

回路の正則化について.

名大教養部 池上 宜弘

§1. 序論

LCR -回路 N に寄生 inductor と寄生 capacitor を添加して (素子を N から取り去らないで) 正則回路 $\tilde{N}$ を構成しようとするとき, 次の2つの問題に遭遇する. 第1の問題は, 正則化された回路 $\tilde{N}$ の力学系と, どのように関連づけて N の力学系を大域的に取扱うことができるか. 各々の力学系の相空間である, N と $\tilde{N}$ の configuration manifold N と $\tilde{N}$ は全く別の Kirchhoff space の中に存在している所にこの問題の難しさがある. 第2の問題は, どのようにすれば N の単純な正則化 $\tilde{N}$ が得られるか, ということである.

第1の問題を扱うために, homotopic regularization (定義3.2) とよばれる正則化の族を考える. これは一般に知られている正則化のほとんどを含んでいる. 実際, E. Ihrig [2] による正則化は homotopic regularization になっている. 又, homotopic reg. は著者が [3], [4] で取扱った正則化の族も含んでいる.

homotopic regularization は回路の拡大の 1 つであるが、これは homotopic extension (定義 2.1) という拡大の族に入っている。§2 の命題 2.2 と命題 2.3 は homotopic Ext. の性質を与えている。これ等の性質は [3], [4] にある命題の拡張となっている。

§3 では、1 つの主定理である定理 A が証明されて書かれている。定理 A は次のことを示している。すなわち、 $\tilde{N}$ を N の homotopic regularization とすると、 N の configuration manifold Σ は $\tilde{N}$ の configuration manifold $\tilde{\Sigma}$ の部分多様体 $\tilde{\Sigma}_0$ として canonically に表わされる。 N の力学系 X は Σ の正則領域 Σ_R 上のベクトル場であるが、これは $\tilde{\Sigma}_0$ の normally regular domain $(\tilde{\Sigma}_0)_r$ と呼ばれる領域上のベクトル場 X_0 と canonically に同一視できる。

§4 では、もう 1 つの主定理である定理 B を示す。これは、回路 N が正則であるためのグラフ理論的な必要十分条件を示したものである。ただし、 N の低抗は広い意味での電流制御又は電圧制御型であると仮定されている。

§2. 準備

N を与えられた回路 N に対応する方向づけられたグラフとする。 N の状態は電流ベクトル、 $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{R}_i^n$ と

電圧ベクトル, $v = (v_1, \dots, v_b) \in \mathbb{R}_v^b$ によ, て表わされる. ただし b は N の枝の個数とする.

定義 2.1. 次のようなグラフ $\tilde{N}$ を N の homotopic extension という: グラフの列 $N = N_0, N_1, \dots, N_{n-1}, N_n = \tilde{N}$ があり, 任意の $k = 1, \dots, n$ に対して, N_k は N_{k-1} に枝 e_k を次の (L) 又は (C) の方法で付け加えることにより得られたものである.

(L) N_{k-1} の 1 つの枝と直列に e_k を付け加える.

(C) N_{k-1} の 2 頂点を e_k で結ぶ.

$K, \tilde{K}$ を各々 $N, \tilde{N}$ の Kirchhoff space とする.

$$\tilde{i} = (i_1, \dots, i_b, i'_1, \dots, i'_n) \in \mathbb{R}_i^{b+n}$$

$$\tilde{v} = (v_1, \dots, v_b, v'_1, \dots, v'_n) \in \mathbb{R}_v^{b+n}$$

を $\tilde{N}$ の状態ベクトルとする. ただし, $\tilde{N}$ は N に $e_1, \dots, e_n$ を付け加えて得られたものであり, i'_j, v'_j は e_j に対応しているものとする.

$$\tilde{K}_0 \equiv \left\{ (\tilde{i}, \tilde{v}) \in \tilde{K} \mid \begin{array}{l} v'_j = 0 \text{ if } e_j \text{ is (L)-type} \\ i'_j = 0 \text{ if } e_j \text{ is (C)-type} \end{array} \right\}$$

とする.

命題 2.2. $\tilde{N}$ が N の homotopic extension ならば, 自然な射影 $\pi_0: \mathbb{R}_i^{b+n} \times \mathbb{R}_v^{b+n} \longrightarrow \mathbb{R}_i^b \times \mathbb{R}_v^b, ((i, i'), (v, v')) \longmapsto (i, v)$, は線形同型写像 $\pi_0|_{\tilde{K}_0}: \tilde{K}_0 \rightarrow K$ を引き起す.

