

Jordan triple system における射影変換について

熊本工業大 厚山健次

Jordan algebras の拡張された代数である Quadratic Jordan triple systems において, 複比が K の射影変換は具体的に $\varphi(a, b; k) = I + (k-1)L(a, b) + (k-1)^2 P(a)P(b)$ と表わせる. この写像は O.Loos の Jordan pairs [5, P43] の写像 $\phi(t) = \beta(e_R^+, (1-t)e_R^-)$ と本質的に同じものである. まず 1.1 において, r -群での折り返し積から, Jordan algebras の折り返し写像 $\varphi(a, a; -1)$ をつくる. そして特殊ユニタリ-群 $SL(m)$ でのその写像の例を 1.2 で, 例外 Jordan algebra での例を 1.3 で示す. 最後に Jordan triple systems において射影変換 $\varphi(a, b; k)$ の性質を調べる.

1.1. r -群 G において折り返し積 $\cdot$ を, $x \cdot y = xy^{-1}x$, $x, y \in G$ で定義すると, この積は3つの性質 (i) $x \cdot x = x$, (ii) $x \cdot (x \cdot y) = y$, (iii) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$ をみたす

ので、群 G は O. Loos [3] の意味で reflection space になる。そしてもし、群 G の involutive な元の集合 S と適当な多様体 M が存在して $S = \exp M$ となるとき、部分 reflection space S での折り返し積 $x \cdot y = xyx$ によって多様体 M にも折り返し積 $\cdot$ が導入できる。 $x = e^{X}$, $y(t) = e^{tY} \in S$, $X, Y \in M$ のとき、

$$(*) \quad X \cdot Y = \left. \frac{d}{dt} x y(t) x \right|_{t=0} = x Y x \quad (= \varphi(X, X; -1) Y)$$

とすればよい。

1.2. 群 G が特殊ユニタリ一群 $SU(n)$ のときには、多様体 M は ${}^t \bar{A} = A$, $A^2 = A$, $\text{tr}(A) = 1$ なる $n \times n$ 行列 A の全体がつくる $n-1$ 次元複素射影空間であり、群 G の involutive な元がつくる reflection space S の元は、 $I + (e^{i\theta} - 1)A$, $A \in M$, なる形をしている。 $e^{i\theta A} = I + (e^{i\theta} - 1)A$ と $e^{itX} = I + (e^{it} - 1)X$, $A, X \in M$, がともに reflection space S の元であるので、上の (*) 式から、射影空間 M 上における点 A による点 X の折り返し積

$$A \cdot X = X + 2(e^{i\theta} - 1)A \circ X + (e^{i\theta} - 1)^2 P(A)X$$

を得る。ただし、 $A \circ X = \frac{1}{2}(AX + XA)$, $P(A)X = (2L^2(A) - L(A^2))X = AXA$, $L(A)X = A \circ X$ である。そして、この折り返し写像

$$\varphi(A; k) = 1 + 2(k-1)L(A) + (k-1)^2 P(A)$$

に関して,

(i) $\varphi(A; -1)$ は射影空間 M の特殊ユニタリ-群 $SU(n)$ への埋めこみ写像である.

(ii) 射影空間 M は折り返し積 $A \cdot X = \varphi(A; -1)X$ によって O. Loos の意味の対称空間になる [4].

(iii) $\varphi: A \rightarrow \varphi(A; -1)$ は射影空間 M から特殊ユニタリ-群への折り返し積に関する homomorphism である.

1.3. 写像 $\varphi(A)X = X - 4A \circ X + 4P(A)X$ を例外 Jordan algebra で考える (K. Atsuyama [1]).

$\mathcal{D}$ を実数体 $\mathbb{R}$ 上のケーリー-代数とする. $\mathcal{J}$ をすべての 3×3 Hermite 行列

$$X = X(\xi, u) = \begin{pmatrix} \xi_1 & u_3 & \overline{u_2} \\ \overline{u_3} & \xi_2 & u_1 \\ u_2 & \overline{u_1} & \xi_3 \end{pmatrix} \quad \xi_i \in \mathbb{R}, u_i \in \mathcal{D}$$

のつくる 27 次元のベクトル空間とする. $\mathcal{J}$ に Jordan 積 $\circ$ を, $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ によって定義する. さらに, $\mathcal{H}$ -スカラー積 $\text{tr}(X) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $X = X(\xi, u) \in \mathcal{J}$, で定め, 内積を $(X, Y) = \text{tr}(X \circ Y)$ とする. 16 次元のケーリー-射影平面 Π は, $X^2 = X$, $\text{tr}(X) = 1$ となる $\mathcal{J}$ の元 X の集合である. $\mathcal{J}$ の自己同型写像のつくる群 F_4 は, 型 F_4 の 52 次元例外

単純リ一群になる. そしてケーリー射影平面 Π の元 A に対しては, $P(A)X = (2L^2(A) - L(A^2))X = A(A, X)$ がなりたつので, 射影平面 Π の元 A で定義された写像 $\varphi(A)X = X - 4A \circ X + 4A(A, X)$, $X \in \mathcal{J}$, はつぎの性質をもつことがわかる.

