

拡張行列ホーナー法と 行列スペクトル分解の並列算法

小原功任

KATSUYOSHI OHARA

金沢大学・理工*

田島慎一

SHINICHI TAJIMA

筑波大学・数理物質†

1 行列スペクトル分解

正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ とし、固有値 λ_i に関する不変部分空間を V_i とする。よく知られているように、このとき互いに可換な行列 $P_1, \dots, P_m, D$ が存在して

$$E = P_1 + \dots + P_m,$$

$$A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m + D,$$

P_i は V_i への射影行列,

D は巾零行列,

となる。この $\{P_1, \dots, P_m; D\}$ を行列 A のスペクトル分解という。

本研究の目的は、 $\mathbb{Q}$ 上の行列のスペクトル分解をできるだけ高速に exact に計算することである。そのために、数学的にはレゾルベントに関する留数解析を、計算技術としては並列計算の手法を用いる。また、 $\mathbb{Q}$ 上の行列のスペクトル分解であるから、一般に行列 P_i, D は固有値 λ_i の多項式または有理式を成分とする。このときに冗長な表現で求めてしまうと、スペクトル分解した後に、simplification の手間を要する。したがって本研究では最小次数の多項式を成分とるようにした。本稿でははじめにこれまでの研究を概観してスペクトル分解アルゴリズムについて説明し、その後に今回工夫を行った拡張行列ホーナー法について述べる。また、われわれのアルゴリズムは計算代数システム Risa/Asir に実装しているが、そのタイミングデータについても述べる。

2 レゾルベントと射影行列

定義 1. 正方行列 A に対して、行列値複素関数 $R(z) = (zE - A)^{-1}$ を A のレゾルベントという。

簡単に分かるように、レゾルベント $R(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の行列値有理関数となる。また $R(z)$ の極は A の特性多項式 $\chi(z) = \det(zE - A)$ の根、すなわち固有値である。レゾルベントについては次の定理がよく知られている。

*ohara@air.s.kanazawa-u.ac.jp

†tajima@math.tsukuba.ac.jp

定理 1. A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ とする。 λ_i におけるローラン展開

$$R(z) = \cdots + \frac{1}{(z - \lambda_i)^2} D_i + \frac{1}{z - \lambda_i} P_i + \cdots$$

は、 A のスペクトル分解 $\{P_1, \dots, P_m; \sum_{i=1}^m D_i\}$ を与える。

したがってスペクトル分解を求めるには、 $R(z)$ の固有値のまわりでのローラン展開について調べればよいことになる。特に、コーシーの積分定理から次がしたがう。

定理 2. 固有値 $z = \lambda_i$ のまわりを反時計回りに一周まわる閉曲線を C_i とする。このとき、 λ_i に対する射影行列 P_i は、周回積分 $P_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_i} R(z) dz$ によって与えられる。

また、レゾルベントの有理関数としての構造については次の定理が得られる。

定理 3. 多項式 $f(z) \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ が $f(A) = O$ を満たせば、レゾルベントは

$$R(z) = \frac{1}{f(z)} \Psi_f(zE, A), \quad \text{ただし} \quad \Psi_f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in \mathbb{C}[x, y].$$

と表される。

例 1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の最小多項式は $\pi(x) = (x - 2)^2(x - 3)$ であり、固有値は $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ である。このとき、 A のレゾルベントは

$$R(z) = \frac{1}{(z - 2)^2} (-6E + 5A - A^2) + \frac{1}{z - 2} (-3E + 4A - A^2) + \frac{1}{z - 3} (4E - 4A + A^2)$$

と書かれ、その係数行列

$$P_1 = -3E + 4A - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = 4E - 4A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = -6E + 5A - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = O$$

は A のスペクトル分解 $\{P_1, P_2; D_1 + D_2\}$ を与える。

例 2. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の最小多項式は $\pi(x) = (x^2 - 2)^2$ であり、固有値は $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}$ である。このとき、 A のスペクトル分解 $\{P_1, P_2; D_1 + D_2\}$ は

$$P_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\lambda_i}{2} & 0 & \frac{\lambda_i}{8} \\ \frac{\lambda_i}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{\lambda_i}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\lambda_i}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_i}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\lambda_i}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{\lambda_i}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