$\mathcal{N}$ を l 個の inductor, c 個の capacitor, r 個の resistor から成る連結回路とする. $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{R}$ を各々 $\mathcal{N}$ の inductor, capacitor, resistor の集合とする. $\mathcal{N}$ の状態ベクトル $\mathbf{z}$ は $\mathbf{z} = (i_L, i_C, i_R)$, $\mathbf{v} = (v_L, v_C, v_R)$ で表わされる. $m = l + c + r$ とすれば, $(i_L, v_L) \in \mathbb{R}^{2l}$, $(i_C, v_C) \in \mathbb{R}^{2c}$, $(i_R, v_R) \in \mathbb{R}^{2r}$, $(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{2m}$ となる.

抵抗の特性に関して, 次の3種類の場合を考える.

A1: 任意の抵抗 R_j の電流 i_j と電圧 v_j は, 1次元 C^∞ 多様体 Λ_j が存在して, $(i_j, v_j) \in \Lambda_j \subset \mathbb{R}^2$ をみたす.

A2: r 次元 C^∞ 多様体 Λ_R が存在して, $(i_R, v_R) \in \Lambda_R \subset \mathbb{R}^{2r}$ をみたす.

A3: $(2m-r)$ 次元 C^∞ 多様体 Λ が存在して, $(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \in \Lambda \subset \mathbb{R}^{2m}$ をみたす.

A1 が成立すれば, $\Lambda_R = \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_r$ とし, A2 が成立する. A2 が成立すれば, $\Lambda = \Lambda_R \times \mathbb{R}^{2l} \times \mathbb{R}^{2c}$ とし, A3 が成立する. A2 の場合, [8] によって, $\mathbb{R}^{2r}$ における Λ_R の振動 $\hat{\Lambda}_R$ が存在して, $\mathbb{R}^{2m}$ において $\hat{\Lambda}_R \times \mathbb{R}^{2l} \times \mathbb{R}^{2c}$ 上の K が成立する: $\hat{\Lambda}_R \times \mathbb{R}^{2l} \times \mathbb{R}^{2c} \cap K$ が成立する. ($\cap$ は横断交差を意味する.) A3 の場合, Λ の振動 $\hat{\Lambda}$ が存在して, $\hat{\Lambda} \cap K$ となる. 従って, A2 と A3 の場合には $\Lambda \cap K$ が成立してゐるものと仮定する.

この仮定のもとでは, $\Sigma = \Lambda \cap K$ は $(l+c)$ 次元 C^∞ 多様体

である. Σ を $\mathcal{N}$ の configuration manifold とする.

$\tilde{N}$ を $\mathcal{N}$ に対応する graph N の homotopic extension とし, $\tilde{N} = N \cup L' \cup C'$ とし, $R_i^m \times R_v^m$ を N の状態空間, $R_i^{m+n} \times R_v^{m+n}$ を $\tilde{N}$ の状態空間, $R_i^m \times R_v^m$ を $L' \cup C'$ の状態空間とする. $\Lambda \subset R_i^m \times R_v^m$ を上記の C^q 多様体とすれば, $\tilde{\Lambda} = \Lambda \times R_i^m \times R_v^m \subset R_i^{m+n} \times R_v^{m+n}$ である. 命題 2.2 と同じ記号を用い, 次の成立する.

命題 2.3. Λ 和 K とすれば, 次の成立する.

- (i) $R_i^{m+n} \times R_v^{m+n}$ において $\tilde{\Lambda}$ 和 $\tilde{K}$, 従って, $\tilde{N}$ の configuration manifold $\tilde{\Sigma} \equiv \tilde{\Lambda} \cap \tilde{K}$ は C^q 多様体である.
- (ii) $\tilde{K}$ において $\tilde{\Sigma}$ 和 $\tilde{K}_0$, 従って, $\tilde{\Sigma}_0 \equiv \tilde{\Sigma} \cap \tilde{K}_0$ は C^q manifold である.
- (iii) $\tilde{\pi}_0$ は $\tilde{\Sigma}_0$ を Σ の上に微分同相にうつす.

注意. homotopic extension は [3] と [4] の fundamental extension を拡張した概念である. 従って, [3, Proposition 2.2] と [4, Proposition 2.2] はこの論文の Proposition 2.2 によつて拡張され, [3, Prop. 2.4] と [4, Prop. 2.4] は Proposition 2.3 によつて拡張される.

§ 3. Homotopic perturbation と homotopic regularization.

