

二次以上の characters が消える包合的 偏微分方程式系について

立教大 理 垣 江 邦 夫

§0. 序

E. Cartan は 1900 年頃に包合系と言われる概念を導入して偏微分方程式系の解析的局所解の存在を示した(いわゆる Cartan-Kähler の定理)。それより前に、Cauchy は(単独)一階偏微分方程式の解が Lagrange-Charpit 系と言われる常微分方程式系を積分することによって得られることを示し、又、Monge、Ampère、Darboux 等は、主として二独立変数二階(単独)偏微分方程式に対して、その解法を常微分方程式系の積分に帰着させる方法を研究した。これらと、最近の松田(道彦)及び講演者の研究を踏まえて次の問題を提起する:

問題: 偏微分方程式系の Cauchy 問題の解法も、完全積分可能な Pfaff 系の積分に帰着させよ。

講演者は、Darboux の方法が包合系の理論及び Cartan の

characteristics の理論の立場からとらえられることに着目し、一つの二変数函数に関する包含系へ Darboux の方法を拡張した [4]。しかしながら、既存の理論は、一部の研究はあるものの、独立変数の数が三以上の場合を本質的にとらえ得るものではない。講演者は、上述の研究 [4] をさらにとちえ直し、多独立変数のある種の包含系に対して Darboux の求積法に類似したものを得ることに成功した。解かぬばならない問題は次の二つに分けられる：

I. 与えられた包含系 Σ に対し、その解がまた Σ のそれとなる新しい包含系を構成すること。

II. Cartan の *characteristics* の理論が適用され得る包含系を見出すこと。

我々の研究において必要な、問題 II に対する答は、Cartan [1] によって得られている。問題 I を解くことが我々の主要な研究であり、それは即ち包含系の構造を詳しく調べることに他ならない。ここでは、一未知函数に関する二次以上の *characters* が消える包含系に対して考察を行う。研究の出发点は、特性イデアルの導入とその性質を詳しく調べることにあり、議論は、(実又は複素)解析的範疇において行う。

§1. 包含系とその *characters*

p を M から N への射影とする fibered manifold (M, N, p) における l 階偏微分方程式系 Σ は、 $J^l(M, N, p)$ 上の解析関数の芽の層 $\mathcal{O}(J^l)$ のイデアルの部分層として定義される。ここに $J^l = J^l(M, N, p)$ は (M, N, p) の切断の l -jets からなる空間を表す。以後 Σ は一未知関数に関する系と仮定する；即ち、 $\dim M = \dim N + 1$ を仮定する。 (M, N, p) に付随する M の局所座標系が $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$, $n = \dim N$, で与えられる時、 J^l の局所座標系は次で与えられる：

$$(x_1, \dots, x_n, z, p_{i_1 \dots i_m} ; 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, 1 \leq m \leq l).$$

ここに $p_{i_1 \dots i_m} = \partial^m z / \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}$.

p_{l-1}^l で J^l から J^{l-1} への自然な射影を表す。 $X \in J^l$ に対し、接空間 $T_X(J^l)$ の部分空間 $Q_X(J^l)$ を dp_{l-1}^l の核として定義する。それは $\{\partial/\partial p_{i_1 \dots i_l} ; 1 \leq i_1, \dots, i_l \leq n\}$ で張られる部分空間である。

Σ の積分点の全体を $I\Sigma$ と記す。各 $X \in I\Sigma$ に対し、空間 $C_X(\Sigma)$ は次で定義される：

$$C_X(\Sigma) = \{ \mathcal{X} \in Q_X(J^l) ; \mathcal{X}(\varphi) = 0, \varphi \in \Sigma_X \}.$$

この空間は自然に $Q_{\bar{X}}(J^{l-1}) \otimes T_a^*(N)$ ($\bar{X} = p_{l-1}^l X$, $a = X$ の N への射影) の部分空間とみなし得る。 $T_a(N)$ の要素の系 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ に対して

$$C_X(\Sigma)(v_1, \dots, v_k) = \{ \mathcal{X} \in C_X(\Sigma) ; \mathcal{X}(v_1) = \dots = \mathcal{X}(v_k) = 0 \}$$

と定義する。整数 $g_k(X)$, $X \in I\Phi$, を次で定義する:

$$g_0(X) = \dim C_X(\Phi),$$

$$g_k(X) = \min \{ \dim C_X(\Phi)(v_1, \dots, v_k); v_1, \dots, v_k \in T_a(N) \} \quad (k \geq 1).$$

