

クノイド波に関する研究(第1報)

—波形こう配および波形について—

岩 垣 雄 一

STUDIES ON CNOIDAL WAVES (FIRST REPORT)

—ON THE WAVE STEEPNESS AND PROFILE—

by Dr. Eng. Yuichi IWAGAKI

Synopsis

The cnoidal waves, which were discovered by Korteweg and de Vries in 1895, are not familiar for engineers in spite of a long history because of mathematical treatments including the Jacobian elliptic function and the complete elliptic integrals of the first and second kinds. Since, however, it is noticed that the theory of Stokes waves is not appropriate to periodic waves progressing in shallow water whose depth is less than about one-tenth the wave length, but the theory of cnoidal waves should be applied to those waves, it is necessary to modify the theoretical results of cnoidal waves and provide the graphs to find easily the wave characteristics.

This paper presents, as the first report, the graphs and the method to compute the wave profile from given wave steepness and the water depth to wave height ratio based on the cnoidal wave theory developed by Laitone in 1960 and, in addition, compares the first and second approximations of his solution, Stokes waves of the third order approximation and the solitary wave.

1. まえがき

1895年に Korteweg-de Vries¹⁾ によって発見されたクノイド波は、その歴史がかなり古いにもかかわらず、数学的取扱いに Jacobi のだ円関数や第1種および第2種の完全だ円積分を含むために、われわれ技術者にとってはあまりなじみ深いものではない。しかし、いま水深を h 、波長を L 、平均静水面上波の峯までの距離を η_0 とすれば、Stokes の波の理論が適用できるのは、Keulegan²⁾ によれば $h/L \geq 1/10$ 、Laitone³⁾ によると $h/L \geq 1/8$ 、Wilson-Webb-Hendrickson⁴⁾ によれば $h/L > (\eta_0/L)^{1/3}$ の場合であって、水深がこれより浅いところでは Stokes の波の理論は適用できず、クノイド波の理論を用いなければならないといわれている。**Fig. 1** の太線は、横軸に周期 T 、縦軸に水深 h をとって、Keulegan の適用限界 $h/L = 0.1$ を示したもので、この線より上の部分は Stokes の波の理論が適用できることになる。また図中の細い線は、各波形こう配ごとに、砕波指標 (Breaker index) を用いて、砕波水深と周期との関係を示したもので、例えば、周期が 10 sec、波形こう配が 0.01 の波を考えれば、沖の方から水深が約 9 m までは Stokes の波の理論が使えるが、水深 9 m の地点から砕波水深約 3 m の地点までは Stokes の波ではなくクノイド波の理論を用いなければならないことがわかる。

したがって、クノイド波の理論の結果をできるかぎり使い易いように変形し、また図表などを用いて容易

に波の特性を求めることができるようにする必要がある。

Wiegel⁵⁾はこの目的のため、波高、水深、波長あるいは周期を与えて、クノイド波の波形および波速を求めるグラフを作っているが、理論結果として Keller⁶⁾、Keulegan-Patterson⁷⁾ および Korteweg-de Vries¹⁾ のものを用いたため、後述の第1近似(波長についてはもう一つ order が低い)にもとづいて計算したことになり、また平均水深と波の谷からの水深とが混同しているという欠点がある。

クノイド波の存在については Littman⁸⁾ が証明し、また波状跳水などの開水路に発生するクノイド波については、Serre⁹⁾、岩佐¹⁰⁾ ¹¹⁾、Benjamin-Lighthill¹²⁾、Sandover-Taylor¹³⁾ らが取扱っている。クノイド波の第2近似解を初めて示したのは、Laitone¹⁴⁾ であって、その後 Chappellear¹⁵⁾ は Laitone が行なったのと同様な摂動法を用いて第3近似(数学的には第5次近似)を求めている。

Laitone が水深として波の谷からの値を採用しているのに対して、Chappellear は平均水深をとっているので、工学的に利用する点からは後者の方が都合がよいが、一般的なグラフを作成するのに Chappellear のものは計算が非常に面倒である。したがって、この論文では、Laitone の理論解を採用し、第1報として、波形こう配と水深・波高比とを与えて波形を求める図表を作成するとともに、波の第1近似解と第2近似解、さらに Stokes の波 および孤立波のそれぞれの波形を比較して、近似の程度を検討したい。

2. Laitone によるクノイド波の理論解

いま Fig. 2 に示すように、 h_t を波の谷からの水深、 η を波の谷から水面までの距離、 δ を谷から平均水面までの距離、波高を H 、波長を L とし、 x 軸は波の谷を通過して水平方向、 z 軸は鉛直上方にとる。また、 u および w をそれぞれ x および z 方向の速度成分、 p を圧力、 ρ を密度、 g を重力加速度とし、流れを加えて定常化した二次元の波を考える。この場合の Euler の連続式、運動方程式、非回転運動の条件、水面での圧力条件、水面条件、および水底条件は、それぞれ次式によってあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

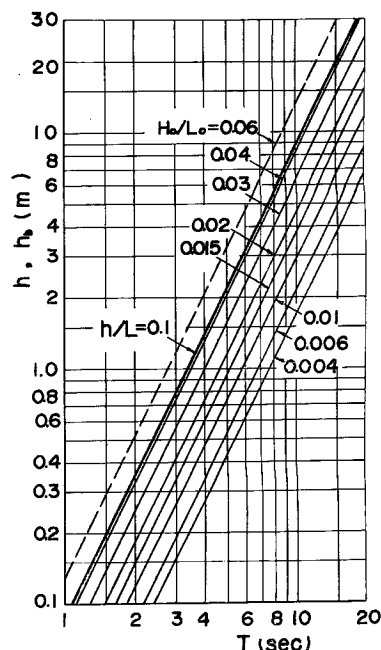


Fig. 1 Water depth corresponding to $h/L=0.1$ and breaking depth of water.