この章では, $\Lambda 1$, $\Lambda 2$, $\Lambda 3$ の場合分けについて問題をしないとする. Λ 和 K , $\tilde{\Lambda}$ 和 $\tilde{K}$ 等は仮定されるものとする.

$L_1, \dots, L_\ell \in \mathcal{N}$ の inductors, $C_1, \dots, C_c \in \mathcal{N}$ の capacitors, $R_1, \dots, R_r \in \mathcal{N}$ の resistors とし, $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{R}$ を各々の集合とする. すなわち, $\mathcal{N} = \mathcal{L} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{R}$ となる. $\mathcal{N}$ の configuration manifold は $\mathbb{C}^{l+c}$, $l \geq 1$ とする. L_j の inductance は $\mathbb{C}^*$ 級の 実数値関数, $L_j(i_j) \neq 0$ とする, ただし, i_j は L_j の電流であり, $j=1, \dots, \ell$. 同様に C_k の capacitance は $C_k(v_k) \neq 0$ で $\mathbb{C}^*$ 級とする, $k=1, \dots, c$. この様な回路 $\mathcal{N}$ は $\mathbb{C}^*$ 級回路 とよぶことにする.

$\mathbb{C}^*$ 級回路 $\mathcal{N}$ の力学系は次の式で決定される Σ 上の Σ に接するベクトル場 X である.

$$\frac{di_j}{dt} = \frac{1}{L_j(i_j)} v_j, \quad j=1, 2, \dots, \ell \quad (3.1)$$

$$\frac{dv_k}{dt} = \frac{1}{C_k(v_k)} i_k, \quad k=1, 2, \dots, c. \quad (3.2)$$

$\mathcal{N}, \mathcal{L}, \dots$ 等の電流空間を $\mathcal{N}_*, \mathcal{L}_*, \dots$ で, 電圧空間を $\mathcal{N}^*, \mathcal{L}^*, \dots$ 等で表わすとき,

$$\sigma: \Sigma \longrightarrow \mathcal{L}_* \times \mathbb{C}^* \quad (3.3)$$

を natural projection $\mathcal{N}_* \times \mathcal{N}^* \longrightarrow \mathcal{L}_* \times \mathbb{C}^*$ の Σ への制限とする. $\dim \Sigma = l+c$ に注意して, $x \in \Sigma$ が singular point であるとは, 微分

$$d\sigma(x): T_x \Sigma \longrightarrow \mathcal{L}_* \times \mathbb{C}^*$$

が退化していることである, とする. 他の $x \in \Sigma$ は regular

point である。regular point $x \in \Sigma$ 全体の集合を regular domain である Σ_R で記す。 $\Sigma = \Sigma_R$ であるとき、 N は regular (正則) であるという。 N が regular であれば Σ 全体でベクトル X は定義されるが、一般には X は Σ_R 上のみで定義される。

定義 3.1. $\tilde{N}$ が N の homotopic perturbation であるとは、回路の列 $N = N_0, N_1, \dots, N_{n-1}, N_n = \tilde{N}$ で次の様なものが存在することである: N_k は N_{k-1} に次の (L) または (C) の方法で寄生素子を 1 個付け加えたものである。

(L) N_{k-1} の 1 つの素子と直列に寄生 inductor を入れる。

(C) N_{k-1} の 2 点を寄生 capacitor でつなぐ。

定義 3.2. N の homotopic perturbation $\tilde{N}$ が正則なとき、 $\tilde{N}$ homotopic regularization とよぶ。

注意. [3], [4] において、著者は "regularized network perturbation" なるものを定義して、E. Izhrig [2] の構成はこの n. n. p. でありと書いたが、これは正しくないのを訂正したい。一方、E. Izhrig [2] による構成は homotopic regularization になっていて、n. n. p. は hom. reg. になっていることを、ここで注意しておきたい。

N の hom. reg. $\tilde{N}$ の constrained manifold $\tilde{\Sigma}$ 上に 1 つの葉層構造 $\mathcal{F}_{\tilde{N}}$ を次のように canonical に構成する。 $\tilde{N}$ に対して、

$$\tilde{\sigma} : \tilde{\Sigma} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_* \times \tilde{\mathcal{C}}^*$$

は (3.3) と同様に定義され、写像とする。 $\tilde{N}$ は正則であるから $\tilde{\sigma}$ は局所的には微分同相である。 $\mathcal{L}', \mathcal{C}'$ を $\tilde{N}$ の寄生素子とすれば、 $\tilde{\mathcal{L}}_* \times \tilde{\mathcal{C}}^* = (\mathcal{L}_* \times \mathcal{C}^*) \times (\mathcal{L}'_* \times \mathcal{C}'^*)$ となる。

