

Operators の norm ideal perturbation について

北海道教育大 大久保 和義

1. H を separable Hilbert space とする。又 $B(H)$ で H 上の有界線形作用素環を表わすものとし、 C_p ($p > 0$) で Schatten の p -class. $T \in C_p$ のときに $\|T\|_p$ で T の p -norm を表わすことにする。以下で $A, B, C, \dots$ は $B(H)$ の元とする。1909 年に H. Weyl は H が self adjoint operator のときに、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{diagonal operator } D \text{ と compact operator } K \\ \text{が存在して } H = D + K \text{ かつ } \|K\| < \varepsilon \end{array} \right.$

とできることを示した。ついで von Neumann が 1935 年に (*) での K は $K \in C_2$, $\|K\|_2 < \varepsilon$ とできることを示し、T. Kuroda により 1958 年に $p > 1$ で $K \in C_p$, $\|K\|_p < \varepsilon$ とできることが示された。一方、I.D. Berg により T が normal operator のとき

$p > 2$ とすると

(**) $\left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, diagonal operator } D \\ \text{と } K \in C_p \text{ が存在して } T = D + K \text{ かつ } \|K\|_p < \varepsilon \\ \text{とできる。} \end{array} \right.$

が示された。さらに T の spectrum が十分に小さいとき ($\sigma(T)$ が finite length の curve 上にあるとき) には $p = 2$ のときでもよいことが証明された。最近 D. Voiculescu により, 一般の normal operator で $p = 2$ のときに (**) が成立することを示したので, このことを紹介したい。次に, Fuglede - Putnam の定理, 即ち N_1, N_2 を normal operator, X を任意の operator とするとき

$$N_1 X = X N_2 \implies N_1^* X = X N_2^*$$

が成立することをも, $\mathcal{I}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の ideal とするとき

$$N_1 X - X N_2 \in \mathcal{I} \stackrel{?}{\implies} N_1^* X - X N_2^* \in \mathcal{I}$$

ということの問題としたときに, 知られている結果を述べる。こゝでの結果は主に G. Weiss によるものである。

2. まづ用いられる記号, 用語の定義を述べる。

$\hat{c}$ を実数の finitely non-zero sequences の全体の集合として, ω を $\hat{c}$ から $\mathbb{R}$ への symmetric gage function,

即ち Φ は

$$i) \quad \Phi(x) > 0 \quad (x \neq 0)$$

$$ii) \quad \Phi(\alpha x) = |\alpha| \Phi(x)$$

$$iii) \quad \Phi(x+y) \leq \Phi(x) + \Phi(y)$$

$$iv) \quad \Phi((1, 0, 0, \dots)) = 1$$

$$v) \quad \Phi((\xi_j)_{j=1}^{\infty}) = \Phi((|\xi_{\pi(j)}|))$$

$$(\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: \text{automorphism})$$

を満たすとする。

Φ , $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1^+$ でそれぞれ, finite rank projection 全体の集合, finite rank operators 全体の集合, finite rank positive contractions 全体の集合を表わすものとする。

$T \in \mathcal{R}$ のとき $\|T\|_{\Phi} := \Phi((\lambda_j))$ ($\lambda_j \in \sigma_p(T^*T)^{1/2}$)

とし, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で $\sup_{P \in \Phi} \|TP\|_{\Phi} < \infty$ のとき $T \in \mathcal{G}_{\Phi}$

と定義して, このとき $\|T\|_{\Phi} := \sup_{P \in \Phi} \|TP\|_{\Phi}$ と表わす。

実際, $\mathcal{G}_{\Phi}$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の ideal で $\|\cdot\|_{\Phi}$ に関して Banach

space になることが知られている。 $\mathcal{G}_{\Phi}^{(10)}$ で $\mathcal{R}$ の $\|\cdot\|_{\Phi}$ に

よる closure を表わす。 $\tau = (T_1, \dots, T_n) \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^n$

とすると

$$K_{\Phi}(\tau) := \liminf_{A \in \mathcal{R}_1^+} \|[A, \tau]\|_{\Phi} \quad \text{とする。}$$

$$(\text{ここで } \|[A, \tau]\|_{\Phi} := \max_{1 \leq i \leq n} \|[A, T_i]\|_{\Phi} \text{ とする})$$

$\mathcal{K} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を高々可算な基をもつ vector subspace とす