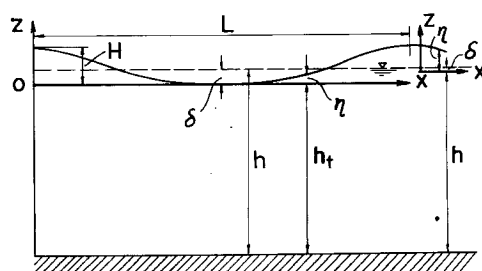


Fig. 2 Definition sketch of wave profile (right: for Stokes wave).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \Delta p(x, \eta) &= p(x, \eta) - p_{atmos.} = 0, \\ w(x, \eta) &= u(x, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad w(x, -h_t) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Laitone は $d \ll l$ であるような基準長 d および l を導入し、これらを用いて x, z, u, w, h_t, η および p を次のように無次元化した。

$$\left. \begin{aligned} X &= x/l, \quad Z = z/d, \\ U &= u/\sqrt{gd}, \quad W = (w/\sqrt{gd})(d/l), \\ H_t &= h_t/d, \quad N = \eta/d, \quad P = \Delta p/\rho gd. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

さらに

$$\sigma = (d/l)^2 \ll 1 \quad (3)$$

とき、(2)式の無次元量を用いて(1)式を書き直すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0, \\ \sigma \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial X} \right) + W \frac{\partial U}{\partial Z} &= 0, \\ \sigma \left(U \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial Z} + 1 \right) + W \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Z}, \quad P(X, N) &= 0, \\ W(X, N) = \sigma U(X, N) \frac{\partial N}{\partial X}, \quad W(X, -H_t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Friedrichs¹⁶⁾ にしたがって、 U, W および P は (3) 式に示す微小量 σ を用いて、次の形で級数に展開できるものとした。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} -H \leq Z \leq N(X) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sigma^r N_r(X) \\ \text{対して,} \\ F(X, Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n F_n(X, Z). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

一方、水底条件は $Z = -H_t$ において求めることができるが、水面条件は N が未知量であるから、 $Z = N(X)$ において U, W および P を直接求めることができない。そこで、水面における U, W および P , すなわち $U(X, N), W(X, N)$ および $P(X, N)$ を次のように Taylor 級数に展開してあらわす形をとった。

$$\left. \begin{aligned} F(X, N) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n F_n(X, N) \\ -\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N-N_0)^m}{m!} \left[\frac{\partial^m F_n(X, Z)}{\partial Z^m} \right]_{Z=N_0} \\ \text{ただし, } N-N_0 &= \sum_{r=1}^{\infty} \sigma^r N_r(X). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Laitone は(5)および(6)式を(4)式に代入し、0次の項、1次の項、2次の項というように、それぞれの

order の解を順次求めて行き、結局次のようなクノイド波の第1近似解および第2近似解をえた。以下 suffix 1 および 2 はそれぞれ第1および第2近似解を示す。

(1) 波 形

$$\frac{\eta_1}{h_t} = \frac{H}{h_t} \operatorname{cn}^2\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right), \quad (7)$$

$$\frac{\eta_2}{h_t} = \frac{H}{h_t} \operatorname{cn}^2\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right) - \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \operatorname{cn}^2\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right) \left\{1 - \operatorname{cn}^2\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right)\right\}, \quad (8)$$

(2) 波 長

$$\frac{L_1}{h_t} = \frac{4k\mathbf{K}}{(3H/h_t)^{1/2}} \left\{1 + \frac{3}{2} \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) \frac{H}{h_t}\right\}, \quad (9)$$

$$\frac{L_2}{h_t} = \frac{4k\mathbf{K}}{(3H/h_t)^{1/2}} \left\{1 - \left(\frac{7k^2-2}{8k^2}\right) \frac{H}{h_t}\right\}^{-1}. \quad (10)$$

(3) 流 速

$$\frac{u_1}{\sqrt{gh_t}} = 1 + \left(\frac{2k^2-1}{2k^2}\right) \frac{H}{h_t} - \frac{\eta_1}{h_t}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{\sqrt{gh_t}} = & 1 + \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right) \frac{H}{h_t} - \left(\frac{21k^4-6k^2-9}{40k^4}\right) \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \\ & - \frac{\eta_1}{h_t} \left\{1 - \frac{H}{h_t} \left(\frac{7k^2-2}{4k^2}\right) - \frac{3}{2} \frac{H}{h_t} \left(2 - \frac{1}{k^2}\right) \left(2 \frac{z}{h_t} + \frac{z^2}{h_t^2}\right)\right\} \\ & - \left(\frac{\eta_1}{h_t}\right)^2 \left\{\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left(2 \frac{z}{h_t} + \frac{z^2}{h_t^2}\right)\right\} + \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \left(\frac{1}{k^2} - 1\right) \left(2 \frac{z}{h_t} + \frac{z^2}{h_t^2}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{w_1}{\sqrt{gh_t}} = -\left(1 + \frac{z}{h_t}\right) \left\{\frac{3}{k^2} \left(\frac{H}{h_t}\right)^3\right\}^{1/2} \operatorname{cn}\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right) \operatorname{sn}\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right) \operatorname{dn}\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_2}{\sqrt{gh_t}} = & -\left[\left(1 + \frac{z}{h_t}\right) \left\{\frac{3}{k^2} \left(\frac{H}{h_t}\right)^3\right\}^{1/2} \operatorname{cn}\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right) \operatorname{sn}\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right) \operatorname{dn}\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right)\right] \\ & \times \left\{1 - \frac{H}{h_t} \left(\frac{5k^2+2}{8k^2}\right) - \frac{H}{h_t} \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right) \left(2 \frac{z}{h_t} + \frac{z^2}{h_t^2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\eta_1}{h_t} \left(1 - 6 \frac{z}{h_t} - 3 \frac{z^2}{h_t^2}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

(4) 圧 力

$$\frac{\Delta p_1}{\rho gh_t} = \frac{\eta_1 - z}{h_t}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_2}{\rho gh_t} = & \frac{\eta_2 - z}{h_t} - \left(\frac{H}{h_t}\right) \frac{3}{4k^2} \left(2 \frac{z}{h_t} + \frac{z^2}{h_t^2}\right) \\ & \times \left\{1 - k^2 + 2(2k^2-1) \operatorname{cn}^2\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right) - 3k^2 \operatorname{cn}^4\left(2\mathbf{K} \frac{x}{L}, k\right)\right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

