

無限次元空間における測度について

鳥取大 教育 栗林幸男

0. はじめに

無限次元空間の測度論は、実数の無限直積 $\mathbb{R}^\infty$ 上に確率測度を構成した Kolmogorov に始まり、現在では表現論、場の量子論等と関連して研究が進められている。

ここでは、超標準解析 (non-standard analysis) を用いて $\mathbb{R}^\infty$ に測度を構成する一つの方法について述べたい。筋道は次の通りである。

(1) 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とし、 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ とする。

それぞれ ${}^*\mathbb{R}$, ${}^*\bar{\mathbb{R}}$ へ拡張する。

(2) $x \in \mathbb{R}^\infty$ に対し「ノルム」 $\|x\| \in {}^*\mathbb{R}$ を定義する。このノルムによって $\mathbb{R}^\infty$ における距離 $d(x, y) = \|x - y\|$ ($x, y \in \mathbb{R}^\infty$) を定義できる。従って $\mathbb{R}^\infty$ は距離空間となる。

(3) $E \subset \mathbb{R}^\infty$ に対して切り口 (section) $E(x_{m+1}, \dots) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots) \in E\}$ を考える。任意の n と任意の $(x_{m+1}, \dots)$ に対して切り口 $E(x_{m+1}, \dots)$ が $\mathbb{R}^n$ で Lebesgue 可測であるとき、 E が $\mathbb{R}^\infty$ で可測 (measurable) であると定義する。この定義によって $\mathbb{R}^\infty$ における可測集合の

全体は、完全加法族 (completely additive family of sets, の集合代数) となる。

(4) $E \subset \mathbb{R}^\infty$ が可測のとき、 E の測度 $m(E)$ を $\bar{\mathbb{R}}$ に値をとる関数として、次のように定義する。

$$ME(x_2, \dots) = [(m_1(E(x_2, \dots))), \dots, m_n(E(x_{n+1}, \dots))), \dots] ,$$

ここで m_n は $\mathbb{R}^n$ における Lebesgue 測度である。

(5) $E \subset \mathbb{R}^\infty$ が可測のとき、擬測度 $GM(E)$ を次のように定義する。

$$GM(E) = [(\sup_{(x_2, \dots)} m_1(E(x_2, \dots))), \dots, \sup_{(x_{n+1}, \dots)} m_n(E(x_{n+1}, \dots))), \dots]$$

1. 準備

自然数全体の集合を $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ とし、各 $x \in N$ に対し、 $S_x = \{y; y > x, y \in N\}$, $S = \{S_x; x \in N\}$ とする。 S は有限交差性 (finite intersection property) をもつ。 S によって生成される free ultrafilter (free は ω -incomplete と同義, 齋藤正彦 [6] による) を $\mathcal{F}$ とする。

$\bar{\mathbb{R}}^\infty = \prod_{i \in N} \bar{\mathbb{R}} = \{x; x(i) \in \bar{\mathbb{R}}, i \in N\}$ とする。ただし $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ とする。また $x(i) = x_i$ のように書くこととする。

定義 1.1 記号 $\equiv, >, \geq$ を次のように定める。

$x, y \in \bar{\mathbb{R}}^\infty$ に対して,

- (1) $x \equiv y \iff$ 任意の $i \in N$ に対して $x(i) = y(i)$,
 (2) $x > y \iff$ 任意の $i \in N$ に対して $x(i) > y(i)$,
 (3) $x \geq y \iff$ 任意の $i \in N$ に対して $x(i) \geq y(i)$.

$x, y \in \bar{R}^\infty$ に対して関係 $\sim$ を次のように定める.

$$x \sim y \iff \{i; x(i) = y(i)\} \in \mathcal{F}.$$

このとき関係 $\sim$ は同値関係となる.

定義 1.2 ${}^*\bar{R} = \bar{R}^\infty / \sim$. $x \in \bar{R}^\infty$ の同値類を $[x]$ のように表す. ${}^*\bar{R}$ についても同様.

$x \in R$ と $[(x, \dots, x, \dots)]$ を同一視すれば $R \subset {}^*\bar{R}$ と考えられる. 以下このように同一視する.

命題 1.3 ${}^*\bar{R}$ は全順序集合である.

定義 1.4 ${}^*\bar{R}$ における記号 $>, \geq$ を次のように定める.

- (4) $[x] > [y] \iff \{i; x(i) > y(i)\} \in \mathcal{F}$,
 (5) $[x] \geq [y] \iff \{i; x(i) \geq y(i)\} \in \mathcal{F}$.