で与えられる。

3 レゾルベントの留数解析とネーター作用素

定理 3 より行列 A を消去する多項式があれば、レゾルベントを具体的に書き下すことができるが、計算量的観点からは、次数が小さな多項式を選ぶべきである。したがってレゾルベントは最小多項式 $\pi(z)$ を用いて $R(z) = \frac{1}{\pi(z)} \Psi_\pi(zE, A)$ と表されることになる。さらに、定理 2 より、レゾルベントの周回積分で射影行列は表されるので、最小多項式で表されたレゾルベントについて、周回積分を exact に求めることができれば、射影行列の計算はできることになる。そのために代数的局所コホモロジー群とネーター作用素の概念を導入する。

$f(z) \in \mathbf{Q}[z]$ を既約多項式とする。集合 $V(f) = \{z \mid f(z) = 0\}$ に特異点をもつ有理関数の全体 $\mathbf{Q}[z, f^{-1}]$ に同値関係 $\equiv$ を次のように入れる。

$$r_1(z) \equiv r_2(z) \iff r_1(z) - r_2(z) \in \mathbf{Q}[z]$$

この同値類を $[r_1]$ で表し、 $V(f)$ に台をもつ代数的局所コホモロジー類という。また、この同値類の全体を $V(f)$ に台をもつ代数的局所コホモロジー群という。このとき、与えられた有理関数 $g(z)/f(z)^\ell \in \mathbf{Q}[z, f^{-1}]$ に対して、次の多項式係数 $\ell-1$ 階微分作用素 T を計算することができる ([3], [4])。

$$\left[\frac{g(z)}{f(z)^\ell} \right] = T \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right], \quad T = \sum_{k=0}^{\ell-1} (-\partial_z)^{\ell-k} t_k(z) \in \mathbf{Q}\langle z, \partial_z \rangle.$$

この T をネーター作用素という。より一般には、 $V(f_1 \cdots f_m)$ に台をもつ代数的局所コホモロジー群を考えると、有理関数 $r(z) \in \mathbf{Q}[z, f_1^{-1}, \dots, f_m^{-1}]$ の代数的局所コホモロジー類に対して、既約成分ごとのネーター作用素表示

$$[r(z)] = T_1 \left[\frac{f'_1(z)}{f_1(z)} \right] + \cdots + T_m \left[\frac{f'_m(z)}{f_m(z)} \right], \quad T_i \in \mathbf{Q}\langle z, \partial_z \rangle$$

が求まる。

行列 A の固有値 λ_i に対する射影行列 P_i を求めるために、ネーター作用素が使えることを示そう。いま、 A の最小多項式を $\pi(z) = f_1(z)^{\ell_1} \cdots f_m(z)^{\ell_m}$ とする。 $f_i(z)$ は固有値 λ_i の最小多項式である。まず、ネーター作用素

$$\left[\frac{1}{\pi(z)} \right] = T_1 \left[\frac{f'_1(z)}{f_1(z)} \right] + \cdots + T_m \left[\frac{f'_m(z)}{f_m(z)} \right]$$

を求める。ネーター作用素 $T_i = \sum_{k=0}^{\ell_i-1} (-\partial_z)^{\ell_i-k} t_k(z)$ に対して、随伴作用素 $T_i^* = \sum_{k=0}^{\ell_i-1} t_k(z) (\partial_z)^{\ell_i-k}$ は容易に得られる。部分積分と留数定理により

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_i} R(z) dz = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_i} \Psi_\pi(zE, A) \frac{1}{\pi(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_i} \Psi_\pi(zE, A) \sum_{j=1}^m T_j \frac{f'_j(z)}{f_j(z)} dz = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_i} \Psi_\pi(zE, A) T_i \frac{f'_i(z)}{f_i(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_i} \{T_i^* \Psi_\pi(zE, A)\} \frac{f'_i(z)}{f_i(z)} dz = \{T_i^* \Psi_\pi(zE, A)\}|_{z=\lambda_i} \end{aligned}$$