(5) 波 速

$$\frac{c_1}{\sqrt{gh_t}} = 1 + \frac{H}{h_t} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}\right), \quad (17)$$

$$\frac{c_2}{\sqrt{gh_t}} = 1 + \frac{H}{h_t} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}\right) + \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \frac{1}{k^4} \left\{\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} \left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} + \frac{3k^2}{4} - 1\right) - \left(\frac{k^4 + 14k^2 - 9}{40}\right)\right\}. \quad (18)$$

(6) 静水面の位置

$$\frac{\delta_1}{h_t} = \frac{H}{h_t} \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right), \quad (19)$$

$$\frac{\delta_2}{h_t} = \frac{H}{h_t} \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) + \left(\frac{H}{h_t} \right)^2 \frac{1}{12k^4} \left\{ 8 - 11k^2 + 3k^4 - (8 - 7k^2) \frac{E}{K} \right\}. \quad (20)$$

ここに, cn , sn および dn は Jacobi のだ円関数, k はその母数, K および E はそれぞれ第1種および第2種の完全だ円積分で k の関数である。

3. 理論解の図化

ここでは, 第1報として波形を取り扱うわけであるが, (7)および(8)式からわかるように, K あるいは k の値が与えられなければ波形を求めることはできない。 K あるいは k の値は, (9)あるいは(10)式より H/h_t および L/h_t を与えれば求めることができるが, 実用的には波の谷からの水深 h_t よりも平均水深 $h = h_t + \delta$ を用いる方が都合がよいので, (19)あるいは(20)式を用いて δ を求め, h_t にこれを加える必要がある。したがって, ここで用いる理論解は(7), (8), (9), (10), (19)および(20)式である。

まず K および E と k との関係は, $k = \sin \alpha$ とおいて, α との関係として関数表に与えられている (K は F ともあらわされる)¹⁷⁾。また k が1に近いときは, k の代りに

$$k' = \cos \alpha = (1 - k^2)^{1/2} \quad (21)$$

を使用する場合がある。Fig. 5 には K と k との関係, Fig. 6 には K と k' との関係, Fig. 3 には E および E/K と K との関係が図示されている。 k が0になった K および E の極限の値はいずれも $\pi/2$ であり, k が1になった極限値はそれぞれ ∞ および1である。これらの関係が与えられると, (19)および(20)式はそれぞれ

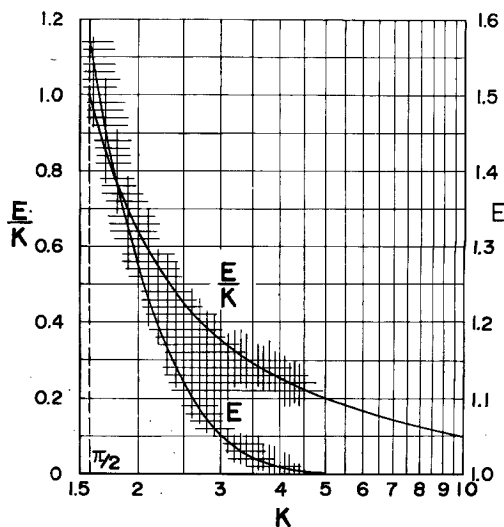
$$\frac{\delta_1}{H} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right), \quad (22)$$

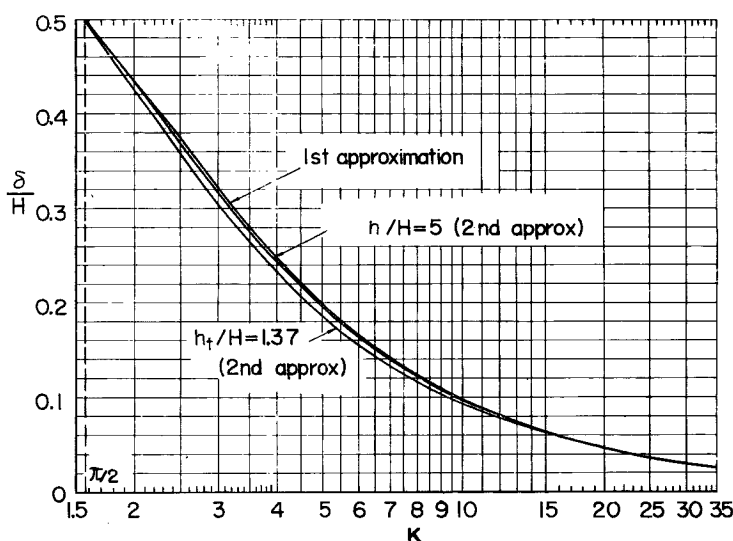
$$\frac{\delta_2}{H} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) + \left(\frac{H}{h_t} \right)^2 \frac{1}{12k^4} \times \left\{ 8 - 11k^2 + 3k^4 - (8 - 7k^2) \frac{E}{K} \right\} \quad (23)$$

と変形されるから, δ_1/H は K の値を与えると求まり, また δ_2/H は K のほかに h_t/H の値を与えると求められる。したがって, 与えた h_t/H と求められた δ_2/H との和

$(h_t + \delta)/H$ が平均水深と波高の比 h/H の形で与えた値となる。また Laitone は最高波の条件として $h_t/H = 1.37$ を得ており, これが h_t/H の極限としての最小値である。Fig. 4 は第1近似 δ_1/H , および $h/H = 5$ と $h_t/H = 1.37$ の場合の第2近似 δ_2/H を示したもので, K との関係で図示してある。この図からわかるように, 第2近似は第1近似との差は小さく, $h_t/H = 1.37$ の場合には最大約6%, $h/H = 5$ の場合には約2%程度第1近似より小さいにすぎない。

k が1に非常に近い場合には, (22)および(23)式は次のように書きかえられる。


 Fig. 3 Relationships between E , E/K and K .

