Q}} X^H \leq \min_{H' \in \mathcal{A}(H)} N_{H'}^H$ のとき同型,
 $\dim_{\mathbb{Q}} X^H \leq \min_{H' \in \mathcal{A}(H)} N_{H'}^H + 1$ のとき全射である。ここで

$$N_{H'}^H = \begin{cases} 2n_H & \text{if } H'=H \text{ かつ } \mathcal{V}^H \neq \{0\} \\ n_{H'}-1 + \dim \mathcal{V}^{H'} - \dim_H(\mathcal{V}^{H'} - \mathcal{V}^H) & \text{if } \mathcal{V}^{H'} \neq \mathcal{V}^H \\ \infty & \text{others} \end{cases}$$

注意, $\dim \mathcal{V}^{H'}$ は, 一般には $\dim_H \mathcal{V}^{H'}$ とは異なるが, G が有限群 ($\dim G = 0$) のときは一致する。($\dim_{\mathbb{Q}} X^H$ は $G \cdot X^H$ の G -CW complex としての次元を表わす。) 従って, G が有限群のとき, 上の $N_{H'}^H$ で $\mathcal{V}^{H'} \neq \mathcal{V}^H$ の部分は $(n_{H'}-1)$ と書き直される。

[証明] 次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} \pi_j(Y^H) & \xrightarrow{\lambda_*^H} & \pi_j((\Omega^{\mathcal{V}} \Sigma^{\mathcal{V}} Y)^H) \\ & \searrow \lambda_{H*}^H & \swarrow r_{H*} \\ & \pi_j(\Omega^{\mathcal{V}^H} (\Sigma^{\mathcal{V}} Y)^H) & \end{array}$$

ここで, λ , λ_H は inclusion, r_H は restriction である。
 λ_H は suspension theorem により $(2n_H+1)$ -equivalence である。特に $\mathcal{V}^H = \{0\}$ のときは $\Omega^{\mathcal{V}^H} \Sigma^{\mathcal{V}^H} Y^H = Y^H$ となるので λ_H は ∞ -equivalence である。又, r_H は補題 1.7 により $(\min_{H' \in \mathcal{A}(H)} M_{H'}^H + 1)$ -equivalence である。ここで

$$M_{H'}^H = \begin{cases} n_{H'} + \dim \mathcal{V}^{H'} - \dim_H(\mathcal{V}^{H'} - \mathcal{V}^H) & \text{if } \mathcal{V}^{H'} \neq \mathcal{V}^H \\ \infty & \text{if } \mathcal{V}^{H'} = \mathcal{V}^H \end{cases}$$

である。今 λ_*^H が単射であるのは λ_{H*} が単射のとき, 又全射

であるのは λ_{H*} が全射かつ λ_{H*} が同型の時である。

これらを組み合わせて λ^H が $(\min_{H' \in \mathcal{A}(H)} N_{H'}^H + 1)$ -equivalence であることがわかる。これに命題 1.3 を適用すればよい。 終

注意 $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対して, $\nabla^H \neq \{0\}$ となる (既約) G -module が存在する。従って G を有限群とするとき, ω はこの様なものをすべて含んでいるので $H' \subseteq H$ なる部分群 H, H' に対して

$\dim \nabla^{H'} \geq \dim \nabla^H + 1$ となる。 $\pi_{\nabla}^G(X) = [\Sigma^{\nabla}, X]^G$ とするとき, 上の定理より, $\Sigma_*^{\omega}: \pi_{n\omega}^G(\Sigma^{\omega} X) \rightarrow \pi_{(n+1)\omega}^G(\Sigma^{(n+1)\omega} X)$ は $n \geq 2$ のとき同型, $n \geq 1$ のとき全射である。

§ 2 Equivariant S-duality

G は有限群とする。 α -th stable G -homotopy group を

$$\{X, Y\}_{\alpha}^G = \varinjlim_n [\Sigma^{n\omega + \alpha} X, \Sigma^{n\omega + \alpha} Y]^G$$

と表わす。ここで $\alpha = \nabla - \omega \in RO(G)$ 。 $\mathcal{C}\mathcal{F}_*^G$ を $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し

X^H が path-connected である様な (finitistic) G -complex X の category

とする。 $X, X' \in \mathcal{C}\mathcal{F}_*^G$ に対し G -map $u: X \wedge X' \rightarrow \Sigma^{\nabla}$ を, $\forall H \in \mathcal{A}(G)$

