

境界要素法における数値解の 一様収束性について

京都大学数理解析研究所

磯 祐介
(Yusuke Iso)

§1 はじめに.

Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし. その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は C^3 -級の滑らかさで. その曲率は positive であるとする. ここで次のラプラス方程式の境界値問題を考える.

$$(NP) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega & (1.1) \\ \frac{\partial}{\partial n} u = f & \text{on } \Gamma & (1.2) \end{cases}$$

但し. $\frac{\partial}{\partial n}$ は Γ に於ける外向き法線微分を表わし. f は $C^2(\Gamma)$ の函数で

$$\int_{\Gamma} f(y) d\sigma_y = 0$$

を満足する与えられた函数である. このとき. (NP) は

$C^2(\Omega)/\text{const.}$ に一意的な解をもつ. $g(x, y)$ をラプラス方程式の全空間における素解 (fundamental solution) とする. 即ち

$$g(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log|x-y| \quad .$$

この素解を用いると、(NP) の解は次の積分表示によって与えられる。

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} g(x, y) u(y) d\sigma_y \\ + \int_{\Gamma} g(x, y) f(y) d\sigma_y, \quad x \in \overset{\circ}{\Omega}. \quad (1.3)$$

従って、ノイマン問題 (NP) に対するディリクレ data が得られれば、(1.3) によって解を得ることができる。その為に、(1.3) において領域内の点 x を境界上の点に近づけるといふ極限をとる。即ち、 z を Γ 上の点とし、 $x \in \overset{\circ}{\Omega}$ を z に z の内法線方向から近づけるといふ極限をとると、(1.3) 式は次の様になる。

$$\frac{1}{2} u(z) + \text{p.v.} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} g(z, y) u(y) d\sigma_y \\ = \int_{\Gamma} g(z, y) f(y) d\sigma_y, \quad z \in \Gamma. \quad (1.4)$$

これをディリクレ data $u(z)$ に対する積分方程式と考える。現実には、一意性を考慮して、次の積分方程式 (1.5) と連立にして考える。

$$\int_{\Gamma} u(y) d\sigma_y = 0 \quad (1.5)$$

境界上の積分方程式系 (1.4), (1.5) を (NP) に対する境界

積分方程式と呼ぶ。この積分方程式の一意的可解性については、次の補題を得る。

補題 1.1

積分方程式 (1.4), (1.5) は, Γ , g が上の仮定を満足するとき $C^0(\Gamma)$ に一意的な解をもつ。■

以下の議論の便宜上, $C^0(\Gamma)$ を定義域とする作用素 K を次の様に定義する。

$$\begin{cases} (Kf)(z) := \frac{1}{2}f(z) + \text{p.v.} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} g(z, y) f(y) d\sigma_y, & (1.6) \\ f \in C^0(\Gamma) \end{cases}$$

この作用素 K は次の性質をもつ。

補題 1.2

K は 0 を固有値にもち、その固有空間は一次元で、固有函数は定数である。■

補題 1.1 及び 補題 1.2 の証明は、Kellogg [1] を参照されたい。

本稿の目標は、積分方程式 (1.4), (1.5) の数値解を collocation (選点) 法を用いて構成し、その数値解の一致収束を示すことである。

§2 境界の近似を伴った離散化。

§1 の仮定の下に、境界 Γ 上に N 個の節点 $\{z_k\}_{k=1}^N$ を等間隔にとる。即ち、2 点 z_k, z_{k+1} を端点とする Γ 上の閉劣弧を $\Gamma_k (= \overline{z_k z_{k+1}})$ とするとき、 $|\Gamma_k| = \frac{1}{N} |\Gamma|$ を満足する様に節点を定める。便宜上分割の巾を $h := \frac{1}{N} |\Gamma|$ によって定めておく。次に $C^0(\Gamma)$ の有限次元内近似空間 V_h を構成する為、その基底函数となるべき一組の函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ を次の仮定を満たす様にとる。

仮定 2.1.

$$(i) \quad \varphi_k \in C^0(\Gamma), \quad \varphi_k(z_l) = \delta_{k,l} \quad (1 \leq k, l \leq N)$$

$$(ii) \quad \text{supp } \varphi_k = \overline{z_{k-1} z_{k+1}} \\ (1 \leq k \leq N, \quad z_0 = z_N, \quad z_{N+1} = z_1)$$

$$(iii) \quad \varphi_k|_{\Gamma_l} \in C^2(\Gamma_l) \quad (1 \leq k, l \leq N)$$

$$(iv) \quad \sum_{k=1}^N \varphi_k \equiv 1$$

$$(v) \quad \int_{\Gamma} \varphi_k(y) d\sigma_y = \int_{\Gamma} \varphi_l(y) d\sigma_y \quad (1 \leq k, l \leq N) \quad \blacksquare$$