(i) $\varphi(A)$ はベクトル空間 S_A に関する折り返し写像である. ただし, S_A は $A \circ X = A(A, X)$ をみたす $X \in \mathcal{J}$ の全体が張る 11 次元の実ベクトル空間である.

$$(ii) \quad \varphi(A)^2 = 1 \quad A \in \Pi.$$

$$(iii) \quad \alpha \varphi(A) \alpha^{-1} = \varphi(\alpha A) \quad A \in \Pi, \alpha \in F_4.$$

(iv) 群 F_4 は $\varphi(A)$, $A \in \Pi$, で生成される.

$$(v) \quad e^{2\pi i A} = \varphi(A) \quad A \in \Pi.$$

(vi) ケーリー射影平面 Π の上で, 点 A による点 B の折り返し積を $A \cdot B = \varphi(A)B$ と定義すれば, Π は O.L005 の意味の対称空間になる.

(vii) φ はケーリー平面 Π から例外群 F_4 への折り返し積に関する homomorphism である.

(viii) φ はケーリー平面 Π の例外群 F_4 への埋めこみ写像である (I. Yokota [6]).

2. Quadratic Jordan triple systems (において $\varphi(a, b; k)$)

が複比 κ の射影変換であることを示す。

$(\mathcal{O}, P)$ が可換環 $\mathcal{O} \ni 1$ 上の quadratic Jordan triple system (q.J.t.s) であるとはつぎの性質がみたされるときである。 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}$ -加群で3個の積で閉じている。 P は $\mathcal{O}$ の元に endomorphism ($\text{End } \mathcal{O}$ の元) を対応させる $P(kx) = k^2 P(x)$ $k \in \mathcal{O}$ なる写像である。そして、 $L(x, y)z = \{xyz\} = P(x, z)y \stackrel{\text{def}}{=} (P(x+z) - P(x) - P(z))y$ で定義される $L: \mathcal{O} \times \mathcal{O} \rightarrow \text{End } \mathcal{O}$ は、 P とともに4つの公理をみたす。(i) $L(x, y)P(x) = P(x)L(y, x)$ (ii) $L(P(x)y, y) = L(x, P(y)x)$ (iii) $P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$ (iv) 前の3つの公理は任意の中のスカラー拡大においてもなりたつ。

$P(a)b = a$, $P(b)a = b$ なる性質をみたす $\mathcal{O}$ の元の対 (a, b) は regular pair とよばれる。これは idempotent の拡張された概念である。

$\mathcal{O}$ の非退化な線形変換 α が $\mathcal{O}$ の構造群 $\text{St}(\mathcal{O})$ の元であるとは、ある非退化な線形変換 ${}^t\alpha$ が存在して、 $\alpha P(x) = P(\alpha x){}^t\alpha$, ${}^t\alpha P(x) = P({}^t\alpha x)\alpha$, $x \in \mathcal{O}$, なるときをいう。 α が構造群の元ならば、 $\alpha L(x, y)\alpha^{-1} = L(\alpha x, {}^t\alpha y)$ がなりたつ。

regular pair $(a, b) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ と (複比) $\kappa \in \mathcal{O}$ で射影変換 $g(a, b; \kappa) = I + (\kappa - 1)L(a, b) + (\kappa - 1)^2 P(a)P(b)$ を定義して

その性質を調べる. O. Loos が [5] で行ったようにこの写像で q.J.t.s. σ の Peirce 分解も可能である. その結果は, $E_0 = 1 - L(a, b) + P(a)P(b)$, $E_{\frac{1}{2}} = L(a, b) - 2P(a)P(b)$, $E_1 = P(a)P(b)$, とするとき, $E_0 + E_{\frac{1}{2}} + E_1 = 1$ であり, $E_0, E_{\frac{1}{2}}, E_1$ は orthogonal projection となるので, q.J.t.s. σ は $\sigma = E_0\sigma + E_{\frac{1}{2}}\sigma + E_1\sigma = \sigma_0 + \sigma_{\frac{1}{2}} + \sigma_1$ と分解される. また regular pair (b, a) による Peirce 分解を $*$ をつけて区別すると, $\sigma = \sigma_0^* + \sigma_{\frac{1}{2}}^* + \sigma_1^*$ であり, (a, b) と (b, a) による 2 つの Peirce 分解の積の関係は $\{\sigma_i \sigma_j^* \sigma_k\} = \sigma_{i-j+k}$ となる (ただし, $i-j+k \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ のときは積の値は零とする).

(i) regular pair (a, b) に関する Peirce 分解を $\sigma = \sigma_0 + \sigma_{\frac{1}{2}} + \sigma_1$ とするとき, σ の任意の元 $x = x_0 + x_{\frac{1}{2}} + x_1$ に対して $\varphi(a, b; k)x = x_0 + kx_{\frac{1}{2}} + k^2x_1$ となる. したがって特に 2 つの性質 $\varphi(a, b; k)\varphi(a, b; k_1) = \varphi(a, b; kk_1)$, $\varphi(a, b; -1)^2 = 1$ を得る.