Fig. 4 The first and second approximations of δ/H .

$$\frac{\delta_1}{H} \approx \frac{E}{K} \quad (24)$$

$$\frac{\delta_2}{H} \approx \frac{E}{K} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{H}{h_t} \right) \quad (25)$$

例えば, $k=0.997$ ($K=4.004$, $\alpha=85^\circ 48'$) の場合, (24) および (25) 式は (22) および (23) 式よりそれぞれ約 1.7% および 1.3% 程度大きい値を与える。したがって, この程度の誤差を許せば, $K \leq 4$ のときには, (24) および (25) 式を用いてよいことになる。

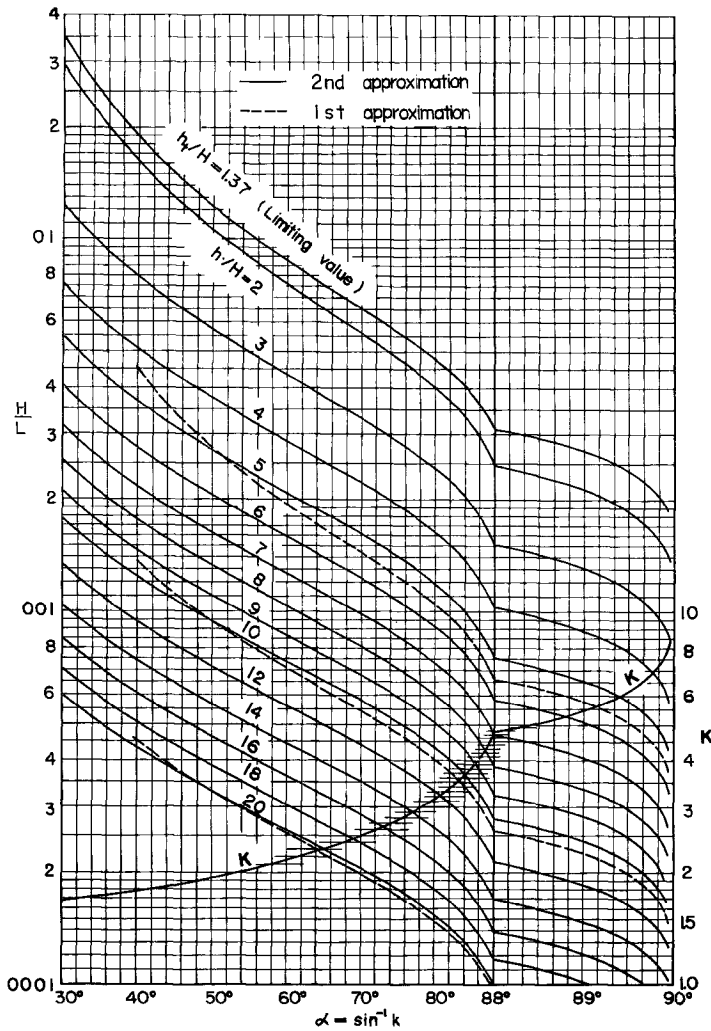
つぎに波長を与える式 (9) および (10) 式はそれぞれ次のように書きかえられる。

$$\frac{H}{L_1} = \frac{\sqrt{3}(H/h_t)^{3/2}}{4kK} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(-\frac{2k^2-1}{k^2} \right) \frac{H}{h_t} \right\}^{-1} \quad (26)$$

$$\frac{H}{L_2} = \frac{\sqrt{3}(H/h_t)^{3/2}}{4kK} \left\{ 1 - \left(\frac{7k^2-2}{8k^2} \right) \frac{H}{h_t} \right\}. \quad (27)$$

したがって, k あるいは K と h_t/H とを与えると波形こう配 H/L の値を求めることができる。なお, h_t/H は前述のように δ/H を加え, 平均水深と波高の比 h/H で与える方が実用上便利である。**Fig. 5** は H/L と $\alpha = \sin^{-1}k$ との関係, **Fig. 6** は $k \approx 1$ の場合の H/L と $k' = (1-k^2)^{1/2}$ との関係を h/H をパラメーターとして示したもので, 破線は第 1 近似の (26) 式, 実線は第 2 近似の (27) 式にもとづいて求めた関係である。これらの図から, h/H の値が大きいときには第 1 近似と第 2 近似の差は小さいが, h/H の値が小さくなると両者の差は非常に大きくなることがわかる。クノイド波が海岸工学へ利用されるのは, 恐らく h/H の値が 10 程度以下と考えられるので, 正確な値が要求される場合には第 1 近似の (26) 式は使わない方がよいであろう。**Fig. 7** は K が小さい場合の H/L と $K - (\pi/2)$ との関係, **Fig. 8** は K が大きいときの H/L と K との関係を示したもので, いずれも第 2 近似の (27) 式にもとづいている。これらの図から, H/L および h/H の値を与えて K の値を知ることができる。

なお, 第 1 近似として


 Fig. 5 Relationships between K , H/L and $\alpha = \sin^{-1}k$

$$\frac{H}{L_1} = \frac{\sqrt{3}(H/h_t)^{3/2}}{4kK} \quad (28)$$

を使用する場合があるが、これも h_t/H あるいは h/H が小さい場合にはかなりの誤差が入ることに注意する必要がある。また、とくに $k \approx 1$ の場合には、(26)および(27)式はそれぞれ次のように書きかえられる。

$$\frac{H}{L_1} = \frac{\sqrt{3}(H/h_t)^{3/2}}{4K} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{H}{h_t} \right)^{-1} \quad (29)$$

$$\frac{H}{L_2} = \frac{\sqrt{3}(H/h_t)^{3/2}}{4K} \left(1 - \frac{5}{8} \frac{H}{h_t} \right) \quad (30)$$

$k = 0.978$ ($K = 2.979$, $\alpha = 78^\circ 00'$), 0.993 ($K = 3.500$, $\alpha = 83^\circ 00'$) および 0.997 ($K = 4.004$, $\alpha = 85^\circ 48'$)