この函数 $\{\varphi_k\}$ を用いて、 V_h を次の様に定める。

$$V_h := \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \rangle$$

明らかに、 V_h は $C^0(\Gamma)$ の N 次元内近似空間である。 $C^0(\Gamma)$

の元を V_h に制限する collocation operator P_h を次の様に定義する。

$$\begin{array}{ccc}
 P_n : C^0(\Gamma) & \longrightarrow & V_n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 u(z) & \longrightarrow & \sum_{k=1}^N u(z_k) \varphi_k
 \end{array}$$

この P_n に対しては、次の評価が成立する。

補題 2.2

函数 u が $C^2(\Gamma)$ に属するとき、 n に依存しない正定数 c が存在して、

$$\|P_n u - u\|_0 \leq c n^2$$

が成立する。 ■

以上を準備して、(1.6) で定義した積分作用素 K の離散化に相当する V_n から V_n への作用素 K_n を次の様に定義する。

$$D(K_n) = V_n, \quad K_n := P_n K \quad (2.1)$$

V_n は有限次元函数空間であるから、基底 $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ を介して $\mathbb{R}^N$ と同一視できる。即ち、 $v_n \in V_n$ は、

$$v_n = \sum_{k=1}^N v_n^k \varphi_k$$

と表わされるが、これを $\mathbb{R}^N$ の元 $(v_n^1, v_n^2, \dots, v_n^N)^T$ と同一視する。この同一視のルールによつて、(2.1) で定義された作用素 K_n は、次の行列と同一視できる。

$$K_n \simeq (a_{i,j})_{i,j=1}^N, \quad a_{i,j} = (P_n K \varphi_j)(z_i) \quad (2.2)$$

但し、 $1 \leq i, j \leq N$ 。

本稿に於いては、 $\mathbb{R}^N$ の元と V_n の元、行列 K_n と作用素 K_n と (混乱の起こらない限りは) 同一の表記で取り扱う。

(2.2) によつて定義された行列は次の評価を受ける。この評価は以下の議論に於いて、重要な役割りを果たす。

補題 2.3

c_1, c_2, c_3, c_4 を n に依存しない正定数として、以下の評価が成立する。

$$(i) \quad -c_1 n \leq a_{i,j} \leq -c_2 n \quad (1 \leq i, j \leq N, i \neq j)$$

$$(ii) \quad c_3 \leq a_{i,i} \leq c_4 \quad (1 \leq i \leq N)$$

$$(iii) \quad \sum_{j=1}^N a_{i,j} = 0.$$

この補題より、行列 K_n は弱い意味で優対角行列であることがわかる。従つて、

$$\text{rank}(K_n) = N-1 \quad (2.3)$$

が成立する。我々は方程式 (1.4) の離散化を目指しているのであるが、(2.3) は非斉次項の離散化をうまく決めなければ、 $R(K_n)$ からほみ出てしまうことを示唆している。そこで、次の様に γ_n^k ($1 \leq k \leq N-1$)、 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{R}^N$ を次の様に定義し、それらを利用して (1.4) 式の非斉次項の離散化を試みる。

$$\gamma_n^k := \int_{\Gamma} g(z_k, y) f(y) d\sigma_y \quad (1 \leq k \leq N-1) \quad (2.4)$$

$$K_n^T \mu = 0, \quad \|\mu\|_1 = \sum_{k=1}^N |\mu_k| = 1. \quad (2.5)$$

(2.4), (2.5) を利用して、

$$r_n^N := -\frac{1}{\mu_n} \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k r_n^k \quad (2.6)$$

と定め. $r_n = (r_n^1, \dots, r_n^{N-1}, r_n^N)$ と定める. 明らかに $r_n \in R(K_n)$ である.

以上を利用して, 境界積分方程式 (1.4), (1.5) の離散化を

$$K_n u_n = r_n \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=1}^N u_n^k = 0 \quad (2.8)$$

と定める. (2.7), (2.8) に対しては, 次の定理が成立し, 離散化が適切であることがわかる.

定理 2.4

連立方程式 (2.7), (2.8) は $\mathbb{R}^N$ (即ち V_n) に唯一の解をもつ. ■

このセクションの補題及び定理の証明は, 磯 [2] を参照されたい.

§3 一様収束評価

このセクションでは, 次の定理を示すことが目的である.

