

多重三角関数とゼータ関数

(Multiple sine functions and zeta functions)

黒川 信重

(Nobushige Kurokawa)

東京工業大学 理学部

(Tokyo Inst. of Tech.)

[0] はじめに (Introduction)

多重三角関数については, 1980年代に研究に着手し, 一応の成果が挙げ, 2010年頃からは何度か講演をし, 数理解析研究所講究録にもいくつか報告があります。その当時の公式の発表論文には

[1] N. Kurokawa "Multiple sine functions and Selberg zeta functions" Proc. Japan Acad. 67A (1991) 61-64.

[2] N. Kurokawa "Gamma factors and Plancherel measures" Proc. Japan Acad. 68A (1992) 256-260.

[3] N. Kurokawa "Multiple sine functions: an example" Adv. Stud. in Pure Math. 21 (1992) 219-226.

があります。また, 日本語による解説がいくつかあるうち

[4] 黒川信重「三角関数の一般化をめぐって」『津田塾大学
数学・計算機科学研究所報』4 (1992) 1-25. (『近
現代数学史シンポジウム4』1991年11月・報告集.)

は詳しい方です。これらの内容の詳細にわたる証
明はすべて

[5] 黒川信重『多重三角関数講義』(Lectures on
Multiple Sine Functions) 東京大学 1991年4月-7月 (小山信也
氏による119ページのノート).

において述べてありました。この[5]は人づてに多方
面に配られ、たとえば

[6] Yu. I. Manin "Lectures on zeta functions and
motives (according to Deninger and Kurokawa)"
Astérisque 228 (1995) 121-163.

は[5]に基づいて解説しています。また、

[7] M. Jimbo and T. Miwa "Quantum KZ equation
with $|q|=1$ and correlation functions of the XXZ
model in the gapless regime" J. Phys. A 29 (1996)
2923-2958.

のように[4]等を利用した論文も出て行きました。
さらに、

[8] 神保道夫『複素関数入門』岩波書店.

には 多重三角関数が筆者の論文に基づいて演習問題として使用されるまでになつて行きました。

ただし、申し訳ないことながら、日本語以外の論文として発表することは、その後年月を経えし、多重三角関数については

[9] N. Kurokawa and S. Koyama "Multiple sine functions" *Forum Math.* 15 (2003) 839-876.

[10] S. Koyama and N. Kurokawa "Kummer's formula for multiple gamma functions" *J. Ramanujan Math. Soc.* 18 (2003) 87-107.

[11] N. Kurokawa, H. Ochiai and M. Wakayama "Multiple trigonometry and zeta functions" *J. Ramanujan Math. Soc.* 17 (2002) 101-113.

[12] N. Kurokawa, Eva-Marie Müller-Stüler, H. Ochiai and M. Wakayama "Kronecker's Jugendtraum and ring sine functions" *J. Ramanujan Math. Soc.* 17 (2002) 211-220.

[13] S. Koyama and N. Kurokawa "Zeta functions and normalized multiple sine functions" *Kodai Math. J.* 28 (2005) 534-550.

多重ゼータ関数 (糸色対テンソル積) については

[14] S. Koyama and N. Kurokawa "Multiple zeta functions:

the double sine function and the signed double Poisson summation formula" *Compositio Math.* 140 (2004) 1176-1190.

[15] S. Koyama and N. Kurokawa "Multiple Euler products" *Proc. St. Petersburg Math. Soc.* 11 (2005) 123-166 [in Russian].

[16] N. Kurokawa and M. Wakayama "Absolute tensor products" *Intern. Math. Res. Notices* 2004-5 (2004) 249-260.