に対し $u^H: X^H \wedge X'^H \rightarrow \Sigma^{\nabla^H}$ が duality map であるとき ([12]),

∇ -duality G -map と呼ぶ。又このとき X' を X の ∇ -dual と呼ぶ。

$u: X \wedge X' \rightarrow \Sigma^{\nabla}$ に対し, $\bar{u}: X' \wedge X \xrightarrow{\sim} X \wedge X' \xrightarrow{u} \Sigma^{\nabla}$,

$u_{\bar{u}_1, \bar{u}_2}: \Sigma^{\bar{u}_1} X \wedge \Sigma^{\bar{u}_2} X' \xrightarrow{\sim} \Sigma^{\bar{u}_1} X \wedge \Sigma^{\bar{u}_2} X \wedge X' \xrightarrow{1 \wedge u} \Sigma^{\bar{u}_1 + \bar{u}_2} \Sigma^{\nabla} = \Sigma^{\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \nabla}$ も又

duality G -map である。

Y を finite G -complex, $u: X \wedge X' \rightarrow \Sigma^{\bar{v}}$ を duality G -map とする。
準同型 $\Gamma_u^{\alpha}: \{Y, X\}_{\alpha}^G \rightarrow \{Y \wedge X', \Sigma^{\bar{v}}\}_{\alpha}^G$, $\bar{\Gamma}_u^{\alpha}: \{Y, X'\}_{\alpha}^G \rightarrow \{X \wedge Y, \Sigma^{\bar{v}}\}_{\alpha}^G$
を次の様に定義する。 G -map $f: \Sigma^{nw+\bar{v}}Y \rightarrow \Sigma^{nw+\bar{w}}X$ に対し,
 $\Gamma_u^{\alpha}\{f\} \in \{Y \wedge X', \Sigma^{\bar{v}}\}_{\alpha}^G$ は、次の写像の合成で代表される。

$$\Sigma^{nw+\bar{v}}Y \wedge X' \xrightarrow{f \wedge 1} \Sigma^{nw+\bar{w}}X \wedge X' \xrightarrow{1 \wedge u} \Sigma^{nw+\bar{w}}\Sigma^{\bar{v}}, \text{ 即ち } \Gamma_u^{\alpha}\{f\} = \{u_{nw+\bar{w},0} \circ f\}$$

又 G -map $f': \Sigma^{nw+\bar{v}}Y \rightarrow \Sigma^{nw+\bar{w}}X'$ に対し $\bar{\Gamma}_u^{\alpha}\{f'\} \in \{X \wedge Y, \Sigma^{\bar{v}}\}_{\alpha}^G$ は
次の写像の合成で代表される。

$$\Sigma^{nw+\bar{v}}X \wedge Y \xrightarrow{\tau \wedge 1} X \wedge \Sigma^{nw+\bar{v}}Y \xrightarrow{1 \wedge f'} X \wedge \Sigma^{nw+\bar{w}}X' \xrightarrow{u_{nw+\bar{w},0}} \Sigma^{nw+\bar{w}}\Sigma^{\bar{v}}$$

即ち, $\bar{\Gamma}_u^{\alpha}\{f'\} = \{u_{nw+\bar{w},0} \circ (1 \wedge f') \circ (\tau \wedge 1)\}$ 。

定理 2.1 $u: X \wedge X' \rightarrow \Sigma^{\bar{v}}$ を duality G -map とする。このとき
finite G -complex Y , $\alpha \in RO(G)$ に対して $\Gamma_u^{\alpha}, \bar{\Gamma}_u^{\alpha}$ は同型である。

$$\Gamma_u^{\alpha}: \{Y, X\}_{\alpha}^G \cong \{Y \wedge X', \Sigma^{\bar{v}}\}_{\alpha}^G, \quad \bar{\Gamma}_u^{\alpha}: \{Y, X'\}_{\alpha}^G \cong \{X \wedge Y, \Sigma^{\bar{v}}\}_{\alpha}^G$$

[証明] Γ_u^{α} のみを考える。 $\bar{\Gamma}_u^{\alpha}$ も同様にすればよい。

次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} [\Sigma^{nw+\bar{v}}Y, \Sigma^{nw+\bar{w}}X]_{\alpha}^G & \xrightarrow{u_{n*}} & [\Sigma^{nw+\bar{v}}Y \wedge X', \Sigma^{nw+\bar{w}}\Sigma^{\bar{v}}]_{\alpha}^G \\ & \searrow \lambda_{n*} & \swarrow u_{n*} \\ & [\Sigma^{nw+\bar{v}}Y, H(X', \Sigma^{nw+\bar{w}}\Sigma^{\bar{v}})]_{\alpha}^G & \end{array}$$