このことから 2 変数多項式 $\Psi_\pi(z, y)$ に対して、微分作用素 T_i^* を作用させ、得られた多項式 $F_i(z, y) = (T_i^* \Psi_\pi)(z, y)$ についての行列多項式 $F_i(\lambda_i E, A)$ が射影行列 P_i になることが分かった。

次に、巾零行列 D_i をどのように求めるかが問題であるが、実は、 $T_i = \sum_{k=0}^{\ell_i-1} (-\partial_z)^{\ell_i-k} t_k(z)$ の代わりに $S_i = \sum_{k=0}^{\ell_i-1} (-\partial_z)^{\ell_i-k} k t_k(z)$ をとり、同様の計算をすれば、 D_i が求まる。すなわち、

$$D_i = \{S_i^* \Psi_\pi(zE, A)\}|_{z=\lambda_i}$$

となる。以上より、スペクトル分解を求めるアルゴリズムは次のようになる。

アルゴリズム 1.

入力: $\mathbf{Q}$ 上の正方行列 A

出力: スペクトル分解 $\{P_i; D_i\}$

1. A の特性多項式 $\chi(z)$ を求める。
2. A の最小多項式 $\pi(z) = f_1^{\ell_1} \cdots f_m^{\ell_m}$ とその既約分解を求める。
3. $[1/\pi(z)]$ のネーター作用素 $T_1, \dots, T_m$ を求める。
4. 多項式 $F_i(z, y) = T_i^* \Psi_\pi(z, y) \bmod f_i(z)$ および $G_i(z, y) = S_i^* \Psi_\pi(z, y) \bmod f_i(z)$ を求める。
5. 行列多項式 $P_i = F_i(\lambda_i E, A)$ および $D_i = G_i(\lambda_i E, A)$ を求める。

アルゴリズム 1 のステップ 5 では行列多項式を求める。 $F_i(z, y)$ の y に関する次数は、 $\deg \pi - 1$ であり、また、 z に関する次数は、 $\deg f_i - 1$ であることに注意すると、ホーナー法を用いた行列多項式計算では、 P_i を求めるためには行列同士の乗算が $(\deg f_i - 1)(\deg \pi - 1)$ 回必要である。 n 次正方行列 A について、標準的方法では行列積には $O(n^3)$ 回の乗算が必要であるため、 P_i を求めるための乗算の総数は、 $O(n^3 \deg f_i \deg \pi)$ 回となる。既約因子の次数は下げられないので、計算の効率化のためには、 $\deg \pi$ を下げようとする努力が考えられる。それが次節に述べる最小消去多項式による高速化である。

4 最小消去多項式による高速化

4.1 最小消去多項式によるスペクトル分解アルゴリズム

定義 2. 正方行列 A とベクトル $v \neq 0$ に対し、 $f(A)v = 0$ を満たす次数最小のモノック多項式を、 v の最小消去多項式という。

定理 4. 第 j 基本ベクトル e_j の最小消去多項式を $\pi_j(z)$ とする。このとき、 A のレゾルベント $R(z)$ について

$$R(z)e_j = \frac{1}{\pi_j(z)} \Psi_j(zE, A)e_j, \quad \text{ただし} \quad \Psi_j(x, y) = \frac{\pi_j(x) - \pi_j(y)}{x - y} \in \mathbf{Q}[x, y].$$

が成り立つ。

A の最小多項式 $\pi(z)$ と最小消去多項式 $\pi_j(z)$ を比較すると、 $\deg \pi_j \leq \deg \pi$ であることは容易に分かる。したがってアルゴリズム 1 において、最小多項式を最小消去多項式に置き換えることで、高速化することができる。したがって新しいスペクトル分解アルゴリズムは次のようになる。

アルゴリズム 2.

