

離散 Painlevé 方程式の自己双対構造

広大工 太田 泰広 (Yasuhiro Ohta)

1 はじめに

Painlevé 方程式とは、Painlevé 性（動く特異点は極であるという性質）を満たす 2 階常微分方程式のうちで、簡単な函数では求積できない方程式のことであり、変数変換で互いに移りあわないものが 6 種類ある。¹⁾ これを差分化して、離散版の Painlevé 性の概念である特異点閉込め²⁾ (singularity confinement、動く特異点は有限区間に閉じ込められるという性質) を満たす 2 階常差分方程式のうちで、簡単な函数では求積できないものを、離散 Painlevé 方程式と呼ぶ。³⁾ それらに対しては連続の Painlevé 方程式に収束するような極限の取り方があり、その連続極限で Painlevé I~VI のどの方程式に行くかに応じて、離散 Painlevé X 方程式 (dPX) ($X=I\sim VI$) と呼ばれることが多い。連続の場合に Painlevé 方程式がわずか 6 種類に分類されたのに対し、離散 Painlevé 方程式は現在までに数十種類が知られており、(各 $X=I\sim VI$ に対してその離散アナログが複数個存在する。) それらをどのように分類したらいいかという問題が考えられてきた。例えば、離散 Painlevé 方程式として

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{an + b}{x_n} + c \quad (1)$$

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{an + b}{x_n} + c \quad (2)$$

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{(an + b)x_n + c}{x_n^2 - d^2} \quad (3)$$

$$\frac{a(n+1) + b}{1 + x_{n+1}x_n} + \frac{an + b}{1 + x_nx_{n-1}} = c \left(x_n - \frac{1}{x_n} \right) + an + b + d \quad (4)$$

などが知られている。ここで、 a, b, c, d は定数。これらは上から順に dPI、dPI、dPII、dPII であり、見かけの式の形だけからではどう分類されるべきかは自明ではない。これら様々な離散 Painlevé 方程式の性質を研究する中で発見されたのが、離散 Painlevé 方程式の自己双対構造である。⁴⁾

上の dPII (4) を例にとって、自己双対構造について説明する。⁵⁾ 方程式中のパラメタ a, b, c, d のうち、 a, b, c はスケーリングで消せるので、本質的なパラメタは d だけである。この d について、(4) は Schlesinger 変換をも

つ。すなわち、(4) の一つの解から、(4) でパラメタ d を a だけずらした方程式の解を与える変換が存在する。この Schlesinger 変換を繰返すことによって、 $d = d, d \pm a, d \pm 2a, \dots$ に対する解を構成できる。 $d = am + e$ に対する解を $x_{n,m}$ と書くと、 x は (n, m) 二次元格子上で定義され、 x の n 方向への発展を記述しているのが dPII (4) である。そこで、 x の m 方向への発展を記述する方程式も求めることができ、

$$\frac{am + e}{1 - x_{n,m+1}x_{n,m}} + \frac{a(m-1) + e}{1 - x_{n,m}x_{n,m-1}} = c \left(x_{n,m} + \frac{1}{x_{n,m}} \right) + an + b + am + e$$

となる。上式はもとの dPII (4) とまったく同じ形をしている。(符号はスケールリングで変えられる。) このように、もともとの離散発展方程式と Schlesinger 変換の chain から構成される方程式が同じであるという性質を、自己双対性と呼ぶ。この性質は本質的に離散系特有のものであり、連続系においては存在しない。これまでに様々な離散 Painlevé 方程式が自己双対性をもつことが示されている。以下でより詳しく自己双対構造について解説する。

2 離散 Painlevé I 方程式の自己双対構造^{6,7)}

dPI (1) は可積分性を崩さずに、

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{an + b + (-1)^n b'}{x_n} + c \quad (5)$$

(b' : 定数) の形にまで拡張できる。上式を asymmetric dPI と呼ぶ。可積分性を崩さずにどこまで係数を一般化できるかは、singularity confinement のアルゴリズムによって知ることができる。実はこのように、可積分性の条件の許す範囲内で最大の自由度を方程式に導入しておくことが、自己双対構造を考える上で重要である。以下で、 τ 函数に対する双線形方程式から asymmetric dPI (5) を導出する構成手順を述べる。