こゝで, $u_{n*}[f] = [u_{nw+\bar{w},0} \circ f \wedge 1]$, $\lambda_n(x)(x') = u_{nw+\bar{w},0}(x, x')$

$x \in \Sigma^{nw+\bar{v}}X$, $x' \in X'$, u_{n*} は adjoint isomorphism である。又,

$\lim_{\leftarrow n} u_{n*} = \Gamma_u^{\alpha}$ であるから, 十分大なる n に対して λ_{n*} が同型
であれば Γ_u^{α} が同型になる。従って λ_n を考えればよい。

次の可換図式を考える。 ($H \in \mathcal{A}(G)$)

$$\begin{array}{ccc} \pi_j((\Sigma^{n\omega+\bar{w}}X)^H) & \xrightarrow{\lambda_{n*}^H} & \pi_j(F(X', \Sigma^{n\omega+\bar{w}}\Sigma^{\bar{v}})^H) \\ & \searrow \Psi_{H,n*} & \swarrow h_{n*} \\ & \pi_j(F(X'^H, (\Sigma^{n\omega+\bar{w}}\Sigma^{\bar{v}})^H)) & \end{array}$$

ここで Ψ_H は restriction, $\Psi_{H,n}(X)(X') = \mathcal{U}_{n\omega+\bar{w},0}^H(X, X')$ である。

[12] により $\Psi_{H,n*}$ は $(\Sigma^{n\omega+\bar{w}}X)^H, F(X'^H, (\Sigma^{n\omega+\bar{w}}\Sigma^{\bar{v}})^H)$ が 1-connected な

ら, $j < 2(k - \dim X'^H)$, $k = \dim(n\omega + \bar{w} + \bar{v})^H$ のとき同型である。

Ψ_{H*} は補題 1.7 より $j \leq \min_{H' \in \mathcal{A}(H)} N_{H'}^H$, のとき同型である。

$$N_{H'}^H = \begin{cases} n \dim \omega^{H'} + \dim(\bar{w} + \bar{v})^H - 1 - \dim(X'^H - X^H) & \text{if } X'^H \neq X^H \\ \infty & \text{if } X'^H = X^H \end{cases}$$

従って λ_{n*}^H は $j \leq (n-1) + \dim(n\omega + \bar{w} + \bar{v})^H - 2 \dim X'$ のとき同型,

従って命題 1.3 より λ_{n*}^H は, $n \geq 2 \dim X' + \dim Y + \dim \bar{v} + 2$ のとき同型,

即ちこのとき $\mathcal{U}_{n*}^H$ も同型であるから Ψ_{n*}^H は同型である。

終

命題 2.1 X, X' を $\Sigma^{\bar{v}+1}(\Sigma^{\bar{w}+\bar{v}}\mathbb{R})$ の G -subcomplex で $X, X' \in \mathcal{C}_X^G$

, $X \wedge X' = \emptyset$, かつ inclusion $X' \hookrightarrow \Sigma^{\bar{v}+1}X$ が G -homotopy equivalence

であるものとする。このとき $\bar{v}$ -duality G -map $u: X \wedge X' \rightarrow \Sigma^{\bar{v}}$

が存在する。

u の構成は [11] と同様にすればよい。このとき再び [11] に

より u^H が duality map となり命題を得る。

定理 2.3 任意の finite G -complex X には S -dual が存在する。

・ [証明] もし, $X \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^G$ なら, $\exists X \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^G$ をとることにより, $X \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^G$ と仮定してよい。 $X \cong K$ なる finite simplicial G -complex が存在するのでこれにおきかえて考える。適当な Σ^{V+1} をとり K を Σ^{V+1} に (単体的に) G -subcomplex としてうめこみ, その補複体 X' が $X' \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^G$ となる様にできる。従って上の命題より結果を得る。 終

定理 2.4 X を compact smooth G -manifold とする。

ν をある (同変) うめこみ $(X, \partial X) \hookrightarrow (B(V+\mathbb{R}), S(V+\mathbb{R}))$ の normal bundle とすると, Thom space $T(\nu)$ は $X/\partial X$ の S -dual である。ここで $B(V+\mathbb{R}), S(V+\mathbb{R})$ は $V+\mathbb{R}$ の unit ball と unit sphere である。