$\mathcal{L}_* \times \mathcal{C}^* \cong \mathbb{R}^{l+c}$, $\mathcal{L}'_* \times \mathcal{C}'^* \cong \mathbb{R}^{l'+c'}$ とおく。ただし、 l, l', c, c' は inductor, capacitor の個数である。すると、写像

$$\tilde{\sigma}: \tilde{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad n=l+c, \quad m=l'+c'$$

の微分 $d\tilde{\sigma}$ は各点において非退化である。よって、 $\tilde{\Sigma}$ の open covering $\{U_i\}$, $i=1, 2, \dots$ が存在して、 $\varphi_i \equiv \tilde{\sigma}|_{U_i}$ は $\tilde{\Sigma}$ の像と微分同相である。 φ_i は大域的な写像 $\tilde{\sigma}$ の制限であるから、

$$\{(U_i, \varphi_i)\}, \quad \varphi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (3.4)$$

は $\tilde{\Sigma}$ 上の余次元 $l+c$ の葉層構造 $\mathcal{F}_{\tilde{N}}$ の atlas となる。 $\varphi_i^{-1}(* \times \mathbb{R}^{l'+c'})$ は $\mathcal{F}_{\tilde{N}}$ の葉に含まれている。 $\tilde{N}$ が C^q 級であれば、 $\mathcal{F}_{\tilde{N}}$ も C^q 級である。
(これを plaque とする)

$\tilde{N} = \mathcal{N} \cup (\mathcal{L}' \cup \mathcal{C}')$ に注意して、 $\tilde{\pi}_0: \tilde{N}_* \times \tilde{N}^* \rightarrow \mathcal{N}_* \times \mathcal{N}^*$ を自然な射影とする。 $i_{\tilde{N}} = (i_N, i_{\mathcal{L}'}, i_{\mathcal{C}'}) \in \tilde{N}_*$, $v_{\tilde{N}} = (v_N, v_{\mathcal{L}'}, v_{\mathcal{C}'}) \in \tilde{N}^*$ とし、 $\tilde{K}_0$ を $i_{\mathcal{C}'}=0, v_{\mathcal{L}'}=0$ を満たす $\tilde{K}$ ($\tilde{N}$ の Kirchhoff eq.) の元 $(i_{\tilde{N}}, v_{\tilde{N}})$ 全体から成る集合とする。

$$\tilde{\Sigma}_0 \equiv \tilde{K}_0 \cap \tilde{\Sigma} \quad (3.5)$$

とする。

$p \in \tilde{\Sigma}_0$ に対して、 $L_p \ni p$ を含む $\mathcal{F}_{\tilde{N}}$ の plaque とする。

$$(\tilde{\Sigma}_0)_r \equiv \{p \in \tilde{\Sigma}_0: \tilde{\Sigma}_0 \cap L_p \text{ in } \tilde{\Sigma}\}$$

$\tilde{\Sigma}_0$ の normally regular domain といふ.

$p \in (\tilde{\Sigma}_0)_r$ に対し, 次のような自然な射影が存在する.

$$\nu: T_p \tilde{\Sigma} = T_p \tilde{\Sigma}_0 \oplus T_p L_p \longrightarrow T_p \tilde{\Sigma}_0. \quad (3.6)$$

X を (3.1), (3.2) で与えられる $\tilde{\Sigma}$ 上のベクトル場とする. X_0 を次の式で与えられる $(\tilde{\Sigma}_0)_r$ 上のベクトル場とする.

$$X_0(p) \equiv \nu X(p), \quad p \in (\tilde{\Sigma}_0)_r. \quad (3.7)$$

すると, X_0 も (3.1) と (3.2) によ, り決まる $(\tilde{\Sigma}_0)_r$ 上のベクトル場である.

$f: M \rightarrow N$ を一般の微分多様体の微分同相とし, X を M 上のベクトル場とすると, $(f_* X)(fp) \equiv (df)_p X(p)$ でままる $f_* X$ は f によって 導入される N 上のベクトル場といふ.

次の定理は [3, Theorem 4.4] と [4, Theorem 3.6] の部分的拡張である.