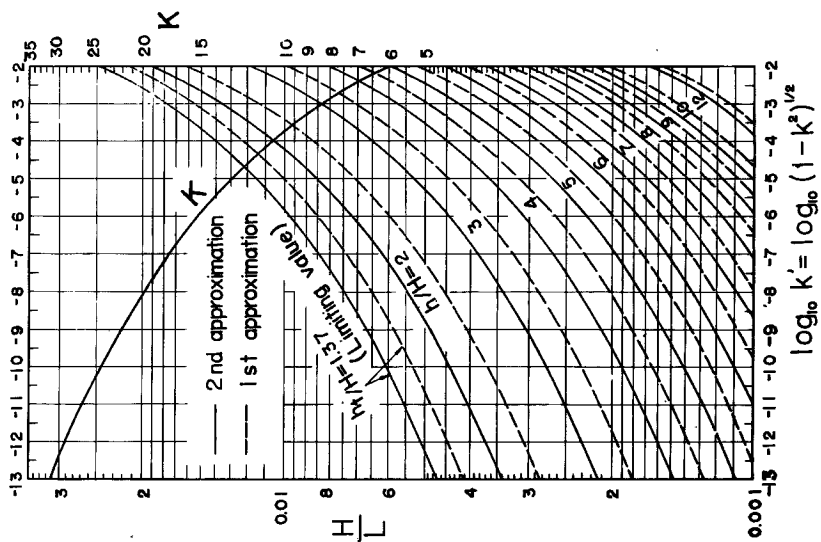


Fig. 6 Relationships between K , H/L and $k' = (1 - k^2)^{1/2}$ when k is approximately equal to 1.

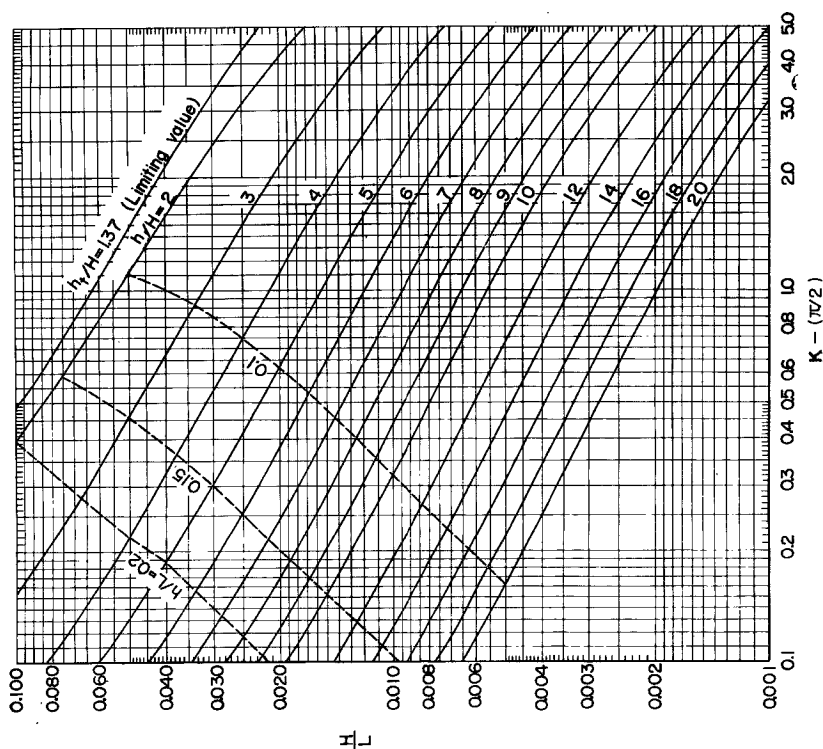


Fig. 7 The second approximation of H/L when K is small.

の場合には、(30)式は(27)式よりそれぞれ約 3.7%, 1.2% および 0.5% 程度小さい値を与える。したがって、1.2% 程度の誤差を許すとすれば、 $K \geq 3.5$ のときには(30)式を用いてよいことになる。

4. 波 形

いま

$$2Kx/L = v \quad (31)$$

において、(7)および(8)式を書き直すと、次のようになる。

$$\frac{\eta_1}{L} = -\frac{H}{L} \text{cn}^2(v, k), \quad (32)$$

$$\frac{\eta_2}{L} = -\frac{H}{L} \left[\text{cn}^2(v, k) - \frac{3}{4} \frac{H}{h_t} \text{cn}^2(v, k) \times \{1 - \text{cn}^2(v, k)\} \right], \quad (33)$$

$0.95 < k^2 \leq 1$ の場合には、

$$\text{cn}(v, k) \approx \text{sech } v - (1/4)(1 - k^2) \tanh v \text{ sech } v \\ \times (\sinh v \cosh v - v) \quad (34)$$

と近似される⁵⁾。これからわかるように、 $k=1$ の場合には、 $\text{cn}(v, k) = \text{sech } v$ となり、(32)式より第1近似の孤立波の波形が次のように与えられる。

$$\frac{\eta}{H} = \text{sech}^2 v. \quad (35)$$

ただし、この場合の v は普通(28)式と(31)式より K/L を消去して、

$$v = \frac{\sqrt{3}x}{2H} \left(\frac{H}{h_t} \right)^{3/2} \quad (36)$$

が用いられている。ここでは、 $k \approx 1$ の場合を考え、 v を(31)式のままにおいて、

$$\frac{\eta_2}{L} = -\frac{H}{L} \text{sech}^2 \left(\frac{2Kx}{L} \right) \quad (37)$$

とあらわすことにする。したがって、(32)、(34)および(37)式より、 $0.95 < k^2 \leq 1$ に対して適用されるものとして、次式がえられる。

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\text{cn}^2(v, k)}{\text{sech}^2 v} = \left\{ 1 - \frac{1}{4} (1 - k^2) (\sinh^2 v - v \tanh v) \right\}^2, \quad (38)$$

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{H} = \text{sech}^2 v \left[1 - \left\{ 1 - \frac{1}{4} (1 - k^2) (\sinh^2 v - v \tanh v) \right\}^2 \right]. \quad (39)$$

これらの関係を手助けとして、 η_1/η_2 および $(\eta_2 - \eta_1)/H$ と K との関係を、 x/L をパラメーターとして

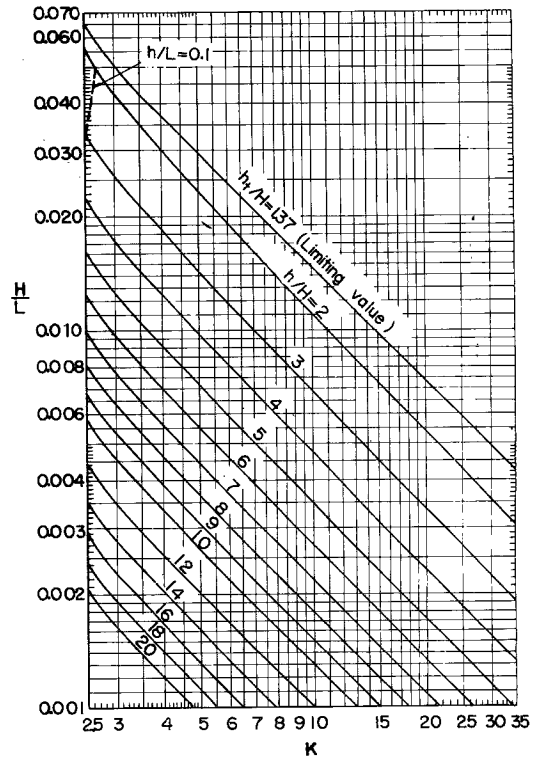


Fig. 8 The second approximation of H/L when K is large.