命題 1.5

- (6) $x \equiv y$ ならば $[x] = [y]$,
 (7) $x > y$ ならば $[x] > [y]$,
 (8) $[x] \geq [y] \iff [x] > [y]$ または $[x] = [y]$.

証明 (8) $[x] \geq [y]$ とする.

$$\{i; x(i) \geq y(i)\} \in \mathcal{F},$$

$$\{i; x(i) \geq y(i)\} = \{i; x(i) > y(i)\} \cup \{i; x(i) = y(i)\}$$

であり, $\mathcal{F}$ は ultrafilter であるから

$$\{i; x(i) > y(i)\} \in \mathcal{F} \quad \text{または} \quad \{i; x(i) = y(i)\} \in \mathcal{F}.$$

従って $[x] > [y]$ または $[x] = [y]$ が成立する。

逆に $[x] > [y]$ または $[x] = [y]$ ならば $[x] \geq [y]$

であることが明白。

定義 1.6 *R における加法, 減法, 乗法, 除法をそれぞれ次のように定める。

$$(9) \quad [x] + [y] = [(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)]$$

$$(10) \quad [x] - [y] = [(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n, \dots)]$$

$$(11) \quad [x][y] = [(x_1 y_1, \dots, x_n y_n, \dots)]$$

$$(12) \quad [x] / [y] = [((x_1 / y_1)^*, \dots, (x_n / y_n)^*, \dots)],$$

ただし $((x_n / y_n)^* = x_n / y_n$ ($y_n \neq 0$ のとき), $= 0$ ($y_n = 0$ のとき), とする。

上の定義は明らかに代表元のえうひ方によらない。

R^ω に位相を入れるために $x \in R^\omega$ に対して, ルー ${}^*|x|$ を次のように定義する。

$$\text{定義 1.7} \quad {}^*|x| = [(\sqrt{x_1^2}, \dots, \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \dots)]$$

$$\text{命題 1.8} \quad {}^*|x| \geq 0, \quad {}^*|x| = 0 \iff x \equiv 0.$$

証明 ${}^*|x| \geq 0$ であることは明白。

${}^*|x| = 0$ とする。任意の n に対して, $m \geq n$ なる m が存在して $\sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} = 0$ 従って $x_1 = \dots = x_n = \dots = x_m = 0$ 。

n は任意であるから $x \equiv 0$ が成立する。 $x \equiv 0$ なるものは ${}^*|x| = 0$ であることは明白。

定義 1.9 $x, y \in R^\infty$ に対して $d(x, y)$ を次のように定める。

$$d(x, y) = {}^*|x - y| = \left[\left(\sqrt{(x_1 - y_1)^2}, \dots, \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \dots \right) \right].$$

命題 1.10 $x, y, z \in R^\infty$ とする。次のおののおのが成立する。

$$(13) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(14) \quad d(x, y) = 0 \iff x \equiv y,$$

$$(15) \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

証明 (15) 任意の n に対して

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}$$

が成立するから、

$$\left[\left(\sqrt{(x_1 - z_1)^2}, \dots, \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2}, \dots \right) \right]$$

$$\leq \left[\left(\sqrt{(x_1 - y_1)^2}, \dots, \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \dots \right) \right] + \left[\left(\sqrt{(y_1 - z_1)^2}, \dots, \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}, \dots \right) \right].$$

$$\text{従って } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

$d(x, y)$ は超実数値 (*R の元) をとる関数であるが、命

題 1.10 によつて R^∞ の距離と考えることができる。

命題 1.11 $d(x, y)$ によつて R^∞ は距離空間となる。

p_n を R^∞ から R^n への射影とする。

定義 1. 12 $S \subset R^\infty$ が次の条件を満足するとき、 R^∞ における線分であるという。

$$(16) \quad \{n; p_n(S) \text{ は } R^n \text{ における線分}\} \in \mathcal{F}.$$

命題 1. 13 $S \subset R^\infty$ が線分ならば、任意の $n \in N$ に対して $p_n(S)$ は R^n の線分である。

定義 1. 12 と同様に、 R^∞ における三角形、平行四辺形等を定義することができる。従って R^∞ において初等幾何を考えることができる。

定義 1. 14 $a, b \in R^\infty$ かつ $a \leq b$ とする。

$$\bar{I}(a, b) = \{x \in R^\infty; a \leq x \leq b\}$$

を R^∞ における有界閉区間という。同様に有界開区間 $\bar{I}^\circ(a, b)$ を次のように定義する。

$$\bar{I}^\circ(a, b) = \{x \in R^\infty; a < x < b\}$$

さらに一般の区間 $I(a, b)$ も同様に定める。

命題 1. 15. 有界閉区間 $\bar{I}(a, b)$ に対しては

$$(17) \quad \{n; p_n(\bar{I}(a, b)) \text{ は } R^n \text{ における閉区間}\} = N$$

が成立する。有界開区間 $\bar{I}^\circ(a, b)$ についても同様に

$$(18) \quad \{n; p_n(\bar{I}^\circ(a, b)) \text{ は } R^n \text{ における開区間}\} = N$$