入力: $\mathbf{Q}$ 上の正方行列 A

出力: スペクトル分解 $\{P_i; D_i\}$

1. A の特性多項式 $\chi(z)$ を求める。
2. 各 e_j の最小消去多項式 $\pi_j(z) = f_1^{\ell_{1j}} \cdots f_m^{\ell_{mj}}$ とその既約分解を求める。
3. $[1/\pi_j(z)]$ のネーター作用素 $T_{1j}, \dots, T_{mj}$ を求める。
4. 多項式 $F_{ij}(z, y) = T_{ij}^* \Psi_j(z, y) \bmod f_i(z)$ および $G_{ij}(z, y) = S_{ij}^* \Psi_j(z, y) \bmod f_i(z)$ を求める。
5. 行列多項式 $P_i e_j = F_{ij}(\lambda_i E, A) e_j$ および $D_i e_j = G_{ij}(\lambda_i E, A) e_j$ を求める。
6. P_i および D_i を得る。

前節と同様にアルゴリズム 2 における計算量を見積もると、 P_i を求めるためには、 $O(n^2 \deg f_i \sum_{j=1}^n \deg \pi_j)$ となる。 $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \deg \pi_j \leq \deg \pi$ であるから、アルゴリズム 2 のほうが計算量が小さい。この差が大きければ大きいほど高速化されたことになる (ブロック対角化されている場合など)。

アルゴリズムの並列化の観点から見ると、ステップ 3 については、列番号 j でそれぞれ独立に計算でき、ステップ 4, 5 については、既約因子番号 i および列番号 j でそれぞれ独立に計算できることが分かる。さらに後述するようにステップ 2 における最小消去多項式の構成においても並列化技法が使用できる。したがってアルゴリズム 2 は並列化の面からは非常に扱いやすい。

4.2 最小消去多項式の構成法

特性多項式の既約分解が $\chi(z) = f_1^{\ell_1} \cdots f_m^{\ell_m}$ であれば、最小消去多項式は

$$\pi_j(z) = f_1^{\ell_{1j}} \cdots f_m^{\ell_{mj}}, \quad \ell_{ij} \leq \ell_i$$

の形になる。つまり、既約因子は分かるため指数ベクトル $(\ell_{1j}, \dots, \ell_{mj})$ が問題である。指数ベクトルは次の手順で求めることができる。

アルゴリズム 3.

$k = 1, \dots, m$ について次を行う。

1. $\chi_k(z) = \chi(z)/f_k(z)^{\ell_k}$ とおき、 $b_{kj} = \chi_k(A) e_j$ をすべて求める。
2. $b_{kj} = \mathbf{0}$ ならば、 $\ell_{kj} = 0$ である。 $b_{kj} \neq \mathbf{0}$ ならば、順に $f_k(A)$ を左からかけて、 $f_k(A)^p b_{kj} = \mathbf{0}$ となる最小の $p > 0$ が $\ell_{kj} = p$ である。

さて、この方法で最小消去多項式が計算できることは分かったが、問題点は計算量が大いことである。したがって、確率的アルゴリズムを導入して高速化を図る。確率的アルゴリズムのポイントは、

$$\pi_j(A) e_j = \mathbf{0} \quad \text{ならば} \quad {}^t v \pi_j(A) e_j = 0$$

という事実である。 v を乱数ベクトルにとり、 ${}^t v \pi_j(A) e_j = 0$ で最小消去多項式を探索すれば、ほぼ確率 1 で最小消去多項式を発見できることが期待される。

アルゴリズム 4. 乱数ベクトル v を選び、 $k = 1, \dots, m$ について次を行う。

1. $\chi_k(z) = \chi(z)/f_k(z)^{\ell_k}$ とおき、 ${}^t v_k = {}^t v \chi_k(A)$ をすべて求める。

2. ${}^t v_k e_j = 0$ ならば、 $\ell_{kj} = 0$ と置く。0 でなければ、 ${}^t v$ に順に $f_k(A)$ を右からかけて、 ${}^t v_k f_k(A)^p$ を求め、 ${}^t v_k f_k(A)^p b_{kj} = 0$ となる最小の $p > 0$ で $\ell_{kj} = p$ と置く。
3. 推定した指数ベクトルが最小消去多項式になっているか $\pi_j(A) e_j$ を実際に計算して確認。最小消去多項式でなければアルゴリズム 3 でやり直し。