などからなりました。このうち [9] は講義録 [5] の一部を英訳したものであり、ロシア語論文 [15] は [3] の話を広げたものです。(後者は AMS から英訳出版予定。)

今回は、1990 年頃の数理論講究録からすると 15 年振りの多重三角関数と多重ゼータ関数についての解説であり、その後の進展や問題について簡単に触れたいと思います。詳細は文献を参照してください。

この機会を与えて下さった研究集会主催者の桂田昌紀氏に深く感謝いたします。

① 素朴な多重三角関数 (Primitive multiple sine functions)

素朴な多重三角関数 $\mathcal{S}_r(x)$ は $r=1, 2, 3, \dots$ に対して次のように定義される:

$$\delta_1(x) = 2 \sin(\pi x) = 2\pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right),$$

$r \geq 2$ のとき

$$\delta_r(x) = e^{\frac{x^{r-1}}{r-1}} \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} P_r\left(\frac{x}{n}\right)^{r-1}.$$

ただし,

$$P_r(u) = (1-u) \exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^r}{r}\right).$$

たとえば

$$\delta_2(x) = e^x \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1 - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \right)^n e^{2x} \right\},$$

$$\delta_3(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)^{n^2} e^{x^2} \right\}$$

である。このうち、二重三角関数 $\delta_2(x)$ は ヘルダー

[17] O. Hölder "Ueber eine transcendente Function"

Göttingen Nachrichten 1886 Nr. 16 (1886) 514-522.

が研究した。これが 多重三角関数の起源である。

三重三角関数 $\delta_3(x)$ 以降は 黒川 [1] に初登場

した。 $\delta_r(x)$ ($r \geq 2$ とする) についての話の要約は [1],

詳しい証明は [9] を見ていただくことにし、主な性質を
列挙するにとどめたい。

1) 積分表示

$$\delta_r(x) = \exp\left(\int_0^x \pi t^{r-1} \cot(\pi t) dt\right)$$

をもつ。ここで積分路は $\mathbb{C} - \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$ 内にとる。

2) 微分方程式

$$\frac{\delta_r'(x)}{\delta_r(x)} = \pi x^{r-1} \cot(\pi x)$$

を試みず。したがって, $\delta_r(x)$ は 2 階の代数的微分方程式を試みず。

3) $\delta_r(x) = \exp(\text{poly-log})$ 型の表示をもつ。

たとえば, $\text{Im}(x) > 0$ に対しては

$$\delta_r(x) = \exp \left(-\frac{(r-1)!}{(-2\pi i)^{r-1}} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-2\pi i x)^k}{k!} \text{Li}_{r-k}(e^{2\pi i x}) \right. \\ \left. - \frac{\pi i}{r} x^r + \frac{(r-1)!}{(-2\pi i)^{r-1}} \zeta(r) \right).$$

ここで, $\text{Li}_r(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n^r}$

は多重対数 (poly-log)。

4) $x \rightarrow x+1$ に対する周期性をもつ。

5) 特殊値の表示をもつ (とくに $x \in \mathbb{Q}$ に対して)。

ここには, ゼータ関数や L-関数の難しい値 ("algebraic" にゆかれないとこ) との関係が現れる。たとえば

$$\delta_3\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\right).$$

これは $\zeta(3) = \frac{8\pi^2}{7} \log\left(\delta_3\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} 2^{\frac{1}{4}}\right)$

という表示に他ならない。また, $\delta_2\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$

となるが、こちらは 1) と

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \pi t \cot(\pi t) dt = - \int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin(\pi t) dt$$

とからわかるように、オイラーの有名な定積分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin(\pi t) dt = -\frac{1}{2} \log 2$$

と同一値である。

6) 自然数 N に対して N 倍角の公式がある。

② 正規多重三角関数 (Normalized multiple sine functions)

素朴な多重三角関数は親しみやすいものであるが、精密な性質を研究するためには正規化した多重三角関数を用いるのが便利である。いま、 $\omega_1, \dots, \omega_r > 0$ に対して (ただし、複素数へと拡張するのは簡単である)、正規多重三角を

$$S_r(x, (\omega_1, \dots, \omega_r)) = \prod_{n_1, \dots, n_r \geq 0} (n_1 \omega_1 + \dots + n_r \omega_r + x) \left(\prod_{m_1, \dots, m_r \geq 1} (m_1 \omega_1 + \dots + m_r \omega_r - x) \right)^{(-1)^{r-1}}$$

と定義する。ここで、正規積記号 $\prod$ は デニンガー

[18] Ch. Deninger "Local L-factors of motives and regularized determinants" Inv. Math. 107 (1992) 135-150.