が成立する。

定義 1. 16 $r \in R$, $r \geq 0$ とする。 $a \in R^\infty$ に対し

$$(19) \quad B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^\infty; |x - a| \leq r\}$$

を $\mathbb{R}^\infty$ の中心 a , 半径 r の閉球という。開球も同様に定義する。

命題 1.17 $B(a, r)$ (中心 a , 半径 r の閉球) に対して

$$(20) \quad \{n; p_n(B(a, r)) \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ にある中心 } (a_1, \dots, a_n), \text{ 半径 } r \text{ の閉球}\} = N$$

が成立する。開球についても同様。

定義 1.18 $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots) > 0$ とする。

$$(21) \quad U_n(a, \varepsilon_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty; \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} \leq \varepsilon_n, x_i = a_i \right. \\ \left. (i \geq n+1) \right\}, \quad a \in \mathbb{R}^\infty$$

とし, $U(a, \varepsilon)$ を次のように定める。

$$(22) \quad U(a, \varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(a, \varepsilon_n).$$

$S \subset \mathbb{R}^\infty$ が次の条件を満足するとき, 開集合という。

$$(23) \quad \text{任意の } a \in S \text{ に対して } U(a, \varepsilon) \text{ が存在して} \\ U(a, \varepsilon) \subset S \text{ となる。}$$

命題 1.19. (24) $\mathbb{R}^\infty$ および $\emptyset$ は開集合である。

$$(25) \quad S_1, S_2 \text{ が開集合ならば } S_1 \cap S_2 \text{ は開集合である。}$$

$$(26) \quad \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } S_\lambda \text{ が開集合ならば } \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \text{ は} \\ \text{開集合である。}$$

証明 (25) $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots), \quad \eta \equiv (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) > 0$ とする。任意の $a \in S_1 \cap S_2$ に対して, ε, η を小さくとれば, $U(a, \varepsilon) \subset S_1, U(a, \eta) \subset S_2$ が成立する。

$$U_m(a, \varepsilon_m) = \left\{ x; \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - a_i)^2} \leq \varepsilon_m, x_i = a_i \ (i \geq m+1) \right\},$$

$$U_m(a, \gamma_m) = \left\{ x; \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - a_i)^2} \leq \gamma_m, x_i = a_i \ (i \geq m+1) \right\}$$

であるから $\gamma_m = \min(\varepsilon_m, \eta_m)$ とすれば

$$U_m(a, \gamma_m) \subset U_m(a, \varepsilon_m) \cap U_m(a, \eta_m) \quad (m \in \mathbb{N})$$

が成立する。従って

$$U(a, \gamma) = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m(a, \gamma_m) \subset S_1 \cap S_2$$

が成立する。従って $S_1 \cap S_2$ は開集合である。

命題 1.20 有界開区間 $\dot{I}(a, b)$ は開集合である。

証明 $\alpha \in \dot{I}(a, b)$ とする。 $a < \alpha < b$ であるから、任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $a_i < \alpha_i < b_i$ が成立する。

$\varepsilon_m > 0, \varepsilon_m \in \mathbb{R}$ を小さくとれば

$$U_m(\alpha, \varepsilon_m) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\infty}; \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \alpha_i)^2} \leq \varepsilon_m, x_i = \alpha_i \ (i \geq m+1) \right\}$$

に対して, $U_m(\alpha, \varepsilon_m) \subset \dot{I}(a, b)$ が成立する。

$$\therefore U(\alpha, \varepsilon) = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m(\alpha, \varepsilon_m) \subset \dot{I}(a, b)$$

従って $\dot{I}(a, b)$ は開集合である。

2. $\mathbb{R}^{\infty}$ における測度

$E \subset \mathbb{R}^{\infty}$ の $(x_{m+1}, \dots)$ における切り口 $(x_{m+1}, \dots)$ -section) を定義し, 切り口の可測性によって E の $\mathbb{R}^{\infty}$ における可測性を定義する。

