

Higher residues とその応用

京大 数理解 斎藤 恭司^{*}

微分形式

$$\frac{dx}{x}, \quad \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}, \quad \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

等に対し一種の "Hamilton 系" を導入し、これらそれぞれそれぞれに同伴した原始積分とみなすことを考える。Hamiltonian として

$$F = xy - t, \quad x^2 + y^2 - r^2 \text{ (符号を除く)}, \quad y^2 - (4x^3 - g_2x - g_3)$$

とおけば、上はそれぞれ $\text{Res} \left[\frac{dx dy}{F} \right]$ となる。例えば

$$\text{Res} \left[\frac{dx dy}{xy - t} \right] = \frac{dx}{\frac{\partial(xy-t)}{\partial y}} = \frac{dx}{x}$$

つまり、一般に $\text{Res} \left[\frac{dx dy}{F} \right]$ の Hamiltonian が F だというわけである。上の F はそれぞれ A_1, A_2, A_3 という特異点の普遍変形になることに注意すれば、 $A_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ のすべてについて F が構成できるはずである。実際、 A_n については超楕円積分で書ける。更に進むと面白そうな超越函数が出て来る。これらは以下に述べる higher residue

^{*} 文責・研究代表者

$K^{(k)}$ という概念を用いると, これに対する広田の双一次形式を用いた 2 階微分方程式で書けるのである.

$$F(x_0, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_\mu) = t_1 - F_1(x, t')$$

を Hamiltonian とする. $t' = (t_2, \dots, t_\mu)$ である.

$$\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^\mu \supset X = \{F=0\} \\ \cup \\ C = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_0} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \right\}$$

により C を導入し, また

$$\mathcal{O}_T = \mathbb{C}\{t_2, \dots, t_\mu\}, \quad \Omega_{X/T}^{n+1} = \mathcal{O}_X dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n$$

とおく. *higher residue*

$$K^{(k)}: \Omega_{X/T}^{n+1} \times \Omega_{X/T}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_T, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

を次の様に帰納的に定義する. $x = (x_0, \dots, x_n)$ とおき, まず

$$K^{(0)}(\varphi(x, t') dx, \psi(x, t') dx) := \text{Res}_{X/T} \left[\frac{\varphi \psi dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n}{\frac{\partial F}{\partial x_0} \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}} \right]$$

とおく. ただし $\frac{\partial F}{\partial x_0} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$ は完全交又になっていると

ある. そのとき Res は次々にとれ, 最後は $\mathcal{O}_T$ の元となる.

$$K^{(1)}(\varphi dx, \psi dx) := \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \text{Res}_{X/T} \left[\frac{(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \psi - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i}) dx}{\frac{\partial F}{\partial x_0} \dots (\frac{\partial F}{\partial x_i})^2 \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}} \right]$$

$$K^{(2)}(\varphi dx, \psi dx) := \frac{1}{4} \sum_{i < j} \text{Res}_{X/T} \left[\frac{(\varphi_{ij} \psi - \varphi_i \psi_j - \varphi_j \psi_i + \varphi \psi_{ij}) dx}{\frac{\partial F}{\partial x_0} \dots (\frac{\partial F}{\partial x_i})^2 \dots (\frac{\partial F}{\partial x_j})^2 \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}} \right] \\ - \frac{1}{4} \sum_{i < j < k} \text{Res}_{X/T} \left[\frac{\varphi \psi \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx}{\frac{\partial F}{\partial x_0} \dots (\frac{\partial F}{\partial x_i})^2 \dots (\frac{\partial F}{\partial x_j})^2 \dots (\frac{\partial F}{\partial x_k})^2 \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}} \right]$$

ここで, $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ の分子はそれぞれ広田の記号で $D_{x_i} \varphi \psi$,

$D_{x_i} D_{x_j} \varphi \psi$ と書けることに注意せよ. 一般に n 最高階のとき

3 はそう書ける。さて柏原の理論によれば, F に同伴した Gauss-Mann 接続が単純ホロノミー系となり, 従って後者を考えればもとの F は同型を除き一意に復元できる。そこで一般の $K^{(k)}$ は次の諸性質により定義する。