Φ が $X \in I\Phi$ で包合的のとき、 Φ の X における $1, 2, \dots, n$ 次の characters $s_1(X), s_2(X), \dots, s_n(X)$ は次式で定義される;
 $s_1(X) = g_0(X) - g_1(X), s_2(X) = g_1(X) - g_2(X), \dots, s_n(X) = g_{n-1}(X) - g_n(X)$.
 これは Cartan-Kähler の定理においてその意味が見出される量である。定義から $g_1(X) = 0$ なることと $s_2(X) = \dots = s_n(X) = 0$ なることは同等である。この時 $s_1(X) = \dim C_X(\Phi)$.
 この条件下では、倉西[5]と松田[6]により与えられた包合系である為の判定条件は、より簡単に述べ得る。その為に

$$r_l(X) = \dim \langle \pi_l^* dF; F \in \Phi_X \rangle,$$

$$r_{l+1}(X) = \dim \langle \pi_{l+1}^* dF; F \in (p\Phi)_{\tilde{X}} \rangle$$

と置く。ここに $\pi_l^* dF = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_l} \partial F / \partial p_{i_1 \dots i_l} dp_{i_1 \dots i_l}$,
 $\langle \# \rangle$ は $\#$ で張られるベクトル空間, $p\Phi$ は Φ の (total) prolongation, $\tilde{X}$ は X 上の $(l+1)$ -jet とする。

定理 1. Φ が $X_0 \in I\Phi$ で包合的かつ $s_2(X_0) = \dots = s_n(X_0) = 0$ である為の必要十分条件は次の四条件である:

- (i) X_0 は Φ の通常積分点であり $g_1(X_0) = 0$.
- (ii) $r_l(X)$ は $I\Phi$ での X_0 の近傍上一定である.
- (iii) $I\Phi$ での X_0 の近傍上 $r_{l+1}(X) = r_l(X) + \binom{l+n-1}{n-2}$.

(iv) Φ は X_0 で p -closed である。

§2. 特性イデアル

下に定義する Φ の特性イデアルという概念は、そのイデアル論的考察によって包含系 Φ の構造をより詳しく知ることができるという事実によって、非常に重要である。

X を Φ の積分点とする。 $T_a(N)$ ($a = X$ の N への射影) の底 $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$ をそれぞれ $\xi_1, \dots, \xi_n$ と記す。 K でもって、議論を実又は複素の範疇で行うかに従って、実数体又は複素数体を表わす。 Φ の X における特性イデアル $\mathcal{M}$ も、次の性質(*)を有し、多項式達

$$\sum_{i_1, \dots, i_l \leq i_0} \partial F(X) / \partial p_{i_1, \dots, i_l} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_l} \quad (F \in \Phi_X)$$
 を含む $K[\xi_1, \dots, \xi_n]$ における最小のイデアルとして定義する:

(*) $\xi_1 P, \xi_2 P, \dots, \xi_n P \equiv 0 (\mathcal{M}) \Rightarrow P \equiv 0 (\mathcal{M})$ 。

古典的イデアル論によれば、 $\mathcal{M}$ は最大準素イデアルによる簡約された表示をもつ:

$$\mathcal{M} = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \cap \dots \cap \mathcal{Q}_\nu.$$

ここに $\mathcal{Q}_j$ は同次準素イデアルである。この簡約された表示において、成分の個数 ν と、 $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_\nu$ に属する(同次)素イデアル $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\nu$ は一意的に定まる。性質(*)をもたせた

ことによつて、 $\mathcal{M}$ が単位イデアルでない限り、各素イデアル $\mathcal{P}_j$ は、 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ で生成されるイデアルを含まない。

命題. Φ が X で包合的かつ $\Delta_2(X) = \dots = \Delta_n(X) = 0$ ならば、 $\mathcal{M}$ に随伴する素イデアル $\mathcal{P}_j$ は、 $\mathcal{M}$ が単位イデアルでない限り、すべて射影次元 0 である。

以下、この命題の条件下で考え、更にもし K が実数体ならば、 $\mathcal{M}$ の零点はすべて実であるものと仮定する。この時、各成分 $\mathcal{O}_j$ は孤立成分であり、従つてそれはそれに随伴する素イデアル $\mathcal{P}_j$ によつて一意的にきまる。成分 $\mathcal{O}_j$ の指数は $\min \{ \sigma; \mathcal{P}_j^\sigma \equiv 0 (\mathcal{O}_j) \}$ として定義される。単様イデアルの理論 (Waerden [7], §90) を応用すれば、定理 1 を用いて次の基本的結果を示すことができる。