定義 2.1 $E \subset \mathbb{R}^{\infty}$ とする。集合 $E(x_{m+1}, \dots)$ を次のよう

に定め, E の $(x_{n+1}, \dots)$ における切り口 $(x_{n+1}, \dots)$ -section) といふ。

$$(1) \quad E(x_{n+1}, \dots) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \in E\}$$

任意の n と任意の $(x_{n+1}, \dots)$ に対して $E(x_{n+1}, \dots)$ が $\mathbb{R}^n$ において Lebesgue 可測のとき, E は $\mathbb{R}^\infty$ において可測 (measurable) といふ。

命題 2.2 有界閉区間 $I(a, b)$, 有界開区間 $J(a, b)$, 有界区間 $I(a, b)$ はいずれも可測である。

命題 2.3 $x \in \mathbb{R}^\infty$, $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ とする。

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^\infty; \forall |y - x| \leq r\}$$

は可測である。

命題 2.4 $E \subset \mathbb{R}^\infty$ が可測ならば E^c は可測である。

証明 E^c の $(x_{n+1}, \dots)$ における切り口を $E^c(x_{n+1}, \dots)$ とする。

$$\begin{aligned} E^c(x_{n+1}, \dots) &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \in E^c\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \in E\}^c \\ &= (E(x_{n+1}, \dots))^c \end{aligned}$$

であるから $E^c(x_{n+1}, \dots)$ は $\mathbb{R}^n$ において Lebesgue 可測である。

ゆえに任意の $n \in \mathbb{N}$, 任意の $(x_{n+1}, \dots)$ に対して成立するので E^c は可測である。

命題 2.5 $E_1, \dots, E_j, \dots$ はいずれも $\mathbb{R}^\infty$ で可測とする。

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ は可測である。

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) (x_{n+1}, \dots) &= \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \\ &\quad \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \in E_i \} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i (x_{n+1}, \dots) \end{aligned}$$

が成立し、各 $E_i (x_{n+1}, \dots)$ は $\mathbb{R}^n$ において Lebesgue 可測であるから $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i (x_{n+1}, \dots)$ は $\mathbb{R}^n$ において Lebesgue 可測である。

これより任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $(x_{n+1}, \dots)$ に対して成立するから $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ は $\mathbb{R}^{\infty}$ において可測である。

命題 2.4 および 命題 2.5 により、 $\mathbb{R}^{\infty}$ における可測集合の全体は、完全加法族 (completely additive family of sets, σ -加法族, σ -集合代数) をなすことがわかる。

$\mathbb{R}^{\infty}$ における可測集合 E の測度 M を ${}^*\mathbb{R}$ に値をとる関数として次のように定義する。

定義 2.6 E を $\mathbb{R}^{\infty}$ における可測集合とする。まず m を次のように定める。

$$(2) \quad m E (x_1, \dots) \equiv (m_1 E (x_1, \dots), \dots, m_n E (x_{n+1}, \dots), \dots)$$

この $m E (x_1, \dots)$ に対して $M E (x_1, \dots)$ を次のように定める。

$$(3) \quad M E (x_1, \dots) = [m E (x_1, \dots)]$$

ただし m_n ($n \in \mathbb{N}$) は $\mathbb{R}^n$ における Lebesgue 測度である。

命題 2.7 $E_i \subset \mathbb{R}^{\infty}$ ($i=1, 2, \dots, k$) は可測集合であって

互に素, したがって $E_i \cap E_j = \emptyset$ ($i \neq j$) とする。このとき

$$(4) \quad M\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right)(x_2, \dots) = \sum_{i=1}^k M E_i(x_2, \dots)$$

が成立する。

証明 $E_i(x_{n+1}, \dots)$ ($i=1, 2, \dots$) は $\mathbb{R}^n$ において可測で互に素であるから, Lebesgue 測度の性質によつて次式が成立する。

$$\begin{aligned} m_n\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right)(x_{n+1}, \dots) &= \sum_{i=1}^k m_n E_i(x_{n+1}, \dots) \\ \therefore m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right)(x_2, \dots) &= \left(\sum_{i=1}^k m_i E_i(x_2, \dots), \dots, \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^k m_n E_i(x_{n+1}, \dots), \dots \right) \\ &= \sum_{i=1}^k (m_i E_i(x_2, \dots), \dots, m_n E_i(x_{n+1}, \dots), \dots) \\ \therefore M\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right)(x_2, \dots) &= \sum_{i=1}^k M E_i(x_2, \dots) \end{aligned}$$

命題 2.8 命題 2.5 における各 E_i がある一定の有界区間に含まれるならば, $M\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right)(x_2, \dots)$, $M E_i(x_2, \dots)$ ($i=1, 2, \dots, k$) はいずれも $\mathbb{R}$ に値をとる関数であつて (4) 式が成立する。

