

半安定束のフロベニウス逆像とその応用

京大理 森脇 淳 (Acsushi Moriwaki)

§0. 序.

X を非特異代数多様体、 E を X 上のベクトル束、 H を X 上の ample な直線束とします。 E が H について μ -semi-stable であるとは、任意の sub-sheaf $0 \neq F \subseteq E$ に対して

$$\frac{(c_1(F) \cdot H^{\dim X - 1})}{\text{rank } F} \leq \frac{(c_1(E) \cdot H^{\dim X - 1})}{\text{rank } E}$$

が成立すると互に同値です。

$f: Y \rightarrow X$ を finite morphism とします。このとき、 f が separable、つまり、体の拡大 $k(Y)/k(X)$ が separable の時、 f^*E は、 f^*H について μ -semi-stable となることが、maximal destabilizing sheaf の一意性より導くことができます。 f が separable でない時、特に f が purely inseparable な時、 f^*E は、 f^*H について、 μ -semi-stable とは、ならない場合があります。この現象は、標数正の代数幾何学を難しくして

11 3-つの原因である。まず最初に2つ例を上げてみます。

例 (0.1) (Raynaud)

正標数の場合。ある適当な代数曲面 S と その ample な直線束 L をとると $H^1(S, L^{-1}) \neq 0$ とする例があります。
 $H^1(S, L^{-1}) \neq 0$ であるので

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$$

に $\mathcal{O}_S$ を加える自明でない extension が存在します。ここで、 E が L に μ -stable とする μ を見てみます。う。

これをいうためには、任意の $0 \neq F \subsetneq E$, $\text{rank } F = 1$ に対して、 $(F, L) \leq 0$ である μ をいいます。明らかに F は

E の中で saturated (211) と仮定して F である。

$F \rightarrow E \rightarrow L$ の合成写像を考える。これが零でない F は $\mathcal{O}_S$ の sub-sheaf とする μ で明らかに $(F, L) \leq 0$ 。よってある effective な因子 D が存在して $L \otimes \mathcal{O}(-D) \simeq F$ と書けると仮定して $\mathcal{O}_S$ 。よって F は E の中で saturated して μ である $C_2(E \otimes F^{-1}) \geq 0$ である。よって

$$(D^2) \geq (L \cdot D) \geq 0 \quad \text{--- (0.1.1)}$$

とする。ここで $(D^2) = 0$ と仮定すると $(L \cdot D) = 0$ となり、

D は effective であるので $D = 0$ となり $F \simeq L$ となる。

$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$ は split してしまふ。ゆえに
 $(D^2) > 0$ であることがわかる。Hodge Index theorem を
 用いると

$$\sqrt{(D^2)} \sqrt{(L^2)} \leq (L \cdot D) \quad \dots\dots (0.1.2)$$

である。よって

$$\sqrt{(D^2)} \sqrt{(L^2)} \leq (D \cdot L) \leq (D^2)$$

であるの2"両辺を $\sqrt{(D^2)}$ で割ると

$$\sqrt{(L^2)} \leq \sqrt{(D^2)} \quad \dots\dots (0.1.3)$$

を得る。したがって

$$(F \cdot L) = (L^2) - (L \cdot D)$$

$$\leq (L^2) - \sqrt{(D^2)} \sqrt{(L^2)} \quad (\because (0.1.2))$$

$$= \sqrt{(L^2)} (\sqrt{(L^2)} - \sqrt{(D^2)})$$

$$\leq 0 \quad (\because (0.1.3))$$

となる。

また、 L は ample であるので、十分大きな n に対して

$$H^1(S, L^{-p^n}) = 0$$

である。(実際の Raynaud の例では $H^1(S, L^{-p}) = 0$)

よって、完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow E^{(n)} \rightarrow L^{-p^n} \rightarrow 0$$

は split するから $E^{(n)}$ は semi-stable である。

(ここで $E^{(n)}$ は E の n 回 Frobenius pull back である)