定理 2. Φ は X で包合的かつ $\Delta_2(X) = \dots = \Delta_n(X) = 0$ と仮定する。更に K が実数体のとき $\mathcal{M}$ のすべての零点は実であると仮定する。 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu$ をそれぞれ $\mathcal{M}$ の成分 $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_\nu$ の指数とする。この時 $\sum_{j=1}^{\nu} \varepsilon_j \leq \Delta_1(X)$ 。もしすべての ε_j が 1 に等しいならば、 $\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \varepsilon_j = \Delta_1(X)$ 。

注意. $n=2$ の時を除き上の不等式の等号は一般には成立しない。

§3. 包合系の構成

序に述べた問題『 Φ を含む新しい包含系を構成すること』に対する解答を得る為には、更に空間 $C_X(\Phi)$ に関する代数的考察を必要とする；即ち $C_X(\Phi)$ の部分空間が包含的部分空間になる為の条件を見出さねばならない。この考察は我々の議論の一つの要点ではあるが、ここでは省略していきなり解析的考察に入る。議論は、より一般的な条件下でも実行可能であるが、説明を簡単にす為次の条件下で考える。

(H₁) Φ は X_0 で包含的かつ $\Delta_2(X_0) = \cdots = \Delta_n(X_0) = 0$ 。

(H₂) K が実数体のときは、 Φ の X_0 における特性イデアル $\mathcal{M}$ のすべての零点は実である。更に $\mathcal{M}$ の最大準素イデアルによる簡約された表示の各成分の指数は 1 に等しい。

この条件 (H₁), (H₂) の下では、 $\mathcal{M}$ の簡約された表示の各成分は素イデアルであり、従って $\mathcal{M}$ は次の形の表示を持つ：

$$\mathcal{M} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_\nu,$$

ここに $\mathcal{P}_j$ は、 $n-1$ 個の一次形式から生成される素イデアルである。定理 2 によれば $\nu = \Delta_1(X_0)$ である。

仮定により Φ は X_0 で包含的であるから、次の微分形式系 $\Sigma(\Phi)$ は X_0 で N に関して包含的である ([4], §1 参照)：

$$(\Sigma(\Phi)) \begin{cases} F=0, & dF=0 \quad (F \in \Phi_{X_0}), \\ dp_{i_1 \dots i_m} - \sum_{i=1}^m p_{i_1 \dots i_m i} dx_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n dp_{i_1 \dots i_m i} \wedge dx_i = 0 \quad (1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, 0 \leq m \leq \ell). \end{cases}$$

ここに $m=0$ の時 $p_{i_1 \dots i_m} = Z$ とする。

Φ の Monge 特性系は $\Sigma(\Phi)$ の特異要素を決定する Pfaff 系として定義される。これは、 Φ の表示の各成分 p_j (より正確には、 X_0 の $I\Phi$ での近傍上定義された成分 p_j の場) に対応して得られる $I\Phi$ (での X_0 の近傍) 上の $\nu = j_1(X_0)$ 個の Pfaff 系である。 p_j に対応して得られる特性系を $\Delta^l(p_j)$ と記す。 u を $X \in I\Phi$ の近傍上定義された l -jet の函数とする。 X の $I\Phi$ での近傍上 $du \equiv 0 \pmod{\Delta^l(p_j)}$ となる時、 u は $\Delta^l(p_j)$ の X での 積分であるといい、 $u(X)=0$, $du(X) \neq 0$ かつ $du \equiv 0 \pmod{\Delta^l(p_j)}$ が、 $u=0$ で定義される $I\Phi$ の部分多様体での X の近傍上成り立つ時、 u は $\Delta^l(p_j)$ の X における 相対積分であると言う。

$\Sigma(\Phi)$ の prolongation $p^* \Sigma(\Phi)$ を考えることによって、高次の Monge 特性系及び高次の(相対)積分も定義される。

l -jet の函数 u が X で Φ と独立である とは、 $u=0$ が $\Phi=0$ から導かれぬ時、即ち精確には $\pi_l^* du \neq 0 \pmod{\pi_l^* dF}$; $F \in \Phi_X$) である時にいう。

$J^l(M, N, p)$ の開集合 $\mathcal{U}$ 上の函数 $u_1, \dots, u_g$ に対して $\mathcal{U}$ 上の l 階偏微分方程式系 $\Phi^l(u_1, \dots, u_g)$ を、 Φ と $u_1, \dots, u_g$ によって生成される層 $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ のイデアルの部分層として定義する。明らかに、 $\Phi^l(u_1, \dots, u_g)$ の解は Φ の解である。