命題 2.9 $E_i \subset \mathbb{R}^\infty$ ($i \in \mathbb{N}$) は可測集合であつて互に素とする。次の等式が成立する。

$$(5) \quad M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)(x_2, \dots) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} m E_i(x_2, \dots) \right]$$

注意 (5) 式において $\left[\sum_{i=1}^{\infty} m E_i(x_2, \dots) \right] = \sum_{i=1}^{\infty} [m E_i(x_2, \dots)] = \sum_{i=1}^{\infty} M E_i(x_2, \dots)$ とすることはできない。(代表元のえらび方によつて變つてしまう)

命題 2.10 命題 2.7 における各 E_i ($i \in N$) が一方の有界区間に含まれるならば *R に値をとる関数として (5) 式が成立する。

次に擬測度 GM を次のように定義する。

定義 2.11 $E \subset R^\infty$ を可測集合とする。

$$(6) \quad GME = \left[\left(\sup_{(\alpha_2, \dots)} m_1 E(\alpha_2, \dots), \dots, \sup_{(\alpha_m, \dots)} m_n E(\alpha_m, \dots), \dots \right) \right]$$

命題 2.12 $E \subset R^\infty$ がある有界区間に含まれる可測集合ならば, $GME \in {}^*R$ が成立する。

実用的にはこの擬測度 GM が有効と思われる。

命題 2.13 有界区間の擬測度は次のように表される。

$$(7) \quad GMI(a, b) = [(b_1 - a_1, \dots, \prod_{i=1}^n (b_i - a_i), \dots)] \in {}^*R$$

とくに, $b_m - a_m = \alpha$ ($m \in N$) ならば

$$(8) \quad GMI(a, b) = [(\alpha, \dots, \alpha^m, \dots)]$$

が成立する。

命題 2.14 半径 r ($r > 0, r \in R$), 中心 $a \in R^\infty$ の球 $B(a, r)$ の擬測度 $GMB(a, r)$ は次のように表される。

$$(9) \quad GMB(a, r) = \left[(2r, \pi r^2, \frac{4}{3}\pi r^3, \dots, v_m r^m, \dots) \right]$$

ただし $v_m = \frac{1}{n} \omega_m = \frac{\sqrt{\pi}^m}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$ である。

命題 2.15 可測集合 $E \subset R^\infty$ に対して, $GME = 0$ ならば $M E(\alpha_2, \dots) = 0$ (任意の $(\alpha_2, \dots)$ に対して) が

成立する。

命題 2.16 $E \subset \mathbb{R}^\infty$ が高々可算個の点集合ならば, $GM E = 0$ である。

命題 2.17 $E_i \subset \mathbb{R}^\infty$ ($i = 1, 2, \dots, k$) が可測であって, $GM E_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) ならば $GM(\bigcup_{i=1}^k E_i) = 0$ が成立する。

系 2.18 $E_i \subset \mathbb{R}^\infty$ ($i = 1, 2, \dots, k$) が可測であって, 任意の $(x_2, \dots)$ に対して, $ME_i(x_2, \dots) = 0$ ($i = 1, \dots, k$) ならば, 任意の $(x_2, \dots)$ に対して, $M(\bigcup_{i=1}^k E_i)(x_2, \dots) = 0$ が成立する。

命題 2.19 $E_i \subset \mathbb{R}^\infty$ ($i \in \mathbb{N}$) が可測集合であって次の条件を満足するものとする。

(10) ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq n_0$ ならば

$$\sup_{(x_{n+1}, \dots)} m_n E_i(x_{n+1}, \dots) = 0 \quad (i \in \mathbb{N}).$$

このとき $GM(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) = 0$ が成立する。

References

- [1] S. Kamo; Nonstandard natural number systems and nonstandard models, J. Symbolic Logic, 46 (1981), 365 - 376.
- [2] ———; Nonstandard real number systems

with regular gaps, Tsukuba J. Math., 5
(1981), 21-24.

[3] H. J. Keisler; An infinitesimal approach to stochastic analysis, Lecture Notes, 1980.

[4] P. A. Loeb; An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory, preprint.

[5] ———; Weak limits of measures and the standard part map, preprint.

[6] 齋藤正彦; 超積と超導解析, 東京図書 (1976).

[7] G. Takeuti; Dirac space, Proc. Japan Acad., 38 (1962), 414-418.

[8] 山崎泰郎; 無限次元空間の測度 (全2巻), 紀伊国屋書店, ((上) 1978, (下) 1978).