るとき $\mathcal{K}$ が Φ -well-behaved とは 任意の $n \in \mathbb{N}$

任意の $\mathfrak{A}$ の元 $T_1, \dots, T_n$ に対して $K_{\mathfrak{A}}(T_1, \dots, T_n) = 0$ を満たすことをいう。

3. D. Voiculescu の結果

[補題 1] $\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\mathfrak{A}$ -well-behaved とする。

このとき、任意の $\varepsilon > 0$ 、任意の $T_1, \dots, T_n \in \mathfrak{A}$ に対して次の条件を満たす $\{B_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}_1^+$ が存在する。

$$i) \quad \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2 = I$$

$$ii) \quad \sum_{m=1}^{\infty} |[B_m, T_j]|_{\mathfrak{A}} \leq \varepsilon \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$iii) \quad \sum_{m=1}^{\infty} |[B_m, T]|_{\mathfrak{A}} < \infty \quad (\forall T \in \mathfrak{A})$$

(証明) $\{T_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathfrak{A}$ を張る operators とする。

$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{A}$ -well-behaved より $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}_1^+$ が存在して

$A_m \uparrow I$, $A_m A_{m+1} = A_m$, $\underbrace{1 \leq j \leq m+n}_{\text{で}} |[A_m, T_j]|_{\mathfrak{A}} \leq \varepsilon_m = (\varepsilon \times 2^{-1/m})$ とできる。このとき $B_m = ((1 - \frac{1}{m+1}) A_{m+1}^2$

$- (1 - \frac{1}{m}) A_m^2)^{1/2}$ とおくと $A_{m+1} A_m = A_m$ を用いて

$$B_m = ((1 - \frac{1}{m+1}) I - (1 - \frac{1}{m}) A_m^2)^{1/2} - (1 - \frac{1}{m+1})^2 (1 - A_{m+1})$$

が成り立つ。そこで $X_m = (1 - \frac{1}{m+1}) I - (1 - \frac{1}{m}) A_m^2$ とおくと

$$1 \leq j \leq m+n \text{ で}$$

$$|[X_m, T_j]|_{\mathfrak{A}} \leq 2 \|A_m\| |[A_m, T_j]|_{\mathfrak{A}} \leq 2 \cdot \varepsilon_m \text{ となり}$$

$$|[X_m^{1/2}, T_j]|_{\mathfrak{A}} = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} z^{1/2} [(X_m - zI)^{-1}, T_j] dz \right|_{\mathfrak{A}}$$

(Γ は適当な積分路) を用いて

$|[X_m^{1/2}, T_j]|_{\pm} \leq 2^m \varepsilon_m$ を出せる。よって

$$|[B_m, T_j]|_{\pm} \leq \varepsilon \cdot 2^{-m} \quad (1 \leq j \leq m+n)$$

次に $1 \leq j \leq n$ で

$$\sum_{m=1}^{\infty} |[B_m, T_j]|_{\pm} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-m} = \varepsilon \quad \text{が成り立つ。}$$

iii) は $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ が $\mathcal{K}$ を span するから ii) を用いて示すことにする。

p を Calkin map とする。

[補題 2] $\mathcal{A}$ を unital な $B(\mathcal{H})$ の $*$ -subalgebra とする。 $\mathcal{B}$ を高々可算な基をもつ $\mathcal{A}$ の $*$ -subalgebra とし $\varphi \in p(\mathcal{A})$ から $B(\mathcal{H})$ への unital $*$ -homomorphism で $\varphi(p(\mathcal{B}))$ が $\pm$ -well-behaved とする。このとき、次の条件を満たす isometries $\{L_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在する。

$$i) \quad L_i^* L_j = \delta_{ij} I$$

$$ii) \quad L_j \varphi(p(\mathcal{B})) - B L_j \in \widetilde{G_{\pm}^{(10)}} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

$$iii) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|L_j \varphi(p(\mathcal{B})) - B L_j\|_{\pm} = 0 \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

(証明) $\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が $\mathcal{B}$ を張るものとする。

このとき補題 1 より $\{B_{ij}\} \subset \mathcal{R}_+^+$ が存在して、任意の自然数 i で

$$1) \quad \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}^2 = I$$

$$2) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|[\varphi(p(B_k)), B_{ij}]\|_{\pm} \leq 2^{-i} \quad (1 \leq k \leq i)$$

$$3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|[\varphi(p(B_k)), B_{ij}]\|_{\pm} < \infty \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