1. 二次元三角格子を考える。座標を (n_1, n_2, n_3) で表す。格子間隔は 1 とする。(Figure 1)
2. τ 函数：全格子点を定義域とする函数。ある格子点 (n_1, n_2, n_3) での τ 函数の値を τ とかき、その点からの相対的なシフトを上付きおよび下付きの添字で表す。すなわち、点 $(n_1 + 1, n_2 - \frac{1}{2}, n_3 - \frac{1}{2})$ 、 $(n_1 - 1, n_2 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2})$ での値をそれぞれ τ^1 、 τ_1 などとかく。

3. 双線形方程式： τ が以下の関係式を満たすとする。

$$\tau^i \tau_i - \tau^j \tau_j = 2(n_i - n_j) \tau \tau \quad \text{for } i, j = 1, 2, 3 \quad (6)$$

ただし、 n_i, n_j は τ の点の座標の値。

以上の情報だけから、asymmetric dPI やその Schlesinger 変換の構造がすべて記述される。双線形方程式が自己双対（方程式の形が i, j によらず同じ）であるために、非線形方程式 (5) が自己双対構造をもつことになる。双線形方程式 (6) は過剰決定系であるが、実は consistent であることを注意する。

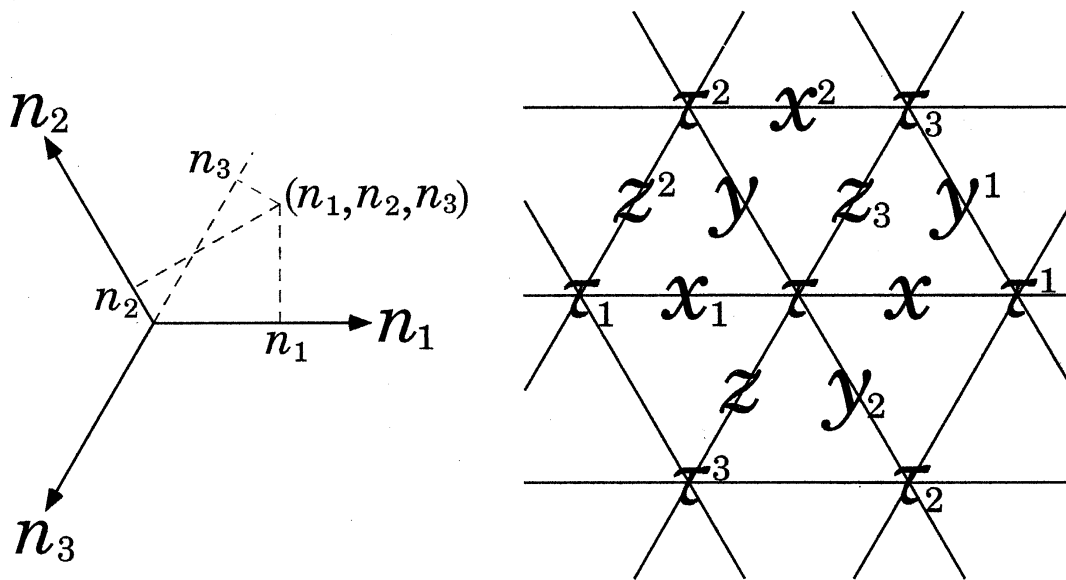


Figure 1: 二次元三角格子と τ, x, y, z の位置関係

非線形変数 x, y, z は、格子の辺の中点を定義域とする函数として、

$$x = \frac{\tau_2 \tau_3}{\tau^1 \tau}, \quad y = \frac{\tau_3 \tau_1}{\tau^2 \tau}, \quad z = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau^3 \tau}$$

で定義される。一般に、分母 = (二つの nearest neighbour の τ の積)、分子 = (二つの next nearest neighbour の τ の積)。 τ のときと同様に相対的なシフトを添字で表すことにすると、双線形方程式 (6) より、例えば

$$yz_3 - xz_3 = 2(n_1 - n_2)$$

$$y^1 z_3 - x^2 z_3 = 2\left(\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) - \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\right)$$