E のチャーンクラスを計算すると

$$c_1(E) = L, \quad c_2(E) = 0$$

であるので、この E は stable だけれども不等式

$$c_1^2(E) \leq 4c_2(E)$$

を満たさなれり例にもなっている。

例 (0.2) (Gieseker)

$g \geq 2$ とする整数とするとき任意の素数 p に対して、
標数 p の代数閉体上定義された genus が g の曲線 C
とその上の階数が 2 で、degree が 0 となるベクトル束
の列 $\{E_n\}$ があって次を満たしているものが存在する。

$$\textcircled{1} \quad F^*(E_n) \simeq E_{n-1} \quad (F^* \text{ は フロベニウス逆像})$$

$$\textcircled{2} \quad F^*(E_1) \text{ は semi-stable である。}$$

この例は、半安定なベクトル束のフロベニウス逆像が、

半安定とはなれり例にもなれり。nef な直線束
のファミリーの openness が与えた例を構成する出発点
となれり。

§1. 階数2の半安定束のフロベニウム逆像

X を d 次元の非特異射影多様体, H は X 上の
 汎用直線束, α を実数としよう。 X 上のベクトル束 E
 が $\text{type } \alpha$ (H に関して) であるとは。

$$\frac{(c_1(F) \cdot H^{d-1})}{\text{rank } F} \leq \frac{(c_1(E) \cdot H^{d-1})}{\text{rank } E} + \alpha$$

が任意の E の sub-sheaf F に関して成立するときに
 11.11 である。 I は $p = \text{char}(k) > 0$ としよう。

I 3.1 = $\text{rank } E = 2$ としよう。 $f: P = \mathbb{P}(E) \rightarrow X$

を射影束とし、 $Y \subset P$ を $f|_Y: Y \rightarrow X$ が purely
 inseparable となる P の部分多様体としよう。

$\deg(f|_Y) = p^n$ とおきます。 $E' = (F^n)^*(E)$ (n 回の
 フロベニウム逆像) とし、 $f': P' = \mathbb{P}(E') \rightarrow X$ を考えます。

$$\begin{array}{ccc} Y \subset P & \xleftarrow{g} & P' \supset Y' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ X & \xleftarrow{F^n} & X \end{array}$$

よって $g^*(Y) = p^n Y'$ とする P' 上の部分多様体 Y' が
 ある。 Y' が f' の quasi-section である Y' に対する
 exact sequence

$$0 \rightarrow L \rightarrow E' \rightarrow M \rightarrow 0$$

とします。このとき次の公式が得られます。

$$f_*(K_P + Y \cdot Y) = p^n(p^n - 1)c_1(E) + p^n K_X - 2(p^n - 1)L$$

この公式と利用すると次の命題を得ます。

命題 (1.1)

X は d 次元 非特異射影多様体, E は X 上の階数 2 のベクトル束, H は X 上の nef 直線束とします。 2 は正整数 d を偶数で $2(p^2 - 1)d \geq (K_X \cdot H^{d-1})$ を満たすものとする。ここで X が uniruled でなく, E の i 回のフロベニウス逆像 $E^{(i)}$ が H に π_1 type $2p^i$ であると仮定します。このとき任意の $n \geq 0$ に対して, n 回のフロベニウス逆像 $E^{(n)}$ は type $p^n d$ である。

この命題を証明するための key となるのは, 上の公式以外にも 官田-森による uniruledness の判定法があります。これからさらに

系 (1.2)

X, E, H は命題 (1.1) と同じとします。

$K_X \equiv 0$ なる, X 上の任意の半安定なベクトル束 E について 任意の n 回のフロベニウス逆像は, 半安定である。

§2. 半安定ベクトル束のチャーン類の不等式

まず最初に次の定理を上げましょう。

定理 (2.1) ($p = \text{char}(k) \geq 0$)

X を非特異代数曲面, $H \in \text{nef}$ 直線束, E を階数 r のベクトル束とする。 $H \neq 0$ として, 次のいずれかを仮定する。

(1) $\text{char}(k) = 0$, E : μ -semi-stable ($H = c_1(E)$)

(2) $\text{char}(k) > 0$, 任意の $n \geq 0$ について n 回のフロベニウス逆像 $E^{(n)}$ は, μ -semi-stable