新しい包含系の構成に関する我々の基本的結果は、次の二定理である。

定理3. (H_1) と (H_2) を仮定する。 u を X_0 の近傍上の k -jets の函数で、 Φ と X_0 で独立である函数とせよ。この時、 $\Phi^k(u)$ が X_0 で包含的である為の必要十分条件は、 u がある特性系 $\Delta^k(p_j)$ の相対積分となることである。この場合、 $\Phi^k(u)$ の X_0 での特性イデアルは、 $\mathcal{M} = p_1 \cap \dots \cap p_r$ から成分 p_j を省くことによつて得られる。

定理4. (H_1) と (H_2) を仮定する。 $u_1, \dots, u_g$ を X_0 で Φ と独立な函数で、それぞれ、相異なる g 個の特性系 $\Delta^k(p_{j_1}), \dots, \Delta^k(p_{j_g})$ の X_0 における相対積分とする。この時、偏微分方程式系 $\Phi^k(u_1, \dots, u_g)$ は X_0 で包含的である。又、 $\Phi^k(u_1, \dots, u_g)$ の X_0 における特性イデアルは、 $\mathcal{M} = p_1 \cap \dots \cap p_r$ から g 個の成分 $p_{j_1}, \dots, p_{j_g}$ を省くことにより得られる。

これらの定理は、高次の特性系及び積分が現われる場合へ拡張される。

§4. 求積法

条件 (H_1) をみたす系 Φ に対しては、Cartan-Kähler の定理により、次の Cauchy 問題がもっとも妥当である：“与え

られた $\Sigma(\Phi)$ の非特異な積分曲線を通る $\Sigma(\Phi)$ の n -次元積分多様体を求めよ。” ここにおける多様体は、すべて空間 $J^q(M, N, P)$ の部分多様体であるが、 N への射影が退化しないような多様体を意味するものとする。以後 Cauchy 問題と言えは、この問題も指す。

Φ に対する Cauchy 問題は、Cartan-Kähler の定理によつて、一意的な局所解を持つ (Kähler [3])。我々は、序に説明した問題『Cauchy 問題の解法を、完全積分可能な Pfaff 系の積分に帰着させよ。』を考察する。 $\nu = \Delta_1(X_0) = 0$ の時は、 Φ は X_0 で完全積分可能であり、各 $X \in I\Phi$ を通る一意的な解が存在する。この解は、完全積分可能な系 $\Sigma(\Phi)$ を積分して得られる。従つて、この場合問題は自明となる。

1°) $\nu = 1$ の時：Cauchy 問題の解法は、完全積分可能な Pfaff 系の積分に帰着させることが出来る。より精確に言えは、解は、初期曲線を通る一助変数の $n-1$ 次元特性多様体の族によつて生成される。

この事實は、Cartan による次の結果 (i), (ii) から従う：

(i) $\Delta_1(X_0) = 1, \Delta_2(X_0) = \dots = \Delta_n(X_0) = 0$ ならば、微分形式系 $\Sigma(\Phi)$ は、 $n-1$ 次元の Cauchy-Cartan characteristics を持つ (Cartan [1], p. 306)。

(ii) Cartan の意味の特性系は、完全積分可能である

(Cartan [2], Chap. III).

完全積分可能な Pfaff 系は、常微分方程式系を積分することにより解かれ得ることを注意しておく。

2°) $\nu > 1$ の時: この場合、一般には、1° に述べたような状況、すなわち、解法が完全積分可能な Pfaff 系の積分に帰着する状況にはない。しかしながら、我々が既に得た結果を組合せることにより、Darboux の方法を一般化した求積法を得ることができ、それは次のように述べられる:

“ $\nu-1$ 個の相異なる Monge 特性系がそれぞれ互に独立な二つの独立な積分をもつならば、Cauchy 問題の解法は、完全積分可能な Pfaff 系の積分に帰着される。”

尚、Monge 特性系の積分は、常微分方程式系を積分することにより求められることを注意しておく。

文 献

- [1] E. Cartan : Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales. Ann. Sci. École Norm. Sup., 3^e série, 18, 241-311.
- [2] — : Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques. Hermann, Paris (1945).
- [3] E. Kähler : Einführung in die Theorie der

Systeme von Differentialgleichungen. Teubner, Leipzig (1934).

[4] K. Kakié : On involutive systems of partial differential equations in two independent variables. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A, 21, 405-433.

[5] M. Kuranishi : Lectures on involutive systems of partial differential equations. Publ. Soc. Mat. São Paulo (1967).

[6] M. Matsuda : Cartan-Kuranishi's prolongation of differential systems combined with that of Lagrange and Jacobi. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., 3, 69-84.

[7] B. L. van der Waerden : Moderne Algebra II (2nd edition). Springer, Berlin (1940).