これは Atiyah [4] proposition (3.2) の equivariant version であり, 証明も同様にすればよい。又上の $V+\mathbb{R}$ は, $V^G \neq \{0\}$ なら V で置きかえてもよい。

例, $G/H^+ = G/H \cup \{pt\}$ は G/H^+ の S -dual である。(G : finite に注意)

以下の結果 2.5 ~ 2.8 は Spanier [12] p365 以下に対応し, 証明も同様にできる。(又は [12] の結果を使えばよい。)

定理 2.5 $u: X \wedge X' \rightarrow \Sigma^V$, $v: Y \wedge Y' \rightarrow \Sigma^V$ を duality とすると同型 $D_V^\alpha(u, v) = (\overline{P}_u^\alpha)^* \cdot \overline{P}_v^\alpha: \{X, Y\}_\alpha^G \cong \{Y', X'\}_\alpha^G$ が存在して, $D_V^\alpha(u, v)$ が逆写像であり, 又十分大なる n と $f: \Sigma^{n\omega+V} X \rightarrow \Sigma^{n\omega+V} Y$, $f': \Sigma^{n\omega+V} Y' \rightarrow \Sigma^{n\omega+V} X'$ に対し, $D_V^\alpha(u, v) \{f\} = \{f'\}$ となるのは, 次の図式が G -homotopy 可換であるときに限る。

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{nw+0} X \wedge Y' & \xlongequal{\quad} & X \wedge \Sigma^{nw+0} Y' \\ \downarrow \wedge f & & \downarrow \wedge f' \\ \Sigma^{nw+w} Y \wedge Y' & \xrightarrow{\quad \nu_{nw+w,0} \quad} \Sigma^{nw+w} \Sigma^{\vee} \xleftarrow{\quad u_{0,nw+w} \quad} X \wedge \Sigma^{nw+w} X' & \circ \end{array}$$

suspension 同型 $\sigma^{\vee}: \{X, Y\}_0^G \rightarrow \{\Sigma^{\vee} X, \Sigma^{\vee} Y\}_0^G$ を $\{f\} \in \{X, Y\}_0^G$

に $\Sigma^{nw+0} X \rightarrow \Sigma^{nw+w} Y$ に対し, 写像の合成

$$\Sigma^{nw+0} \Sigma^{\vee} X \xrightarrow{\tau_{\wedge}} \Sigma^{\vee} \Sigma^{nw+0} X \xrightarrow{\wedge f} \Sigma^{\vee} \Sigma^{nw+w} Y \xrightarrow{\tau_{\wedge}} \Sigma^{nw+w} \Sigma^{\vee} Y$$

を定義する。このとき, 次が成立する。

命題 2.6 $u: X \wedge X' \rightarrow \Sigma^{\vee}$, $v: Y \wedge Y' \rightarrow \Sigma^{\vee}$ を duality とする。

このとき次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \{X, Y\}_0^G & \xrightarrow{D_{\vee}^0(u,v)} & \{Y', X'\}_0^G \\ \downarrow \sigma^{\vee} & \nearrow & \downarrow \sigma^{\vee} \\ \{\Sigma^{\vee} X, \Sigma^{\vee} Y\}_0^G & \xrightarrow{D_{\vee+w}^0(u_{0,0}, v_{0,0})} & \{\Sigma^{\vee} Y', \Sigma^{\vee} X'\}_0^G \end{array}$$

命題 2.7 $u: X \wedge X' \rightarrow \Sigma^{\vee}$, $v: Y \wedge Y' \rightarrow \Sigma^{\vee}$, $w: Z \wedge Z' \rightarrow \Sigma^{\vee}$ を duality とする。 $\alpha \in \{X, Y\}_0^G$, $\beta \in \{Y, Z\}_0^G$ とするとき, $\beta \alpha \in \{X, Z\}_0^G$ について

$$D_{\vee}^0(u, w) \beta \alpha = (D_{\vee}^0(u, v) \alpha) \circ (D_{\vee}^0(v, w) \beta) \quad \text{である。}$$

$u: X \wedge X' \rightarrow \Sigma^{\vee}$, $v: Y \wedge Y' \rightarrow \Sigma^{\vee}$ を duality とする。