ならば

$$(r-1) c_1(E)^2 \leq 2r c_2(E).$$

ここでこの定理 (2.1) と 前の命題 (1.1) から導ける。

定理を主張する前に, ce type という概念を導入しよう。

X を d 次元非特異射影多様体, $H \in \text{nef}$ 直線束とする。 β を実数とする。 X 上の階数 2 のベクトル束が,

例 type β である。任意の階数 1 の E の sub sheaf L に関して

$$(L \cdot H^{d-1}) \leq \beta (c_1(E) \cdot H^{d-1})$$

が成立すると主張します。

さて問題の定理は、

定理 (2.2)

X を d 次の非特異射影多様体, E を X 上の階数 2 のベクトル束とする。 l を正整数で, β が実数であり

$$\left(\beta - \frac{1}{2}\right) c_1(E)^d \geq \frac{(K_X \cdot c_1(E)^{d-1})}{2(p^l - 1)}$$

を満たすとする。さてここで $c_1(E)$ が nef で big とし、

$0 \leq i < l$ に関して i 回の Frobenius 逆像 $E^{(i)}$ が $c_1(E)$ に関して例 type β となる。このとき

$$\beta(1 - \beta) \leq \frac{c_2(E) \cdot c_1(E)^{d-2}}{c_1(E)^d}$$

である。

§3 応用

この章は、定理 (2.2) の応用をいくつかあげよう。

- ① X を非特異な極小代数曲面で、一般型とする。
 X が not uniruled とし、 Ω_X^1 が K_X に $(p-1)$ 半安定
 とすると

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4(p-1)^2} \leq \frac{c_2(X)}{c_1(X)^2}$$

($p = \dim k$)

- ② X を非特異な極小代数曲面で、一般型とする。
 X が not uniruled と仮定する。すなわち、
 非特異極小代数曲面の purely inseparable な
 dominant な有理写像の列

$$Z = Z_n \dashrightarrow Z_{n-1} \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow Z_1 \dashrightarrow Z_0 = X$$

があって次を満たす。

$$i) [k(Z_i) : k(Z_{i-1})] = p$$

$$ii) c_1(Z_i)^2 < \frac{4p}{(p+1)^2} c_1(Z_{i-1})^2$$

iii) Z は、特殊型か一般型で不等式

$$c_1(z)^2 \leq \frac{(p+1)^2}{p} c_2(z)$$

を満足する z がある。

- ③ X は d 次元 非特異射影多様体とし、 L は nef & big の直線束とする。 X は not uniruled とし、 $(p-1)(L^d) > (K_X \cdot L^{d-1})$ であると仮定すると

$$H^1(X, L^{-1}) = 0$$

- ④ X は 非特異射影代数曲面で not uniruled とする。 L は X 上の nef & big の直線束とする。

i) $p \in X$ かつ p が $|K_X + L|$ の base point であるとすると、

$$(L^2)((L^2) - 4) > \left(\frac{(K_X \cdot L)}{(p-1)} \right)^2$$

であるとすると、 p を通る effective divisor E として

$$(L \cdot E) = 0, \quad (E^2) = -1$$

$$\sim$$

$$(L \cdot E) = 1, \quad (E^2) = 0$$

を満足するものが存在する。

ii) $p, q \in X$ の 2 点 41. p, q 0" $|K_X + L|$ は
分離 2" $1 \leq 2$

$$(L^2)((L^2) - 8) > \left(\frac{(K_X \cdot L)}{(p-1)} \right)^2, \quad (L^2) \geq 10$$

と仮定すると. $p, q \in$ 通る effective divisor E
2"

$$(L \cdot E) = 0, \quad (E^2) = -1 \text{ or } -2$$

$$(L \cdot E) = 1, \quad (E^2) = -1 \text{ or } 0$$

$$(L \cdot E) = 2, \quad (E^2) = 0$$

を満足する n 0" 存在する。

詳しくは。

A. Moriuchi, Frobenius pull-back of a semi-stable
vector bundle of rank 2 and its applications.

を 見 7 7 11.