とできる。このとき isometries $\{L_{ij}\}_{i,j}$ で

$$L_{ij}^* L_{ij} = I, \quad L_{ij}^* L_{rs} = 0 \quad ((i,j) \neq (r,s)), \quad \text{かつ}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|L_{ij} \circ (p(B_k)) - B_k L_{ij}\| |B_{ij}|_{\infty} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} \quad \text{をみたす}$$

ものがあることがわかる。ここで $L_i = \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij} B_{ij}$ とす

ると $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ が補題の条件をみたす。

[定理 3] $\mathcal{A}$ を $B(\mathcal{H})$ の unital な C^* -subalgebra とする。 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の高々可算な差をもつ $*$ -subalgebra とする。又 ϕ を $p(\mathcal{A})$ から $B(\mathcal{H})$ への unital $*$ -homomorphism で $\phi(p(\mathcal{B}))$ が $\mathcal{A}$ -well-behaved とする。

このとき $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ への unitary operators $\{U_n\}$ が存在して

$$U_n^* (B \oplus \phi(p(B))) U_n - B \in \mathcal{G}_{\frac{1}{n}}^{(10)} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

$$\lim_n \|U_n^* (B \oplus \phi(p(B))) U_n - B\|_{\infty} = 0 \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

とできる。

(証明) $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathcal{B} \in \text{span}$ する selfadjoint operators とする。今補題 2 を用いて isometries $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ があって

$$L_i^* L_j = \delta_{ij} I$$

$$B L_i - L_i \phi(p(B)) \in \mathcal{G}_{\frac{1}{i}}^{(10)} \quad (B \in \mathcal{B})$$

$$\|B_k L_i - L_i \phi(p(B_k))\|_{\infty} < 2^{-i} \quad (1 \leq k \leq i) \quad \dots (1)$$

とできる。ここで

$$S_j := I - \sum_{i=j}^{\infty} L_i L_i^* + \sum_{i=j}^{\infty} L_{i+1} L_i^* \quad \text{とおく}$$

$$|[S_j, B_k]|_{\mathfrak{H}} \leq 4 \sum_{i=j}^{\infty} |L_i \mathfrak{f}(p(B_k)) - B_k L_i|_{\mathfrak{H}} \quad \text{より}$$

$$[S_j, B_k] \in \widetilde{G_{\mathfrak{H}}^{(1)}} \quad \text{かつ} \quad 1 \leq k \leq j \quad \text{で} \quad |[S_j, B_k]|_{\mathfrak{H}} \leq 2^{-j+3}$$

今 $\{B_k\}$ が $\mathcal{B}$ を span するから

$$[S_j, B] \in \widetilde{G_{\mathfrak{H}}^{(1)}} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |[S_j, B]|_{\mathfrak{H}} = 0$$

$\therefore$ で $U_n^* : \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ を

$$U_n^* := \begin{bmatrix} S_n & L_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{とすると} \quad U_n^* \text{ は isometry}$$

一方 S_n の定義より $S_n^* S_n = I - L_n L_n^*$ がいえ?

$$U_n^* U_n = \begin{bmatrix} S_n S_n^* + L_n L_n^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad U_n \text{ は isometry}$$

故に U_n は unitary で 定理の条件をみたす。

[系 4] $\mathcal{A}$ を unital C^* -algebra とする。

$\mathcal{B}$ を高々可算な基をもつ $\mathcal{A}$ の $*$ -subalgebra とし?

$\mathfrak{f}_j$ ($j=1, 2$) を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ への unital $*$ -monomorphism

で $\mathfrak{f}_j(\mathcal{B})$ が $\mathfrak{H}$ -well-behaved とする。さらに: $\mathfrak{f}_j(\mathcal{A})$

$\cap \mathcal{K}(\mathfrak{H}) = \{0\}$ ($\mathcal{K}(\mathfrak{H})$ は compact operators 全体の集合)

とすると unitary operators $U_n (\in \mathcal{B}(\mathfrak{H}))$ があり

$$U_n \mathfrak{f}_1(B) - \mathfrak{f}_2(B) U_n \in \widetilde{G_{\mathfrak{H}}^{(1)}} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n \mathfrak{f}_1(B) - \mathfrak{f}_2(B) U_n|_{\mathfrak{H}} = 0 \quad (\forall B \in \mathcal{B}) \quad \text{が成立.}$$

?