によるものであり、

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \exp \left(- \frac{d}{ds} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s} \right) \Big|_{s=0} \right)$$

と定義される。ただし, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s}$ は $s=0$ を含む領域に
解析接続されているものとする。 $r=1$ のときは

$$S_1(x, \omega) = 2 \sin \left(\frac{\pi x}{\omega} \right)$$

と通常の三角関数になっている。また, $r=2$ のときは
新谷卓郎が実2次体のクロネッカー-青春の夢を
研究する論文

[19] T. Shintani "On a Kronecker limit formula
for real quadratic fields" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.
Sect. IA Math. 24 (1977) 167-199.

においてはじめに使われた。新谷は $\varepsilon = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ のとき
に, $S_2(x, (1, \varepsilon))$ の3分値の乗積の値

$$S_2\left(\frac{1}{3}, (1, \varepsilon)\right) S_2\left(1+\frac{\varepsilon}{3}, (1, \varepsilon)\right) S_2\left(\frac{2+\varepsilon}{3}, (1, \varepsilon)\right) = \sqrt{\frac{\frac{1+\sqrt{21}}{2} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}}{2}}$$

を求め, 実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$ の類体の構成問題への確実な
手がかりを与えた。新谷の研究については 解説

[20] 黒川信重 「新谷卓郎の二重三角関数」『数学のたの
しみ』2005年冬号(2005年1月), 76-89.

を参照されたい。

$r \geq 3$ に對する $S_r(x, (\omega_1, \dots, \omega_r))$ は 黒川 [2] に
 載る。多重ガンマ関数は “バーンス”

[21] E. W. Barnes "On the theory of the multiple
 gamma function" Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904)
 374-425.

による 多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x, (\omega_1, \dots, \omega_r))$ を 2 個
 $S_r(x, (\omega_1, \dots, \omega_r)) = \Gamma_r(x, (\omega_1, \dots, \omega_r))^{-1} \Gamma_r(\omega_1 + \dots + \omega_r - x, (\omega_1, \dots, \omega_r))^{(r)}$

のように 組み合わせたものがある。こゝで

$$\Gamma_r(x, (\omega_1, \dots, \omega_r)) = \left(\prod_{n_1, \dots, n_r \geq 0} (n_1 \omega_1 + \dots + n_r \omega_r + x) \right)^{-1}.$$

この関係式は, $r=1$ のときは

$$S_1(x, \omega) = \Gamma_1(x, \omega)^{-1} \Gamma_1(\omega - x, \omega)^{-1}$$

となるが, これは レルヒ (Lerch) の公式

$$\Gamma_1(x, \omega) = \frac{\Gamma(\frac{x}{\omega})}{\sqrt{2\pi}} \omega^{\frac{x}{\omega} - \frac{1}{2}}$$

により

$$2 \sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{x}{\omega}) \Gamma(1 - \frac{x}{\omega})}$$

と書き換へれば, 通常 of "reflection formula"

$$\sin(\pi x) = \frac{\pi}{\Gamma(x) \Gamma(1-x)}$$

と同値であることがわかる。多重ガンマ関数が “超越的”

であるのに対して, 単純な構成であるが 多重三角関数は "代数的" であることが 特長である. $S_r(x, (\omega_1, \dots, \omega_r))$ の性質の主な点は次の通りである.