定理 A. $\tilde{N}$ を N の homotopic C^r regularization とする. Σ , $\tilde{\Sigma}$ を各々 N , $\tilde{N}$ の configuration manifolds とする. すると $\tilde{\Sigma}$ の submanifold $\tilde{\Sigma}_0$ で canonical に定義されるものが存在し, これは $\tilde{\pi}_0: (i_{\tilde{N}}, v_{\tilde{N}}) \mapsto (i_N, v_N)$ により Σ と同一視される. $(\tilde{\Sigma}_0)_r$ を葉層構造 $\mathcal{F}_{\tilde{N}}$ に関する $\tilde{\Sigma}_0$ の normally regular domain とする. X_0 を (3.7) で定義される $(\tilde{\Sigma}_0)_r$ 上のベクトル場とする. このとき次の (i), (ii) が成立する.

(i) normally regular domain $(\tilde{\Sigma}_0)_r$ の $\tilde{\pi}_0$ による像は regular

$\text{domain } \Sigma_R \subset \Sigma$ と一致する.

(ii) X を $\mathcal{N}$ の力学系 (Σ で定義されている), X_0 を (3.7) で与えられる $(\tilde{\Sigma}_0)_r$ 上のベクトル場とするとき, $(\tilde{\pi}_0)_* X_0 = X$ が成立する.

定理 A (i) は, この意味で normally regular domain は $\mathcal{N}$ の homotopic regularization $\tilde{\mathcal{N}}$ の選定に無関係であることを示している.

§ 4. 回路が正則となる条件.

定義 4.1. 抵抗の集合 R の特性が次の条件をみたしているとき, R は 電流制御 又は 電圧制御 (弱い意味で) であるという.

(i) 次の分割が存在する: $R = R_i \cup R_v$.

(ii) 次の C^r 級関数が存在する ($r \geq 1$):

$$f_i: (R_i)_* \longrightarrow (R_i)^*,$$

$$f_v: (R_v)^* \longrightarrow (R_v)_*.$$

(iii) R の特性は $(i_R, v_R) \in \Lambda_R$ によって与えられる. ただし, Λ_R は次の式で定義された多様体である:

$$\Lambda_i \equiv \{(i, f_i(i)) : i \in (R_i)_*\},$$

$$\Lambda_v \equiv \{(f_v(v), v) : v \in (R_v)^*\},$$

$$\Lambda_R \equiv \Lambda_i \times \Lambda_v.$$

従, 7 上の定義は 12 の特別な場合であり, 11 は定義 4.1 の特別な場合である.

定義 4.2. 回路 N の抵抗 R は電流制御又は電圧制御とする.
 分割 $N = \mathcal{L} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{R}_i \cup \mathcal{R}_v$ において, $\mathcal{C} \cup \mathcal{R}_i$ が (maximal) tree ($\Leftrightarrow \mathcal{L} \cup \mathcal{R}_v$ が cotree) であるとき, N は 条件 α をみたすという.

命題 4.3. 条件 α をみたす回路 N に対して, 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) $\mathcal{R}_v$ に含まれる任意の抵抗 R に対して, 他の枝はすべて $\mathcal{C}$ に含まれるような R を含む loop が存在する.

(ii) $\mathcal{R}_i$ に含まれる任意の抵抗 R に対して, 他の枝はすべて $\mathcal{L}$ に含まれるような R を含む cut set が存在する.

定義 4.4. 回路 $N = \mathcal{L} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{R}_i \cup \mathcal{R}_v$ が 命題 4.3 の (i) 又は (ii) をみたすとき, N は 条件 β をみたすという.

定理 B. 回路 N の抵抗 R は電流制御又は電圧制御 (定義 4.1 の意味で) とする. 分割 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \cup \mathcal{R}_v$ は固定されているものとする. このとき, 次が成立する:

(4.2) の任意の C^r 関数 ($r \geq 1$) に対して N は正則
 $\iff N$ は条件 α と条件 β をみたす.

注意 4.5. S. Smale が出した問題 [10] に答え, E. Ihrig

[2]は N の正則化 $\tilde{N}$ を構成する方法をみつけた。(この場合の N は強い意味での電流制御又は電圧制御の抵抗を持っている.)
 E. Ihmig の構成は多くの寄生素子を使っているが, 定理 A を使えば, より簡単な正則化が得られる.