(証明) 定理3より $\{W_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$; unitaries

で $W_n^{(j)} S_j(B) - (S_1(B) \oplus S_2(B)) W_n^{(j)} \in \mathcal{O}_{\mathcal{H}}^{(0)}$ か?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|W_n^{(j)} S_j(B) - (S_1(B) \oplus S_2(B)) W_n^{(j)}\|_{\mathcal{H}} = 0$$

をみたすものがある。よって $V_n := W_n^{(2)*} W_n^{(1)}$ とおくと

4. 可換な selfadjoint operators の n -組について

$\mathbb{Z}^n$ 上の automorphism $\alpha_i (1 \leq i \leq n)$ を

$$\alpha_i((m_1, \dots, m_n)) := (m_1', \dots, m_n')$$

$$m_j' = m_j + \delta_{ij} \quad \text{と定義する。}$$

又 $l^2(\mathbb{Z}^n)$ 上の unitary operator $U(\alpha_i) (1 \leq i \leq n)$ を

$$U(\alpha_i)e_j := e_{\alpha_i(j)} \quad (j \in \mathbb{Z}^n) \quad \text{で定義する。} \quad (:$$

ここで e_j は $l^2(\mathbb{Z}^n)$ の正規直交基とする。)

今 K_p で $K_{\mathbb{Z}^p} \quad (K_p((\xi_j)) = (\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p)^{1/p})$ とする) を
表わし、 $|\cdot|_p$ で $|\cdot|_{\mathbb{Z}^p}$ を表わすことにする。フーリエ
変換での Hausdorff-Young の不等式を用いて次の命題が
いえる。

[命題 5] $n \geq 2$ とする。このとき

$$K_p((U(\alpha_1), \dots, U(\alpha_n))) = 0 \quad (n \leq p < \infty)$$

が成立する。

次に、可換な selfadjoint operators の n -組についての
結果をのべる。

[定理 6] $n \geq 2$ とする。

$\delta = (D_1, \dots, D_n)$ を可換な selfadjoint operators の n 組とする。このとき 任意の $\varepsilon > 0$ に対して 可換な diagonal selfadjoint operators の n -組 $\delta' = (D'_1, \dots, D'_n)$ があり $\|\delta - \delta'\|_n < \varepsilon$ とできる。

(証明) $\mathcal{A} := C^*[D_1, \dots, D_n, I]$ とし $\mathcal{A}$ の $*$ -sub-algebra $\mathcal{B}$ を $D_1, \dots, D_n$ の polynomial 全体から成るものとする。今 ρ_1 を $\mathcal{A}$ の identical representation, ρ_2 を $\mathcal{A}$ の infinite multiplicity をもつ faithful representation とする。(ρ_2 は $\mathcal{A} = C(X)$ $\exists X: \text{compact}$ で $\{x_i\} \subset X: \text{countable dense set}$ をとり $\mathcal{A} \ni T \leftrightarrow f \in C(X)$ で $\alpha_i = f(x_i)$ とするとき T と (α_i) の diagonal operator (α_i はすべて無限回現われるとある) を同一視する) このとき $K_n(\delta) = 0$ が示されれば $\mathcal{B}$ の定義より $\rho_i(\mathcal{B})$ が $\mathfrak{A}_n$ -well-behaved がわかる。

$K_n(\delta) = 0$ は δ の spectral measure が Lebesgue measure に近い singular のときには次のようにしてわかる。実際に δ は cyclic vector $\xi \in \mathcal{H}$ をもつとしてよく。

仮定より 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して 互いに disjoint な Borel sets $\{W_k^{(j)}\}_{k=1}^\infty$ があり $\sum_{k=1}^\infty (\text{diam}(W_k^{(j)}))^n < \frac{1}{j}$
 $\sum_{k=1}^\infty E(W_k^{(j)}) = I$ $\times$ ある $n_j \in \mathbb{N}$ で

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_j} E(w_k^{(j)}) \xi - \xi \right\| < 1/j \text{ とできる。}$$