に $X \rightarrow Y$, $f': Y' \rightarrow X'$ に対し, 次の図式は G-homotopy 可換

$$\begin{array}{ccc} X \wedge Y' & \xrightarrow{\wedge f'} & X \wedge X' \\ \downarrow \wedge f & & \downarrow u \\ Y \wedge Y' & \xrightarrow{v} & \Sigma^{\vee} \end{array}$$

とする。このとき $w: C_f \wedge C_{f'} \rightarrow \Sigma \Sigma^{\vee} = \Sigma^{1+\vee}$ を [12] p374

と同様に定義する。(但し parameter の位置は逆) C_f は f の mapping

cone である。

定理 2.8 上に定義した w は $(\vee+1R)$ -duality G-map である。

次の $(V+R)$ -duality の G -homotopy 可換図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccccccc}
 X \wedge \Sigma Y' & & Y \wedge G & & G \wedge X' & & \Sigma X \wedge Y' \\
 \swarrow \wedge \Sigma f & \searrow f \wedge 1 & \swarrow \wedge p' & \searrow p' \wedge 1 & \swarrow \wedge i' & \searrow i' \wedge 1 & \swarrow \wedge f' & \searrow f' \wedge 1 \\
 X \wedge \Sigma X' & & Y \wedge \Sigma Y' & & G \wedge G & & \Sigma X \wedge X' & & \Sigma Y \wedge Y' \\
 \downarrow u_{0,1} & & \downarrow v_{0,1} & & \downarrow w & & \downarrow u_{1,0} & & \downarrow v_{1,0} \\
 \Sigma^{H+V} & = & \Sigma^{H+V} & = & \Sigma^{H+V} & = & \Sigma^{H+V} & = & \Sigma^{H+V} //
 \end{array}$$

duality G -map $u: X \wedge X' \rightarrow \Sigma^V$, finite G -complex Y , G -complex Z に対し, 準同型 $\Gamma_u^A(Y, Z): \{Y, X \wedge Z\}_\alpha^G \rightarrow \{Y \wedge X', \Sigma^V Z\}_\alpha^G$ を, 次の写像の合成で定義する。

$$\{Y, X \wedge Z\}_\alpha^G \xrightarrow{(\wedge X')^*} \{Y \wedge X', X \wedge Z \wedge X'\}_\alpha^G \xrightarrow{(\wedge 1)^*} \{Y \wedge X', X \wedge X' \wedge Z\}_\alpha^G \xrightarrow{(u \wedge 1)^*} \{Y \wedge X', \Sigma^V Z\}_\alpha^G$$

定理 2.9 上の $\Gamma_u^A(Y, Z)$ は, 同型である。 //

Z が finite G -complex の場合は [2] と同様にできる。 Z が G -complex の場合, $\{Y, X \wedge (\)\}_\alpha^G$, $\{Y \wedge X', \Sigma^V (\)\}_\alpha^G$ は共に加法性公理をみたす G -complex 上の reduced G -homology theory になり, 比較定理により, $Z = G/H^+$, $H \in \mathcal{A}(G)$ の場合に $\Gamma_u^A(Y, Z)$ が同型であるから, Z が G -complex のときにも同型である。

E を G -spectrum とする。 G -complex X に対し,

$$[X, E]_\alpha^G = \varinjlim_n [\Sigma^{nW+V} X, \Sigma^{\bar{W}} E_n]^G = \varinjlim_m \varinjlim_n [\Sigma^{mW} \Sigma^{nW+V} X, \Sigma^{nW} \Sigma^{\bar{W}} E_n]^G$$

であるから, $[X, E]_\alpha^G = \varinjlim_n \{ \Sigma^{nW+V} X, \Sigma^{\bar{W}} E_n \}_0^G$ である。

定理 2.10 $u: X \wedge X' \rightarrow \Sigma^V$ を duality, E を G -spectrum

Y を finite G -complex とする。このとき同型

$$\Gamma_u^A(Y, E): [Y, X \wedge E]_\alpha^G \cong [Y \wedge X', \Sigma^{\bar{W}} E]_\alpha^G \cong \left(\sigma_{\bar{W}}^{\Sigma^V} \right)^* [Y \wedge X', E]_{\alpha+W}^G$$

が成り立つ。ここで $\sigma_{\bar{W}}^{\Sigma^V}$ は G -homology の suspension 同型である。

特に $\tilde{h}_G^\alpha(X; E) = [X, E]_\alpha^G$, $\tilde{h}_G^\alpha(X; E) = [\Sigma^0, E \wedge X]_\alpha^G$ とおくと,