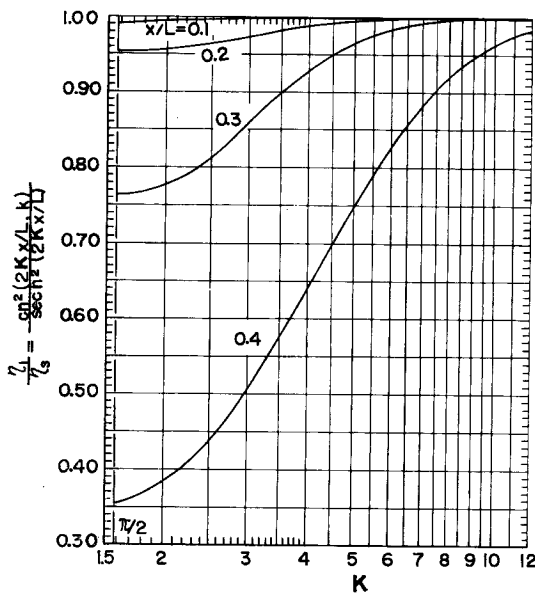


Fig. 9 Ratio of cnoidal wave profile of the first approximation to solitary wave profile.

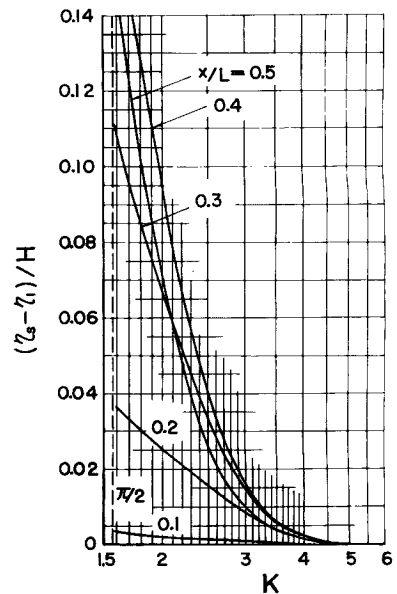


Fig. 10 Difference between solitary wave profile and cnoidal wave profile of the first approximation.

求めたものが **Fig. 9** および **10** である。第1種のだ円積分の表を用いて Jacobi の cn 関数の値を求めるのは手数を要するが、**Fig. 9** あるいは **10** を利用すれば、双曲線関数表のみで簡単に第1近似のクノイド波の波形が求められる。すなわち、 H/L および h/L の値が与えられると、**Fig. 7** あるいは **8** から K の値が求められる。したがって、 x/L の値を与えれば $v=2Kx/L$ がわかり、双曲線関数表を用いて $\text{sech}^2 v$ の値が求められる。一方、**Fig. 9** より K の値に対応する $x/L=0.1, 0.2, 0.3$ および 0.4 の場合 ($x/L=0$ のところは $\eta_1/\eta_s=1.0$, $x/L=0.5$ のところは $\eta_1/\eta_s=0$) の η_1/η_s の値を読みとり、これに $\text{sech}^2 v$ の値を掛けると、各 x/L に対応する η_1/H の値が求まる。あるいは、**Fig. 10** を用いて各 x/L に対する $(\eta_s - \eta_1)/H$ の値を求め、 $\text{sech}^2 v$ の値からこの値を差引いても求めることができる。なお **Fig. 10** より、 η_s と η_1 の差は、最大 $K=3.5$ のとき波高の約1%、 $K=3$ のとき約1.5%程度であるから、1.5%程度の誤差を許すとすれば、 $K \geq 3$ のときには、クノイド波の第1近似の波形として、(37)式を用いてよいことがわかる。

次に第1近似の波形 η_1/H から第2近似の波形 η_2/H を求める方法を説明しよう。

(32)および(33)式より $(\eta_1 - \eta_2)/H$ を求めると、次のような関係がえられる。

$$\frac{\eta_1 - \eta_2}{H} = \frac{3}{4} \frac{H}{h_t} \frac{\eta_1}{H} \left(1 - \frac{\eta_1}{H}\right). \quad (40)$$

したがって、**Fig. 4** から δ/H を求め、 $h_t/H = (h - \delta)/H$ の関係より h_t/H を計算し、(40)式より $(\eta_1 - \eta_2)/H$ を求めて、この値だけ η_1/H から差引けば η_2/H がえられることになる。なお、**Fig. 11** を利用すれば、(40)式を計算する手間が省ける。また、**Fig. 11** より、 $h_t/H \leq 9.5$ のときには、第1近似と第2近似の波形の差は、波高の約2%以下であるが、 h_t/H が9.5程度より小さくなると、両者の差はかなり大きくなるので、第2近似を用いなければならないことがわかる。