ステップ 1 では、すべての $v_1, \dots, v_m$ を求めるには、ベキ乗算 ${}^t u \mapsto {}^t u f_k(A)^{\ell_k}$ が m^2 回必要であるように思えるが、2 分探索の方法を用いれば、およそ $m \log_2 m$ 回で実行可能である。また行列 $\chi_k(A)$ を計算するより、ベクトル ${}^t v \chi_k(A)$ の計算の方がはるかに計算量が小さい。よって、 $\chi_k(A)$ を計算しておいて、再利用を試みるのは計算量的に危険だが、 ${}^t v \chi_k(A)$ ではそれほどでもない。しかもアルゴリズム 4 は、全てのステップで並列化できる。

5 拡張行列ホーナー法

既に見たように、アルゴリズム 2 のステップ 5 では、行列多項式 $F_{ij}(\lambda_i E, A) e_j$ の計算を行うことになる。 $F_{ij}(z, y)$ を変数 z で展開し、 $F_{ij}(z, y) = \sum_{k=0}^{\deg f_i - 1} F_{ij}^{(k)}(y) z^k$ と表されたとすれば、 $P_i e_j = \sum_{k=0}^{\deg f_i - 1} \lambda_j^k \{F_{ij}^{(k)}(A) e_j\}$ である。よって、一般に多項式 $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ と行列 (またはベクトル) G に対して、 $f(A)G$ を計算する必要がある。これには (行列) ホーナー法と呼ばれる方法が広く利用されている。

アルゴリズム 5 (ホーナー法).

入力: $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, A : 正方行列, G : 行列

出力: $F_n = f(A)G$

数列 $\{F_0, F_1, \dots, F_n\}$ を漸化式

$$F_0 = a_0 G, \quad F_i = A F_{i-1} + a_i G$$

で求める。

よく知られているように、ホーナー法では、 A が m 次平方行列、 G が $m \times m'$ 行列のとき、 m 次平方行列と $m \times m'$ 行列の積計算が $\deg f$ 回必要である。したがって、計算量は $O(m^2 m' \deg f)$ となる。

次にわれわれの提案する拡張行列ホーナー法について述べる。 n 次多項式 $f(x)$ に対し $d < n$ を固定し、 $k = \lfloor n/d \rfloor$ と置く。多項式列 $\{b_i(x)\}_{i=1, \dots, k}$ が存在して

$$f(x) = b_0(x) x^{dk} + b_1(x) x^{d(k-1)} + \dots + b_{k-1}(x) x^d + b_k(x),$$

$$\deg b_0 = (n \bmod d) \leq d-1, \quad \deg b_1 = \dots = \deg b_k = d-1$$

と書ける。この分解を用いれば、 $f(A)G = \sum_{i=0}^k (A^d)^{k-i} (b_i(A)G)$ となる。したがって次のアルゴリズムを得る。

アルゴリズム 6 (拡張行列ホーナー法).

入力: A : 正方行列, G : 行列, $f(x)$: 多項式, 自然数 $d < \deg f$

出力: $F_k = f(A)G$

1. A^d を計算。
2. $AG, \dots, A^{d-1}G$ を計算。
3. $B_i = b_i(A)G$ を、 $G, AG, \dots, A^{d-1}G$ の線形結合で計算。

4. 数列 $\{F_0, F_1, \dots, F_k\}$ を漸化式

$$F_0 = B_0, \quad F_i = A^d F_{i-1} + B_i$$

で求める。

さて、アルゴリズム 6 の計算量はどのくらいであろうか。まずステップ 1 では、 m 次平方行列の積計算が $\log_2 d$ 回必要である。ステップ 2 では m 次平方行列と $m \times m'$ 行列の積計算が $d-1$ 回、ステップ 4 では、 m 次平方行列と $m \times m'$ 行列の積計算が $k = \lfloor (\deg f)/d \rfloor$ 回必要である。したがって、計算量は $O(m^3 \log_2 d + m^2 m' (d + \lfloor (\deg f)/d \rfloor))$ である。

よって、 $m = m'$ のときの計算量は、ホーナー法では $O(m^3 \deg f)$ 、拡張行列ホーナー法では $O(m^3 (\log_2 d + d + \lfloor (\deg f)/d \rfloor))$ であるから、 $\deg f$ が十分大きいとき、 $d \approx \sqrt{\deg f}$ 程度にとれば、拡張行列ホーナー法が高速であると考えられる。また、 A^d の計算から、 d は 2 のべきにとるべきだと考えられる。