0) $K^{(k)}$ は k が偶数のとき対称, k が奇数のとき歪対称。

1) $K^{(k)}(t, w_1, w_2) - K^{(k)}(w_1, t, w_2) = (n+k-1)K^{(k-1)}(w_1, w_2)$
(これは Schlesinger 変換 (exponent のずらし) とも解釈できる。)

$$2) \frac{\partial}{\partial t_i} K^{(k)}(w_1, w_2) = K^{(k)}\left(\frac{\partial}{\partial t_i} w_1, w_2\right) + K^{(k)}\left(w_1, \frac{\partial}{\partial t_i} w_2\right)$$

$$i = \dots, \mu.$$

$$3) K^{(k)}\left(\frac{\partial}{\partial t_i} w_1, w_2\right) = K^{(k+1)}(w_1, w_2)$$

また, ζ は n -形式とすれば,

$$K^{(k+1)}(dF_1 \wedge \zeta, \psi dx) = K^{(k)}(d\zeta, \psi dx)$$

故に $K^{(k)}$ は $dF_1 \wedge d\Omega_{X/T}^{n-1} \times \Omega_{X/T}^{n+1} \ni 0$ に写すので, $\mathcal{H} = \Omega_{X/T}^{n+1} / dF_1 \wedge d\Omega_{X/T}^{n-1}$ とおけば, 実は

$$K^{(k)} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}_T$$

という双一次形式とみなせる。 $\mathcal{H}$ は階数 μ の自由 $\mathcal{O}_S$ -加群である。 ($S = \mathbb{C}^n$). $\mathcal{H}$ の filtration として,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} \supset \mathcal{H}^{(-1)} \supset \mathcal{H}^{(-2)} \supset \dots$$

$$\quad \quad \quad \nwarrow \frac{\partial}{\partial t_i}$$

を考える。 $\mathcal{H}^{(0)}$ は $\mathbb{C}\{(\frac{\partial}{\partial t_i})^{-1}\}$ -加群として単純 holonomy 系。

(即ち単項生成) となる. その生成元 $\zeta^{(0)}$ が, Hamiltonian の候補を与えるであろう. そこで一般に

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i \geq k} a_{ik}(t') \nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}})^{-k} \zeta^{(0)} = \omega$$

を計算してみる. $\zeta^{(-k)} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}})^{-k} \zeta^{(0)}$ とおけば, $\delta, \delta' \in \sum_{i=1}^n \mathcal{O}_T \frac{\partial}{\partial t_i}$
 $= \mathcal{O}_f$ に対し

$$\nabla_{\delta} \nabla_{\delta'} \zeta^{(-2)} = \nabla_{\delta * \delta'} \zeta^{(-1)} + \nabla_{\nabla_{\delta} \delta'} \zeta^{(-2)} + \nabla_0 \zeta^{(-3)} + \dots$$

と書ける. ここに $\delta * \delta'$ は residue product と云われるものである. 同様に

$$t_1 \nabla_{\delta} \zeta^{(-1)} = \nabla_{t_1 * \delta} \zeta^{(-1)} + \nabla_{N_{\delta}} \zeta^{(-2)} + \nabla_0 \zeta^{(-3)} + \dots$$

と書ける. ここで

∇ : $\mathcal{O}_f$ 上の integrable, torsion free, metric connection

N : $\mathcal{O}_f \rightarrow \mathcal{O}_f$ は $\mathcal{O}_T$ -endomorphism.

$$\nabla/N = 0, \quad N + N^* = (n+1)I$$

等がわかる. 具体的計算は未知だが面白いと思う. 時間が無いのでうまく説明できないが, flat coordinate の存在と τ 函数の存在が対応している. さて, 生成元をうまく選べば $\zeta^{(-3)}$ から先は消せるかもしれない. 即ち

定義 $\zeta^{(0)} \in \mathcal{H}^{(0)}$ が原始積分とは,

$$i) \quad K^{(i)}(\nabla_{\delta} \zeta^{(-1)}, \nabla_{\delta'} \zeta^{(-1)}) = 0 \quad i \geq 1$$

$$ii) \quad K^{(i)}(\nabla_{\delta} \nabla_{\delta'} \zeta^{(-2)}, \nabla_{\delta''} \zeta^{(-1)}) = 0 \quad i \geq 2$$

$$\text{iii) } K^{(i)}(t, \nabla_{\theta} \zeta^{(-i)}, \nabla_{\theta} \zeta^{(-i)}) = 0 \quad i \geq 2$$

を満足することを云う.

このとき $\zeta^{(0)}$ は H.D.O. ではなく P.D.O. として単純ホロノミー系を満足することになる.

$F(x, t)$ の計算については A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 で実際上の意味の原始積分が存在することがわかっていて $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ については未知の函数となるはずである.