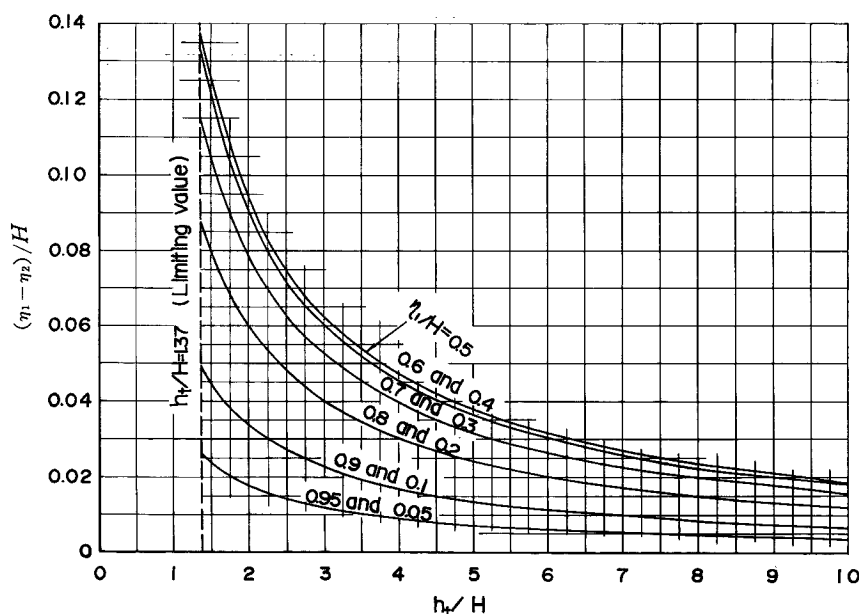


Fig. 11 Difference between cnoidal wave profiles of the first and second approximations.

さて、このようにして求められるクノイド波の波形が、Stokes 波の波形とどの程度差があるか検討してみよう。比較する Stokes 波は 3rd order のものを採用することにする。

座標軸を **Fig. 2** の右側のようにとれば、波形は次式であらわされる¹⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta - \delta}{L} &= A_1 \cos \frac{2\pi}{L} x + A_2 \cos \frac{4\pi}{L} x + A_3 \cos \frac{6\pi}{L} x, \\ A_1 &= \frac{a}{L}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{\pi a^2}{L^2} \frac{\cosh 2\pi h/L (\cosh 4\pi h/L + 2)}{(\sinh 2\pi h/L)^3}, \\ A_3 &= \frac{3}{16} \pi^2 \left(\frac{a}{L} \right)^3 \frac{8(\cosh 2\pi h/L)^6 + 1}{(\sinh 2\pi h/L)^6}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

また、波高 H と $2a$ との関係は、

$$\frac{H}{2a} = 1 + \pi^2 \left(\frac{a}{L} \right)^2 \frac{3}{16} \frac{8(\cosh 2\pi h/L)^6 + 1}{(\sinh 2\pi h/L)^6}. \quad (42)$$

静水面の座標軸からの距離 δ は、

$$\frac{\delta}{L} = \pi \left(\frac{a}{L} \right)^2 \coth \frac{2\pi h}{L}. \quad (43)$$

この Stokes 波の波形をあらわす級数の収束性については、首藤が研究し¹²⁾、**Fig. 12** に示すような限界を求めた。クノイド波と比較すべき Stokes 波として、あまり収束限界に近いところでは近似が悪くなるので、**Fig. 12** の×印の位置における三つの場合を採用し、計算にあたっては Skjelbreia¹⁸⁾ の表を用いた。計算の結果は **Fig. 13** のようであって、 $h/L = 0.1$ および 0.2 の場合には、Stokes 波とクノイド波の第2近似とはほぼ一致している（Stokes 波の方が全体として上にあがっており、Skjelbreia の表を用いるときに誤差が入ったと思われる）が、 $h/L = 0.05$ の場合には A_2 および A_3 の値が大きくなり倍振動および3倍

振動の効果が顕著となって、両者が一致しなくなる。一方、逆に h/L の値が小さくなると、 K の値が大きくなって、クノイド波の第1近似と孤立波の波形とはほとんど一致することがわかる。なお、クノイド波の第1近似と第2近似の波形は、三つの場合とも $h/H=5.0$ で、 h/L の値に大きな差がないので、Fig. 11 からわかるように両者の違いにはほとんど変化がない。

Wilson-Webb-Hendrickson は前述したように、Stokes 波の理論の適用限界として、

$$h/L > (\eta_0/L)^{1/3} \quad (44)$$

を与えたが、Fig. 13 に示す三つの場合について、 η_0/L の値を求め適用限界を

計算すれば、(a) $h/L > 0.195$, (b) $h/L > 0.231$, (c) $h/L > 0.282$ となる。これらの限界と Fig. 13 に示す計算例とを比較すれば、いずれの場合も Stokes 波の適用限界外の場合を計算したことになるが、(a) の場合を除き、(b) および (c) の場合は Stokes 波を適用してよいように思われ、3rd order のものを採用する場合には、(44) 式の限界は少し厳格すぎるように考えられる。

5. 結 語

以上この論文では、Laitone のクノイド波理論の結果を用いて、実用できる図表を作成し、波形こう配と水深・波高比を与えてクノイド波の波形を求める方法を示した。そして、さらに孤立波および Stokes 波の波形と比較して、近似の程度を調べ、波高の最大 1.5% 程度の誤差を許すとすれば、 $K \geq 3$ のときには、孤立波の第1近似の波形をクノイド波の第1近似の波形としてよいこと、また、Wilson-Webb-Hendrickson

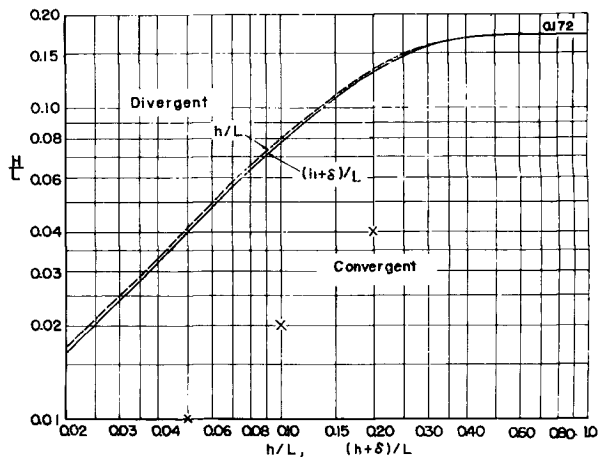


Fig. 12 Limit of convergence for series of Stokes wave profile (after Shuto).