1) 周期性をもつ:

$$S_r(x + \omega_i, (\omega_1, \dots, \omega_r)) = S_r(x, (\omega_1, \dots, \omega_r)) S_{r-1}(x, (\omega_1, \dots, \overset{i}{\omega_r}))^{-1}.$$

ただし, $\overset{i}{\omega_r}$ は ω_i を除くことを意味する. また, $r=1$

のときは必要になるので $S_0(x, \phi) = -1$ と定義する.

($\Gamma(x, \phi) = x^{-1}$ とすると良い.)

2) N 倍角の公式をもつ:

$$S_r(Nx, (\omega_1, \dots, \omega_r)) = \prod_{k_1, \dots, k_r=0, \dots, N-1} S_r\left(x + \frac{k_1\omega_1 + \dots + k_r\omega_r}{N}, (\omega_1, \dots, \omega_r)\right).$$

3) N 分値の積公式をもつ:

$$\prod_{\substack{k_1, \dots, k_r=0, \dots, N-1 \\ (k_1, \dots, k_r) \neq (0, \dots, 0)}} S_r\left(\frac{k_1\omega_1 + \dots + k_r\omega_r}{N}, (\omega_1, \dots, \omega_r)\right) = N.$$

4) 斉次性をもつ:

$$S_r(cx, (c\omega_1, \dots, c\omega_r)) = S_r(x, (\omega_1, \dots, \omega_r)).$$

5) $(\omega_1, \dots, \omega_r) \in \mathbb{Q}^r$ のとき, $S_r(x)$ との関係を持ち

(これは $S_r(x)$ と $S_r(x, (1, \dots, 1))$ の関係が基本的),

代数的微分方程式をみたす. これによって, セルバーグゼータ関数の関数方程式に現れるガンマ因子が多重ガンマ

関数によって明確に表示される。

6) 特殊値がゼータ関数や L-関数の特殊値との関係をもつ。たとえば、

$$S_3\left(\frac{3}{2}, (1,1,1)\right) = 2^{-\frac{1}{8}} \exp\left(-\frac{3\zeta(3)}{16\pi^2}\right)$$

すなわち

$$\zeta(3) = \frac{16\pi^2}{3} \log\left(S_3\left(\frac{3}{2}, (1,1,1)\right) 2^{-\frac{1}{8}}\right).$$

また、

$$S_2\left(\frac{\omega_i}{2}, (\omega_1, \omega_2)\right) = \sqrt{2},$$

$$S_2(\omega_1, (\omega_1, \omega_2)) = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}},$$

$$S_2(\omega_2, (\omega_1, \omega_2)) = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}$$

のように簡明な表示を持つ場合がある。

7) $S_r(x, (\omega_1, \dots, \omega_r))$ に対する“オイラー積(因子)表示”(あるいは“フーリエ級数表示”)がある。[これは [1] の 3) にあたるものであるが、よりデリケートなものとなる。]

これらの性質の証明については既に挙げた文献 [9] 等を参照していただきたい。また 7) については後の [3] と本講究録所収の赤塚氏の報告を見られたい。さらに、多重三角関数の高階微分、グラフの挙動、オイラーの定積分との関係、マラー測度との関係等については次を見られたい：

- [22] N. Kurokawa "Derivatives of multiple sine functions" Proc. Japan Acad. 80A (2004) 65-69.
- [23] N. Kurokawa and M. Wakayama "Extremal values of double and triple trigonometric functions" Kyushu J. Math. 58 (2004) 141-166.
- [24] S. Koyama and N. Kurokawa "Certain series related to the triple sine function" J. Ramanujan Math. Soc. 19 (2004) 161-166.
- [25] S. Koyama and N. Kurokawa "Euler's integrals and multiple sine functions" Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005) 1257-1265.
- [26] N. Kurokawa and M. Wakayama "Zeta regularized product expressions for multiple trigonometric functions" Tokyo J. Math. 27 (2004) 459-480.
- [27] N. Kurokawa and M. Wakayama "Zeta regularizations" Acta Applicandae Math. 81 (2004) 147-166.
- [28] N. Kurokawa and M. Wakayama "Differential algebraicity of multiple sine functions" Lett. Math. Phys. 71 (2005) 75-82.
- [29] N. Kurokawa and M. Wakayama "Generalized zeta regularizations, quantum class number formula, and Appell's