$\tilde{h}_G^*$ は reduced G -cohomology theory に, $\tilde{h}_G^G$ は reduced G -homology theory になる。従って定理 2.10 より次を得る。

系 2.11 $\Gamma(\Sigma^0, E): \tilde{h}_G^\alpha(X; E) \cong \tilde{h}_{G^\alpha}^{\pi-\alpha}(X; E)$

$\tilde{h}_G^G$ を finite G -complex の category $\mathcal{C}\mathcal{F}_0^G$ 上の G -homology theory とする。finite G -complex X に対し S -dual X' が存在するから,

1. $\Sigma^\pi X \wedge \Sigma^{\pi_2} X' \rightarrow \Sigma^\pi$ をこの duality G -map とする。 $\alpha \in RO(G)$ に対し,

2. $\tilde{h}_G^\alpha(X) = \tilde{h}_{G^{\pi-\alpha_2-\alpha}}^G(X')$ と定義し, [1] p250 と同様の考察を行なえば,

$\tilde{h}_G^*$ が $\mathcal{C}\mathcal{F}_0^G$ 上の reduced G -cohomology theory になることが

分かる。又 [2] により $\tilde{h}_G^*$ は Ω - G -spectrum で表現される。

従って次を得る。(これは, G, W , Whitehead [4] の方法である。)

定理 2.12 $\mathcal{C}\mathcal{F}_0^G$ 上の G -homology theory は Ω - G -spectrum で表現される。又 G -complex の category $\mathcal{C}\mathcal{W}^G$ 上の G -homology theory (加法性公理をみたす) は Ω - G -spectrum で表現される。

$G = \mathbb{Z}_2$ の場合, MR -theory を考える。[7] (4.3), smooth $\mathbb{Z}_2$ -manifold M の normal bundle ν が [7] の意味の 'real' vector bundle になるとき, M を weakly 'real-complex' manifold と呼ぶことにする。このとき Thom class $t(\nu) \in MR^{n,n}(T(\nu))$ ($n = \dim \nu$)

と Thom 同型 $\Phi(\nu)^*: MR^{\mathbb{Z}_2}(M) \cong \widetilde{MR}^{p+n, q+n}(T(\nu)),$

$\Phi(\nu)^*: \widetilde{MR}_{p+n, q+n}(T(\nu)) \cong MR_{p, q}(M)$, が存在する。[7] 又 $\Phi M = M^{\mathbb{Z}_2}$

は uniform dimension をもつ。定理 2.4 とこれを組み合わせ

1 次を得る。

定理 2.13 M を $\dim M = m+n$, $\dim \Phi M = n$ なる compact weakly 'real complex' manifold とする。このとき (Poincaré) duality 同型

$$D_M: MR_{p,q}(M) \cong MR^{m-p, n-q}(M, \Phi M),$$

$$D_M': MR_{p,q}(M, \Phi M) \cong MR^{m-p, n-q}(M) \quad , \quad p, q, m, n \in \mathbb{Z}$$

が存在する。

参考文献

- [1] 荒木捷朗, 一般コホモロジー, 紀伊国屋書店 1975
- [2] S. Araki, M. Murayama G -homotopy types of G -complex and representations of G -cohomology theories. to appear Publ. R.I.M.S Kyoto Univ.
- [3] S. Araki, M. Murayama $\mathbb{Z}$ -cohomology theories to appear Japanese J. of Math.
- [4] M.F. Atiyah Thom complexes Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961) 291-310
- [5] A.L. Blakers, W.S. Massey The homotopy groups of a triad I, II, Ann. of Math. 53 (1951) 161-205, 55 (1952) 192-201
- [6] G. Bredon. Equivariant cohomology theories Lect. Note in Math 34. 1967
- [7] M. Fujii Cobordism theory with reality Math. J. Okayama Univ. 18 (1976) 171-188
- [8] 小松, 中岡, 菅原, 位相幾何学 I, 岩波書店 1967
- [9] T. Matumoto. On G -CW complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, 18 (1971) 363-374.
- [10] T. Matumoto Equivariant stratification of a differentiable transformation

group (to appear)

- [1] E. H. Spanier Infinite symmetric product, function spaces, and duality Ann. of Math. 69 (1959) 142-198
- [2] E. H. Spanier Function spaces and duality. Ann. of Math 70 (1959) 338-378
- [3] E. H. Spanier Algebraic topology Mc Graw-Hill 1966.
- [4] G. W. Whitehead Generalized homology theories Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962) 227-283