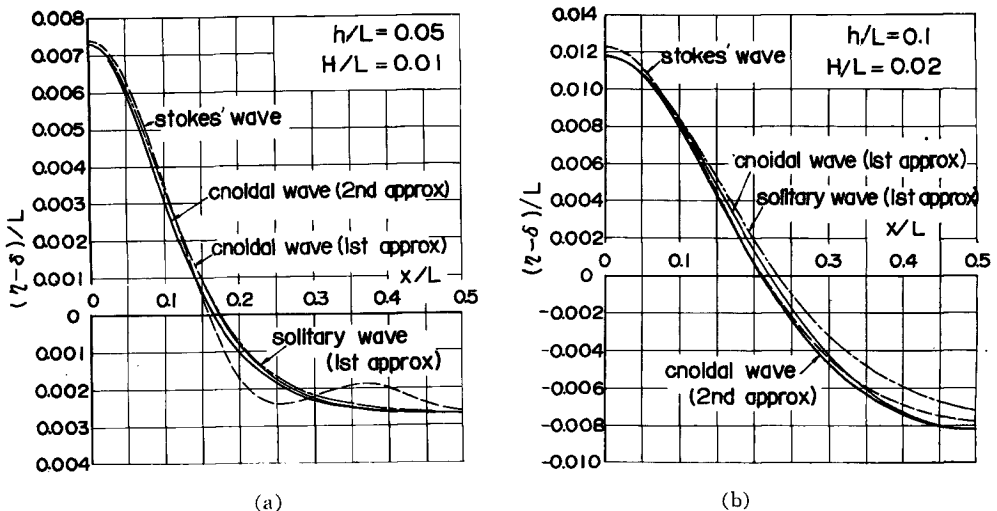


Fig. 13 Comparisons of wave profiles of cnoidal, solitary and Stokes waves (continued).

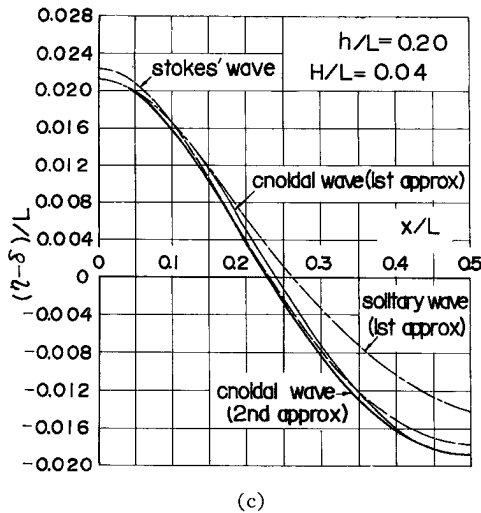


Fig. 13 Comparisons of wave profiles of cnoidal, solitary and Stokes waves.

の Stokes 波の適用限界は波形に対しては厳格すぎることを明らかにした。

最後に数値計算に協力して頂いた久下元一技官，大学院学生 坂井順行君，および吉田宣子，安本春子の両嬢に謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) Korteweg, D. J. and G. de Vries: On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves, Phil. Mag., Ser. 5, Vol. 39, 1895, pp. 422-443.
- 2) Keulegan, G. H.: Wave Motion, Engineering Hydraulics, Wiley, New York, ed. by H. Rouse, Chapt. 11, 1950, pp. 711-768.
- 3) Laitone, E. V.: Limiting Conditions for Cnoidal and Stokes Waves, Jour. of Geophysical Research, Vol. 67, No. 4, April 1962, pp. 1555-1564.
- 4) Wilson, B. W., L. M. Webb and J. A. Hendrickson: The Nature of Tsunamis, Their Generation and Dispersion in Water of Finite Depth, National Science Co., Tech. Rep. No. SN57-2, August 1952, pp. 1-150.
- 5) Wiegell, R. L.: A Presentation of Cnoidal Wave Theory for Practical Application, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 7, No. 2, Feb. 1960, pp. 273-286.
- 6) Keller, J. B.: The Solitary Wave and Periodic Waves in Shallow Water, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 1, 1948, pp. 323-339.
- 7) Keulegan, G. H. and G. W. Patterson: Mathematical Theory of Irrotational Translation Waves, Jour. of Research of the National Bureau of Standards, U. S. Dep. Commerce, Vol. 24, Jan. 1940, pp. 47-101.
- 8) Littman, W.: On the Existence of Periodic Waves near Critical Speed, Commun. Pure Appl. Math., Vol. 10, No. 2, 1957, pp. 241-269.
- 9) Serre, F.: Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux, La Houille Blanche, No. 3, June-July 1953, pp. 374-388; No. 6, Dec. 1953, pp. 830-872.
- 10) Iwasa, Y.: The Undular Jump and its Limiting Condition for Existence, Proc. of 5th National Congress for Appl. Mech., 1955, March 1956, pp. 315-319.
- 11) 岩佐義朗：クノイド波と孤立波に関する解析的研究，土木学会論文集，第32号，昭31. 3, pp. 43-49.
- 12) Benjamin, T. B. and M. J. Lighthill: On Cnoidal Waves and Bores, Proc. Royal Society, Vol. 224, 1954, pp. 448-460.
- 13) Sandover, J. A. and C. Taylor: Cnoidal Waves and Bores, La Houille Blanche, No. 3, July-August 1962, pp. 443-455.

- 14) Laitone, E. V.: The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 9, 1961, pp. 430-444.
- 15) Chappellear, J. E.: Shallow-Water Waves, Jour. of Geophysical Research, Vol. 67, No. 12, Nov. 1962, pp. 4693-4704.
- 16) Friedrichs, K. O.: On the Derivation of the Shallow Water Theory, Appendix to The Formation of Breakers and Bores by J.J. Stoker, Commun. Pure Appl. Math., Vol. 1, 1948, pp. 81-85.
- 17) Jahnke, E. and F. Emde: Tables of Functions with Formulae and Curves, 2nd ed., B. G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1933, p. 150.
- 18) Skjelbreia, L.: Gravity Waves, Stokes' Third Order Approximation, Tables of Functions, Council on Wave Research. The Engineering Foundation, 1959, pp. 1-337.
- 19) 首藤伸夫: 有限振幅波について——高次の級数解, その収束性および近似式の誤差について——, 土木研究所報告, 107号の4, 昭35.9, pp. 35-41.