- 0-functions" The Ramanujan J. 10 (2005) 291-303.
- [30] N. Kurokawa and M. Wakayama "Regularizations and finite ladders in multiple trigonometry"
J. Math. Soc. Japan 57 (2005) 1197-1216.
- [31] N. Kurokawa "A q -Mahler measure"
Proc. Japan Acad. 80 A (2004) 70-73.
- [32] N. Kurokawa and H. Ochiai "Mahler measures via the crepantization" Commentari. Math. St. Pauli 54 (2005) 121-137.
- [33] N. Kurokawa and M. Wakayama "Gamma functions and sine functions for Lie groups and period integrals" Indag. Math. 16 (2005) 585-607.
- [34] N. Kurokawa and M. Wakayama "A q -logarithmic analogue of Euler's logarithmic sine integral"
Rendiconti. Sem. Mat. Univ. Padova 114 (2005) 51-62.
- [35] N. Kurokawa "Shintani's prehomogeneous zeta functions and multiple sine functions" Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 54 (2005) 303-311.
- [3] 絶対テンソル積・多重ゼータ関数 (Absolute tensor prod.)

絶対テンソル積・多重ゼータ関数は, いくつかのゼータ関数

$$Z_j(s) = \prod_{p \in \mathbb{C}} (p-s)^{m_j(p)}$$

から

$$Z_1(s) \otimes \cdots \otimes Z_r(s) = \prod_{(p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{C}^r} (p_1 + \cdots + p_r - s)^{m(p_1, \dots, p_r)},$$

$$m(p_1, \dots, p_r) = m_1(p_1) \cdots m_r(p_r) \times \begin{cases} 1 & \dots \operatorname{Im}(p_1), \dots, \operatorname{Im}(p_r) \geq 0 \\ (-1)^{r-1} & \dots \operatorname{Im}(p_1), \dots, \operatorname{Im}(p_r) < 0 \\ 0 & \dots \text{その他} \end{cases}$$

と定義したものである。1はじまりは黒川[3]。これは、通常の双曲三角関数

$$Z_j(s) = \sinh\left(\frac{\pi s}{\omega_j}\right) \cong 1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega_j}}$$

のときに用いたのは 多重(双曲)三角関数

$$Z_1(s) \otimes \cdots \otimes Z_r(s) \cong S_r(r-1, s, (\omega_1, \dots, \omega_r))$$

を与えることから、①②で述べた多重三角関数論を含む理論となる。

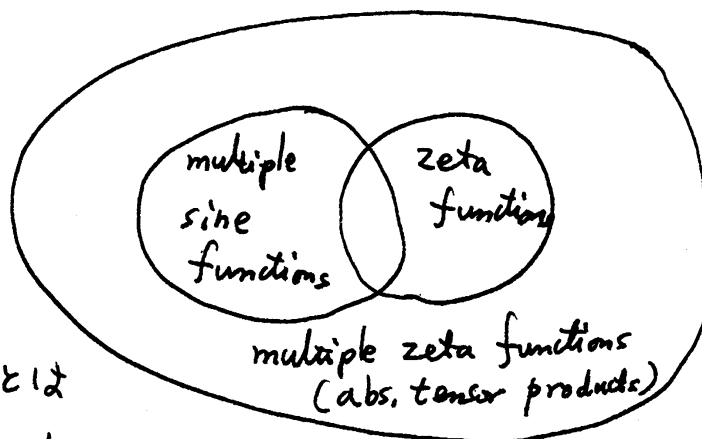
とくに、有限体 $\mathbb{F}_p$

のハッセゼータ関数

$$\zeta(s, \mathbb{F}_p) = (1 - p^{-s})^{-1}$$

の場合に絶対テンソル

積(ATP)を構成することは



多重三角関数論を別の観点から見ていることになり、

$\zeta(s, \mathbb{F}_{p_1}) \otimes \cdots \otimes \zeta(s, \mathbb{F}_{p_r})$ に代する "オイラー積(因子)表示"