今 $P_j \in \mathcal{C} E(w_1^{(j)}) + \dots + \mathcal{C} E(w_{n_j}^{(j)})$ 上の projection とすると $1 \leq i \leq n$ で

$$\begin{aligned} [P_j, D_i] &= \sum_{k=1}^{n_j} E(w_k^{(j)}) [P_j, D_i] E(w_k^{(j)}) \text{ となり} \\ |[P_j, D_i]|_n^n &= \sum_{k=1}^{n_j} |E(w_k^{(j)}) [P_j, D_i] E(w_k^{(j)})|_n^n \\ &\leq 2^{n+1} \sum_{k=1}^{n_j} (\text{diam}(w_k^{(j)}))^n \\ &\leq 2^{n+1}/j \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

又 $\{P_n\}$ の ある部分列で $P_{n_k} \uparrow I$ がわかり 定義より

$k_p(\delta) = 0$ がわかる。故に δ の spectral measure が Lebesgue measure に関して absolutely continuous といえる。

今 $A_j := \frac{1}{2} (U(\alpha_j) + U(\alpha_j)^*) \quad (1 \leq j \leq n)$ とすると

$\sigma(A_1, \dots, A_n) = ([-1, 1])^n \subset \mathbb{R}^n$ で $\sigma(A_1, \dots, A_n)$

は Lebesgue measure に関して absolutely continuous

かつ 命題 5 より $k_n(A_1, \dots, A_n) = 0$ がわかる。

$B = (B_1, \dots, B_n) = (A_1 \otimes I_{\mathcal{H}}, \dots, A_n \otimes I_{\mathcal{H}})$ とおくと

$k_n(B) = 0$ で B は infinite multiplicity をもつ

よって $\|\delta\| \leq 1$ として $B = B_1 \oplus B_2$ (B_1 は δ

に unitarily 同値) とできて、一般に $\max_{i=1,2} k_n(T_i)$

$\leq k_n(T_1 \oplus T_2) \leq k_n(T_1) + k_n(T_2)$ ($T_i \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^n$)

がいえることより $k_n(B_1) = k_n(\delta) = 0$ がいえる。故に系

4 を用いて定理は示せる。

[注意]. 一般に N を normal operator とするとき
 $N = D_1 + i D_2$ (D_1, D_2 は selfadjoint operator で $D_1 D_2 = D_2 D_1$)
 と表わされる。よって定理 6 を用いると、 N は C_2 を法と
 して diagonal operator と unitarily 同値なことがわかる。

5. Operator の norm ideal を法とする Fuglede-
 Putnam の定理に関して論ずる。もともとの Fuglede - Putn-
 am の定理は N_1, N_2 を normal operators とし、 X を任
 意の operator とするとき

$$N_1 X = X N_2 \implies N_1^* X = X N_2^* \quad \text{が成立する。}$$

ということであった。これを拡張して、G. Weiss は、 $\mathcal{Q}$ を
 $B(\mathcal{H})$ の norm ideal とするとき、 N_1, N_2, X を先の条件
 とするとき

$$N_1 X - X N_2 \in \mathcal{Q} \stackrel{?}{\implies} N_1^* X - X N_2^* \in \mathcal{Q}$$

という問題を考察した。実際にこの問題は通常の方法により
 N が normal operator, X を任意の operator とし

$$N X - X N \in \mathcal{Q} \stackrel{?}{\implies} N^* X - X N^* \in \mathcal{Q}$$

と同値であることが知られる。

• $\mathcal{Q} = C_2$ のとき

[定理 7] D は diagonal operator, $X \in B(\mathcal{H})$ とする
 とし $DX - XD \in C_2 \implies D^* X - X D^* \in C_2$

//

かつこのとき $\|DX - XD\|_2 = \|D^*X - XD^*\|_2$ が成立する。

(証明) D, X を行列表示して、同一 basis にする

$$D = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}, \quad X = (x_{ij}) \quad \text{とする。}$$

$$\text{このとき} \quad DX - XD = ((\lambda_i - \lambda_j) x_{ij})$$

$$D^*X - XD^* = ((\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j) x_{ij}) \quad \text{となる。}$$

故に $DX - XD \in C_2$ のとき

$$\begin{aligned} \|DX - XD\|_2^2 &= \sum_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 |x_{ij}|^2 \\ &= \sum_{i,j} |\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j|^2 |x_{ij}|^2 \\ &= \|D^*X - XD^*\|_2^2 \end{aligned}$$