(ii) $\varphi(a, b; k)a = k^2a$

(iii) $\varphi(a, b; k)$ のつくる群は σ の構造群 $St(\sigma)$ の正規部分群になる. $St(\sigma)$ の元であることは, $\varphi = \varphi(a, b; k)$ に対して $\varphi\{xyz\} = \{\varphi x {}^t\varphi y \varphi z\}$ (ただし ${}^t\varphi = \varphi(b, a; k^{-1})$)

がなりたつことからわかる.

証) (構造群 $St(\mathcal{O})$ の正規部分群になることをいう.) $\alpha \varphi(a, b; \kappa) \alpha^{-1}$
 $= \varphi(\alpha a, {}^t \alpha b; \kappa)$, $\alpha \in St(\mathcal{O})$ がなりたつことを示す.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha a, {}^t \alpha b; \kappa) \alpha \alpha &= \alpha \alpha + (\kappa - 1) L(\alpha a, {}^t \alpha b) \alpha \alpha + (\kappa - 1)^2 P(\alpha a) P({}^t \alpha b) \alpha \alpha \\ &= \alpha \varphi(a, b; \kappa) \alpha \end{aligned}$$

(iv) $\exp$ に意味があるときには, $e^{tL(a,b)} = \varphi(a, b; e^t)$ がなりたつ. 証明には, 等式 $L^m(a, b) = L(a, b) + (2^m - 2) P(a) P(b)$ を使えばよい.

(v) regular pair $(a, b) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ がつくる集合は積

$$(a, b) \cdot (c, d) = (\varphi(a, b; -1)c, \varphi(b, a; -1)d)$$

によって reflection space になる.

証) 簡単に $\varphi(a, b; -1) = \varphi$, $\varphi(b, a; -1) = {}^t \varphi$ と書く.

$P(\varphi c) {}^t \varphi d = \varphi P(c) d = \varphi c$, 同様に $P({}^t \varphi d) \varphi c = {}^t \varphi P(d) c = {}^t \varphi d$ がなりたつので, $(\varphi c, {}^t \varphi d)$ が regular pair であることがいえる. つぎに reflection space になるための3つの公理の成立を示す. まず上の性質の (ii) から, $(a, b) \cdot (a, b) = (\varphi a, {}^t \varphi b) = (a, b)$. つぎに上の性質 (i) から,
 $(a, b) \cdot ((a, b) \cdot (c, d)) = (a, b) \cdot (\varphi c, {}^t \varphi d) = (\varphi \varphi c, {}^t \varphi {}^t \varphi d) = (c, d)$. 最後に上の性質 (iii) から,

$$\begin{aligned} ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot ((a, b) \cdot (e, f)) &= (\varphi c, {}^t \varphi d) \cdot (\varphi e, {}^t \varphi f) = \\ &= (\varphi(\varphi c, {}^t \varphi d; -1) \varphi e, \varphi({}^t \varphi d, \varphi c; -1) {}^t \varphi f) = (\varphi \cdot \varphi(c, d; -1) e, {}^t \varphi \cdot \varphi(d, c; -1) f) = \end{aligned}$$

$$(a, b) \cdot (\varphi(c, d; -1)e, \varphi(d, c; -1)f) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)).$$

(vi) $\varphi : (a, b) \longrightarrow \varphi(a, b; -1)$ なる写像は regular pair の集合がつくる reflection space から 折り返し積 $\alpha y^{-1} \alpha$ を持つ構造群への homomorphism である.

証) 上の性質(iii)から,

$$\varphi((a, b) \cdot (c, d)) = \varphi(a, b; -1) \varphi(c, d; -1) \varphi(a, b; -1)$$

を得る.

(vii) 1.3の例外 Jordan algebra の例においては, $\varphi(a, b; \kappa)$ は, H.Freudenthal [2] の Perspectivity $\Pi_{A, B}^{\kappa}$ の代数化になっている. したがってこのときには, $\varphi(a, b; -1)$ は型 E_6 例外群 (non-compact) の involutive な生成元であり, regular pair の集合はこの E_6 例外群で不変な対称空間となる. またケーリー射影平面 Π の上では, $\varphi(a, b; -1)$ は, 点 a , 軸 (無限遠直線) b に関する involutive な射影変換であり, regular pairs (a, b) は (点, 直線) という対であると考えることができる.

References

- [1] Atsuyama, K., On the embedding of the Cayley plane into the exceptional Lie group of type F_4 , Kōdai Math. Sem. Rep. 28 (1977), 129-134.
- [2] Freudenthal, H., Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene. IV, Indag. Math. 17 (1955), 277-285.
- [3] Loos, O., Spiegelungsräume und homogene symmetrische Räume, Math. Z. 99 (1967), 141-170.
- [4] Loos, O., Symmetric Spaces. I, W.A. Benjamin, New York-Amsterdam, 1969.
- [5] Loos, O., Jordan pairs, Springer lecture notes 460, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
- [6] Yokota, I., Embeddings of projective spaces into elliptic projective Lie groups, Proc. Japan Acad. 35 (1959), 281-283.