回路 N に対し, 全ての capacitor を含み, inductor を 1 個も含める tree (proper tree) が存在するとき, N は complete (又は forced degeneracy を持たない) と言われる. ([9, Chap 14] 又は [1, pp. 13 and 4])

系 4.5. 回路 N は complete で, N の抵抗 R は電流制御又は電圧制御であるとする. $R = R_i \cup R_v$, R_i は電流制御の抵抗, R_v は電圧制御の抵抗とする. $\mathcal{T}$ は R_i に含まれる抵抗をなるべく多く含む proper tree とし, $\mathcal{T}^c$ は対応する cotree とする. すると, 次の (i) (又は (i)') と (ii) により, N に寄生素子を付け加えて出来る回路 $\tilde{N}$ は正則である.

(i) 抵抗 $R_i \in R_i \cap \mathcal{T}$ に対して, 次のような cut set A があれば, R_i の枝を Figure 1 のように変える: (a) $R_i \in A$, (b) $A - R_i \subset \mathcal{T}^c$, (c) $A \cap R_v \cap \mathcal{T}^c \neq \emptyset$.

(i)' 抵抗 $R_v \in R_v \cap \mathcal{T}^c$ に対して, 次のような loop B があれば, R_v の枝を Figure 2 のように変える: (a)' $R_v \in B$, (b)' $B - R_v \subset \mathcal{T}$, (c)' $B \cap R_i \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$.

(ii) $\mathcal{T}$ に含まれる任意の電圧制御抵抗 ($\in R \cap \mathcal{T}$) に並列に

capacitor を 1 個 加える. $\mathcal{I}^c$ 中の 任意の 電流制御 抵抗 ($\in R_i \cap \mathcal{I}^c$) に 直列に inductor を 1 個 付け加える.

注意 4.6. 川上氏と松本氏は [7] で forced degeneracy を持たない回路の正則化を示している. [7] の方法は系 4.5 の (i) 又は (i)' の代りに 次の (i)'' を ほどこす.

(i)'' $\mathcal{I}$ に 含まれる 全ての 抵抗に 並列に capacitor を 付け加え, $\mathcal{I}^c$ の 全ての 抵抗に 直列に inductor を 加える.

(i)'' の後に 系 4.5 の (ii) を ほどこす. 従って 系 4.5 は [7] の方法より 単純な正則化の方法を与えているという意味で [7] の改良である.

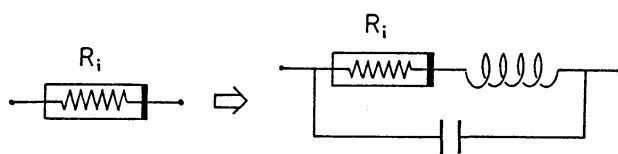


FIGURE 1

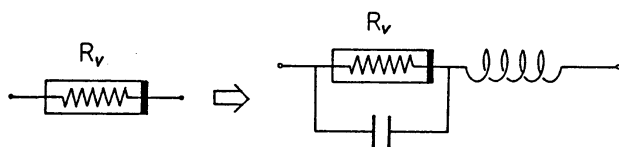


FIGURE 2

References

- [1] R.K. Brayton and J.K. Moser: A theory of nonlinear networks I, Quart. Appl. Math., vol. 22(April 1964), pp. 1-33.
- [2] E. Ihrig: The regularization of nonlinear electrical circuits, Proc. AMS, vol. 47(1975), pp. 179-183.
- [3] G. Ikegami: "Geometric singular perturbation theory for electrical circuits", The Theory of Dynamical Systems and Its Application to Nonlinear Problems, Singapore, World Sci. Publ., 1984, pp. 109-123.
- [4] G. Ikegami: "On network perturbations of electrical circuits and singular perturbation of dynamical systems", Chaos, Fractals, and Dynamics, New York, Marcel Dekker, 1985, pp. 197-212.
- [5] G. Ikegami: "Singular perturbations for constraint systems", Dynamical Systems and Nonlinear Oscillations, Singapore, World Sci. Publ., 1986, 27-49.
- [6] G. Ikegami: Singular Perturbations in Foliations, Preprint Ser. No. 2, Nagoya, Coll. of Gen. Education, Nagoya University, 1986.
- [7] H. Kawakami and T. Matsumoto: "Examples of circuits and on regularization of circuits", RIMS Kokyuroku, vol. 536(1976), pp. 186-201, Japan, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ., (Japanese).
- [8] T. Matsumoto, G. Ikegami, and L.O. Chua: Strong structural stability of resistive nonlinear n-ports, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-30, (April 1983), pp. 197-222.
- [9] R.A. Rohrer: Circuit Theory: An Introduction to the State Variable Approach, New York, McGraw-Hill, 1970.
- [10] S. Smale: On the mathematical foundations of electrical circuit theory, J. Differential Geometry, vol. 7(1972), pp. 193-210.