となり定理は証明できた。

[定理 8] N を normal, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする。

このとき $NX - XN \in C_2 \implies N^*X - XN^* \in C_2$

(証明) 定理 6 より $N = D + K$ (D は diagonal
で $K \in C_2$) とできる。このとき

$$\begin{aligned} NX - XN &= (D + K)X - X(D + K) \\ &= DX - XD + KX - XK \quad \text{となり} \end{aligned}$$

$$NX - XN \in C_2 \implies DX - XD \in C_2$$

よって定理 7 より $D^*X - XD^* \in C_2$ がいえ。

実際に $N^*X - XN^* \in C_2$ がいえ。

(しかし Weiss の方法によると、定理 8 の条件があると

$$(***) \quad \|NX - XN\|_2 = \|N^*X - XN^*\|_2 \quad \text{がわかる。}$$

証明の方法は normal operator N を $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$

($\mathbb{T}$ は torus) で $N = D \oplus M_\phi$ と分解する. $\therefore D$ は diagonal operator で M_ϕ は $L^2(\mathbb{T})$ 上の ϕ による multiplication である. 次に (***) を示すためには.

$\|M_\phi X - X M_\phi\|_2 = \|M_\phi^* X - X M_\phi^*\|_2$ を示す. $\therefore$ 11.12 がわかる. 今 $\phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n z^n$ とすると M_ϕ を行列表示して

$$(M_\phi)_{ij} = (M_\phi z^j, z^i) = \phi_{j-i} \quad \text{となる.}$$

又 $X = (x_{ij}) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ として $F(z, w) := \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} x_{ij} z^i w^j$, $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ に対して

$$(\phi(z) + \psi(w)) * F(z, w) = \sum_{i,j} \left(\sum_n (\phi_n x_{i-n,j} + \psi_n x_{i,j-n}) \right) z^i w^j$$

とすると

$$\begin{aligned} (M_\phi X - X M_\phi)_{ij} &= \sum_n \phi_n (x_{i+n,j} - x_{i,j-n}) \\ &= \sum_n \phi_n \langle (z^{-n} - w^n) F, z^i w^j \rangle \\ &= \langle (\phi(\bar{z}) - \phi(w)) * F, z^i w^j \rangle \end{aligned}$$

同様に

$$(M_\phi^* X - X M_\phi^*)_{ij} = \langle \overline{\phi(\bar{z}) - \phi(w)} * F, z^i w^j \rangle \quad \text{となる}$$

よって

$$\begin{aligned} \|M_\phi X - X M_\phi\|_2^2 &= \sum_{i,j} |(M_\phi X - X M_\phi)_{ij}|^2 \\ &= \iint_{\mathbb{T}^2} |(\phi(\bar{z}) - \phi(w)) * F(z, w)|^2 dz dw \end{aligned}$$

同様に

$$\|M_\phi^* X - X M_\phi^*\|_2^2 = \iint_{\mathbb{T}^2} |\overline{(\phi(\bar{z}) - \phi(w))} * F(z, w)|^2 dz dw$$

で、計算により、これらが等しいことがわかる。

norm ideal を法とする Fuglede - Putnam 型の定理は上述のように $\mathcal{Q} = C_2$ で成立するほか、 $\mathcal{Q} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は compact operators 全体の集合) でも成立することは容易に知られる。一方、 $\mathcal{Q} = C_p$ ($0 < p < 1$)、 $\mathcal{K}$ においては成立しないことが知られている。残されている問題としては

1. $\mathcal{Q} = C_1$ で成立するか
2. $\mathcal{Q} = \mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{K}(\mathcal{H}), C_2, \{0\}$ 以外のどのような $\mathcal{Q}$ で成立するか。
3. $\mathcal{Q} = C_2$ で N : normal を $N^*N - NN^* \in C_2$ として成立するか

などがある。

References

- [1] I. D. Berg, An extension of the Weyl von Neumann theorem to normal operators, Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971), 365-371.
- [2] B. A. Fuglede, A commutativity theorem for normal operators, Proc. N. A. S. 36 (1950), 35-40.
- [3] C. R. Putnam, On normal operators in Hilbert space, Amer. J. Math. 73 (1951), 357-362.
- [4] D. Voiculescu, Some results on norm-ideal perturbations of Hilbert space operators, J. Operator Theory 2 (1979) 3-38.

- [5] G. Weiss, The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class and generating functions I, Trans. Amer. Math. Soc. 246 (1978), 193 - 210.
- [6] G. Weiss, The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class and generating functions, Lecture note in Math. 693 (Springer).
- [7] G. Weiss, The Fuglede commutativity theorem modulo operator ideal, (preprint).