定理 3.1.

u を積分方程式 (1.4), (1.5) の解とし, u_n を連立方程式 (2.7), (2.8) から作られる V_n の元とする. このとき, 次の評価が成立する.

$$\|P_n u - u_n\|_\infty \leq c_n \quad (3.1)$$

但し、 C は n に依存しない正定数である。 ■

この定理から、連立方程式 (2.2), (2.8) の解は、少なくとも $O(n)$ で (1.4), (1.5) の厳密解を近似するものであることがわかる。

証明の準備の為にいくつかの補題を用意する。

補題3.2

行列 K_n と K_n の第一小行列

$$K'_n := (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq N-1 \\ 1 \leq j \leq N-1}} \quad (3.2)$$

とする。このとき行列 K'_n は正則行列であって、十分大きな正整数 N に対して、

$$\|K_n^{-1}\| \leq C \cdot \frac{1}{n} \quad (3.3)$$

が成立する。但し、 C は n に依存しない正数である。 ■

<証明>

$$D'_n := \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{N-1,N-1}) \quad \text{とする。}$$

$$K_n = D'_n (I + D_n^{-1} (K_n - D'_n)) \quad .$$

ここで補題2.3の結果を利用すると、

$$\|D_n^{-1} (K_n - D'_n)\|_\infty \leq \max_i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}$$

$$\leq 1 - Cn \quad .$$

$$\text{従って } \|K_n^{-1}\|_\infty \leq \|D_n^{-1}\| \cdot \|(I + D_n^{-1} (K_n - D'_n))^{-1}\|_\infty$$

$$\leq C' \cdot \frac{1}{n} \quad . \quad \text{<g.e.d.>}$$

補題3.3

u が (1.4), (1.5) の厳密解であるとき.

$$\| P_h K (P_h u - u) \|_\infty \leq C h^2 \quad (3.4)$$

が成立する。 ■

<証明>

作用素 K の定義に立ち戻ると.

$$\begin{aligned} & \| P_h K (P_h u - u) \|_\infty \\ & \leq \| P_h u - u \|_\infty + \max_i \lim_{z \rightarrow z_i} \left| \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} q(x, y) (P_h u - u) d\sigma \right| \\ & \leq 2 \| P_h u - u \|_\infty . \end{aligned}$$

この評価を出す為に、 Γ の凸性を利用してゐることに注意しておく。あとは補題2.2を援用する。 <g. e. d.>

補題3.4

u が (1.4), (1.5) の厳密解, u_h が (2.7), (2.8) の厳密解であるとき.

$$\left| \int_\Gamma (P_h u - u_h) d\sigma \right| \leq C h^2 \quad (3.5)$$

が成立する。 ■

<証明>

$$\begin{aligned} \left| \int_\Gamma (P_h u - u_h) d\sigma \right| &= \left| \int_\Gamma ((P_h u - u) + (u - u_h)) d\sigma \right| \\ &\leq |\Gamma| \cdot \| P_h u - u \|_\infty . \end{aligned}$$

あとは補題2.2を援用する。

<g. e. d.>

<定理 3.1 の証明>

$K_h(P_h u - u_h)$ の評価を通して $P_h u - u_h$ を評価する。
 $K_h(P_h u - u_h) = P_h K(P_h u - u) + (P_h K u - r_h)$ (3.6)

便宜上 $e_h := P_h u - u_h$ とする。

2つの行列 S, T を

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ \mu_1 & \dots & \mu_{N-1} & 1 \\ & & & \mu_N \end{pmatrix}$$

と定める。但し、 $\mu_1, \dots, \mu_N$ は (2.5) に F で定義されたものである。この行列を用いると

$$T K_h S = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,1} & \dots & a_{N-1,N-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

となる。(3.6) より

$$T K_h S S^{-1} e_h = T P_h K(P_h u - u) + T(P_h r - r_h)。$$

(3.7) 及び、補題 3.2, 補題 3.3, より

$$e_h^k - e_h^N = O(h) \quad (1 \leq k \leq N-1)$$

を得る。更に補題 3.4 より

$$e_h^1 + e_h^2 + \dots + e_h^N = O(h)$$

故に

$$\begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} e_h = O(h)。$$

Gauss消去法を用いることにより、 e_n^k を解くと

$$e_n^k = O(n) \quad (1 \leq k \leq N)$$

を得て、定理の証明が完了する。

< q. e. d. >

§4 まとめ

実際の数値計算に於いては、境界 Γ の多角形近似が行なわれる。この場合は、基本解の法線方向微分を考える上で、精度の良い近似を考える必要が生じる。それについての詳細は磯[2]に詳しい。

< 文 献 >

- [1] Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory (Dover 1958)
- [2] Iso Y. Uniform Convergence Theorems of Boundary Solutions for Laplace's Equation (to appere in Pub.R.I.M.S.)