われわれは拡張ホーナー法を Risa/Asir 上に実装して実験を行った。いま、 A, G を 50 次平方行列とし、行列要素は 128bit 整数とした。また、 $\deg f = 24$, $d = 4$ とした。実験結果は表 1 の通りであるが、 $\log_2 d + d + n/d = 2 + 4 + 6 = 12$, $\deg f = 24$ であることから、経過時刻については、理論的な予想と合致していると考えられる。さらにヒープ使用量の単位は 1 ワード = 4 バイトであるが、拡張行列ホーナー法がずっと効率的であることは注目すべき点である。

	経過時刻 (sec.)	ヒープ使用量
ホーナー法	4.62854	405207638
拡張ホーナー法 (A^d)	0.121392	9888130
拡張ホーナー法 (残り)	2.46518	134538172

表 1: ホーナー法と拡張ホーナー法の比較 (G が行列の場合)

一方、 $m' = 1$ のときの計算量は、ホーナー法では $O(m^2 \deg f)$ 、拡張行列ホーナー法では $O(m^2 (m \log_2 d + d + \lfloor (\deg f)/d \rfloor))$ である。したがって、拡張行列ホーナー法では高速化されないと考えられる。Risa/Asir での実験結果は表 2 の通りであり、従来のホーナー法が高速である。しかしながら、拡張ホーナー法では、ステップ 1 の A^d の計算が支配的であり、ステップ 2,3,4 は高速である。したがって、スペクトル分解のように行列多項式計算を繰り返す場合は、特に並列計算を前提とする本研究では、ステップ 1 を前処理として切り放すことで計算を効率化できると考えられる。

	経過時刻 (sec.)	ヒープ使用量
ホーナー法	0.102155	8134524
拡張ホーナー法 (A^d)	0.118509	9891382
拡張ホーナー法 (残り)	0.048656	2693552

表 2: ホーナー法と拡張ホーナー法の比較 (G がベクトルの場合)

以上の考察から、アルゴリズム 2 のステップ 5 において、ホーナー法と拡張行列ホーナー法をそれぞれ用いたタイミングデータを比較した。

- 実験環境: Linux/amd64 2.6.39, Xeon E5645 (6-core, 2.4GHz) × 2, 96GB memory
- A : 48 次行列, $\pi(z) = \prod_{i=1}^4 f_i(z)^4$, $\deg f_i(z) = 3$.
- $d = 4$

並列数	4	8	12	16
ホーナー法	17.5808	11.2535	10.1178	7.65906
拡張ホーナー法	6.63459	4.83164	4.54308	4.47518

表 3: ホーナー法と拡張ホーナー法の比較 (スペクトル分解)

参 考 文 献

- [1] 小原功任, 田島慎一: 行列のスペクトル分解・固有ベクトルの分散計算, 京都大学数理解析研究所講究録 **1666**(2008), 65–68.
- [2] K. Ohara and S. Tajima: Spectral Decomposition and Eigenvectors of Matrices by Residue Calculus, Proceedings of the Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009, COE Lecture Note **22** (2009), Kyushu University, 137–140.
- [3] 加藤涼香, 田島慎一: 有理関数のローラン展開アルゴリズムと代数的局所コホモロジー, 京都大学数理解析研究所講究録 **1395**(2004), 50–56.
- [4] 庄司卓夢, 田島慎一: 1 変数代数的局所コホモロジー類に対する Risa/Asir 用パッケージ taji_alc, Risa/Asir Journal **2** (2007), 1–32.
- [5] 田島慎一, 飯塚由貴恵: 行列のスペクトル分解アルゴリズムについて, 京都大学数理解析研究所講究録 **1666**(2008), 49–56.
- [6] 飯塚由貴恵, 田島慎一: 行列のスペクトル分解アルゴリズム—最小多項式が重複因子を持つ場合, 数式処理 **16-2** (2009).
- [7] 飯塚由貴恵, 田島慎一: 行列のスペクトル分解アルゴリズム—最小多項式が複数の重複因子から成る場合, 京都大学数理解析研究所講究録