は (2) の 7) として挙げた項にあたる。詳しくは [14] [15] 等を見たいから、簡明な結果を一つだけ書いておく。

定理 p, q を相異なる素数とするとき, $\operatorname{Re}(s) > 0$ に対して

$$\zeta_{p,q}(s) = \exp \left(-\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n \frac{\log p}{\log q})}{n} p^{-ns} - \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n \frac{\log q}{\log p})}{n} q^{-ns} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-ns} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} q^{-ns} \right)$$

とあわせて次が成り立つ。

- 1) $\operatorname{Re}(s) > 0$ で絶対収束する。
- 2) 全ての $s \in \mathbb{C}$ に有理型関数 (位数 2) として解析接続できる。

- 3) 零点を $s \in \frac{2\pi i}{\log p} \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{2\pi i}{\log q} \mathbb{Z}_{\geq 0}$,
極を $s \in \frac{2\pi i}{\log p} \mathbb{Z}_{< 0} + \frac{2\pi i}{\log q} \mathbb{Z}_{< 0}$.

にあわせても、全ての s に対して、 $\zeta_{p,q}(s)$ は $\zeta(s, \mathbb{F}_p) \otimes \zeta(s, \mathbb{F}_q)$ と $e^{Q(s)}$ ($Q(s)$ は高々 2 次の多項式) を除いた一致する。

4) 関数等式

$$\zeta_{p,q}(-s) = \zeta_{p,q}(s)^{-1} (pq)^{\frac{s}{2}} (1-p^{-s})(1-q^{-s}) \times \exp \left(\frac{i \log p \log q}{4\pi} s^2 - \frac{\pi i}{6} \left(\frac{\log q}{\log p} + \frac{\log p}{\log q} + 3 \right) \right)$$

をみたす。

これは $\zeta_p(s) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-ns} \right)$ のときと比較すると
わかりやすいであろう: 1) $\zeta_p(s)$ は $\operatorname{Re}(s) > 0$ で絶対収束,
2) 全ての $s \in \mathbb{C}$ に有理型関数 (位数 1) として解析接続できる,

3) 零点はなく, 極は $s \in \frac{2\pi i}{\log p} \mathbb{Z}$ にあり $s \neq 1$ 位,
 さらに $\zeta_p(s) = \zeta(s, \mathbb{F}_p)$, 4) 関数方程式 $\zeta_p(-s) =$
 $\zeta_p(s)(-p^s)$ ももつ。もちろん, $\zeta_p(s)$ のときには表示
 $\zeta_p(s) = (1-p^s)^{-1}$ があるの2' 簡単であるが, $\zeta_{p,q}(s)$ の
 場合は事情が異なり簡単ではない。本講究全集の
 赤土塚報告は $\zeta(s, \mathbb{F}_{p_1}) \otimes \dots \otimes \zeta(s, \mathbb{F}_{p_r})$ を詳しく
 扱っているの2' 参照されたい。さらに, 二重リーマン
 センタ関数 $\zeta(s) \otimes \zeta(s)$ の二重オイラー積表示は
 [15] を見ていただきたい。絶対テンソル積については
 次も参照されたい:

[36] N. Kurokawa "Values of absolute tensor products"
 Proc. Japan Acad. 81A (2005) 185-190.

[37] M. Hirano, N. Kurokawa and M. Wakayama "Half zeta
 functions" J. Ramanujan Math. Soc. 18 (2003) 195-209.

[38] N. Kurokawa and M. Wakayama "Analyticity of
 polylogarithmic Euler products" Rendiconti del Circolo
 Matematico di Palermo 52 (2003) 382-388.

[39] N. Kurokawa "Zeta functions over $\mathbb{F}_1$ "
 Proc. Japan Acad. 81A (2005) 180-184.

なお, 数学における最近の慣例により 以上の文献
 は (印刷中や投稿中等のプレプリントは省略し) 出版済の
 もののみ挙げた。

④ 未来への問題 (Problems)

系数が規定をオーバーしてきたため、二つだけあげよう。

1) 多重三角関数の加法公式 (Addition relations)

$$S_r(x+y, \omega) = S_r(x, \omega) + S_r(y, \omega) + c_{11}(\omega) S_r(x, \omega) S_r(y, \omega) + \sum_{\substack{i,j \geq 1 \\ i+j \geq 2}} c_{ij}(\omega) S_r(x, \omega)^i S_r(y, \omega)^j$$

が 0 の近傍の x, y に対して成り立つ。つまり、

$$F(X, Y) = X + Y + c_{11}(\omega) XY + \sum_{\substack{i,j \geq 1 \\ i+j \geq 2}} c_{ij}(\omega) X^i Y^j$$

(よって $F(X, 0) = X, F(0, Y) = Y, F(F(X, Y), Z) = F(X, F(Y, Z))$)
と置く

$$S_r(x+y, \omega) = F(S_r(x, \omega), S_r(y, \omega))$$

となる。たとえば、 $r=1$ のとき $F(X, Y) = X \sqrt{1 - \frac{Y^2}{4}} + Y \sqrt{1 - \frac{X^2}{4}}$

である。一般的に系数 $c_{ij}(\omega)$ は

$$c_{11}(\omega) = \frac{S_r''(0, \omega)}{S_r'(0, \omega)^2}, \quad c_{12}(\omega) = c_{21}(\omega) = \frac{S_r'''(0, \omega) S_r'(0, \omega) - S_r''(0, \omega)^2}{2 S_r'(0, \omega)^4}$$

のように書くことができる。これらの系数を研究することによ
り、Stirling modular functions (SMF) の性質が一層良く見え
てくるであろう。これは通常の modular functions や
modular forms への応用を持つ。慣例を破り、
この方面のまだ出版されていない論文を一つだけあげて
おこう：

[40] N. Kurokawa "Cuspidal values of the principal Eisenstein series of weight 1 (I): an application of the double sine

function and the Stirling modular function" preprint.

2) 多重ゼータ関数からの零点情報 (Zeta zeros)

$\zeta(s) \otimes \zeta(s)$ の本質的零点が $\operatorname{Re}(s) > \frac{3}{2}$ にないことが
二重オイラー積表示から得られたとしよう。すると, $\zeta(s)$
は $\operatorname{Re}(s) > \frac{3}{4}$ に零点を持たないことがわかる。

さらに $\zeta(s)^{\otimes r}$ の本質的零点が $\operatorname{Re}(s) > \frac{r+1}{2}$
にないことが r 重オイラー積表示から得られたとすると,
 $\zeta(s)$ は $\operatorname{Re}(s) > \frac{r+1}{2r}$ に零点を持たないことが
わかる。したがって, $r \rightarrow \infty$ とすることにより $\zeta(s)$ は
 $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ に零点を持たないことがわかり, リーマン
予想が示されることになる。この意味で絶対テンソル
積の計算は極めて深い問題を豊富に持
ている。これは, $\zeta(s, \mathbb{F}_p) \otimes \zeta(s, \mathbb{F}_q)$ の場合にも同様な形で
現れているが, たとえば, テイオファンテン型の問題,
とくに, バイカーによる abc 予想型の問題と関連
している。
(A. Baker) (abc Conjecture)

多重三角関数や絶対テンソル積 (多重ゼータ関数) の研究
は日々進歩している。この新分野への読者の参加を
待ちたい。