を得る。これらが asymmetric dPI (5) の Schlesinger 変換を与えている。上式より、

$$x + y^1 + z_3 = x^2 + y + z_3$$

となる。同様の式が格子上のいたるところで成立するので、最近接の三つ組 x 、 y 、 z の和は、格子点によらずどこでも同じ値をとることがわかる。この値を α とおくと、

$$\alpha = x + y^1 + z_3 = x^2 + y + z_3 = x_1 + y + z^2 = \dots \quad (7)$$

(実はこの和の値が格子上の位置によらない定数であるという事実が、過剰決定系 (6) が consistent であることを証明している。) 上式と Schlesinger 変換の式より、

$$y^1 + z_3 + y = \frac{2(n_1 - n_2)}{z_3} + \alpha$$

$$z_3 + y + z^2 = \frac{2(n_1 - n_3)}{y} + \alpha$$

を得る。これが適当な記号の書換えのもとで、asymmetric dPI (5) に一致することは簡単にわかる。今の場合、asymmetric dPI の発展方向が n_1 軸の方向であり、それに対する Schlesinger 変換の chain は n_2 、 n_3 軸方向の発展を与える。それらを記述する方程式が同じ asymmetric dPI であることは自明であろう。

定数 α は実は、連続の独立変数としての意味をもつ。 $\alpha = 3t$ とおいて、 τ の t 依存性が

$$(D_t + t)\tau \cdot \tau^i = \tau_j \tau_k \quad \text{for } i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k \neq i \quad (8)$$

で決るとする。ここで D_t は広田の双線形微分演算子である。この t に関する発展 (8) が、離散変数に関する発展 (6)、(7) と consistent であることは、計算すればわかる。(8) より、

$$\begin{aligned} (\log x)_t &= y_2 - y^1 = z_3 - z^1 \\ (\log y)_t &= z_3 - z^2 = x_1 - x^2 \\ (\log z)_t &= x_1 - x^3 = y_2 - y^3 \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。これらから y だけの発展方程式をつくると、

$$y_{tt} = \frac{y_t^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 - 6ty^2 + \left(\frac{9}{2}t^2 + 2n_1 - 4n_2 + 2n_3 - 3\right)y - \frac{2(n_3 - n_1)^2}{y}$$

となって、これは連続の Painlevé IV 方程式に他ならない。そして、(9) は Painlevé IV 方程式の Schlesinger 変換を与えている。このことより、asymmetric dPI は Painlevé IV の Schlesinger chain そのものであることがわかる。⁸⁾

3 その他の離散 Painlevé 方程式の自己双対構造の例

上と同様の議論は他の様々な格子に対しても成立する。以下でいくつか例をあげる。

3.1 2次元⁵⁾

格子：2次元正方格子 (n_1, n_2)

τ 函数：すべての格子点上で定義される。

双線形方程式：

$$\begin{aligned}\tau^{12}\tau_1 + \tau_1^2\tau^1 &= 2n_1\tau^2\tau \\ \tau^{12}\tau_2 - \tau_2^1\tau^2 &= 2n_2\tau^1\tau\end{aligned}$$

非線形変数：面の中心および辺の中点で定義される。

$$x = \frac{\tau^1\tau^2}{\tau^{12}\tau} \quad y = \frac{\tau^{12}\tau_2}{\tau^1\tau} \quad z = \frac{\tau^{12}\tau_1}{\tau^2\tau}$$

積分定数： $zx - yx = t$

離散 Painlevé 方程式の例：例えば dPII (4) が導出される。

$$\frac{n_1 + 1}{1 + x^1x} + \frac{n_1}{1 + xx_1} + \frac{t}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) = n_1 + n_2 + 1$$

連続の双線形方程式： $D_t\tau^{12} \cdot \tau = \tau^1\tau^2$

連続の Painlevé 方程式：Painlevé III 方程式

$$x_{tt} = \frac{x_t^2}{x} - \frac{x_t}{t} + x^3 - \frac{1}{x} - \frac{2(n_1 + n_2 + 1)}{t}x^2 + \frac{2(n_1 - n_2)}{t}$$

3.2 3次元^{9, 7)}

格子：3次元正方格子 (n_1, n_2, n_3)

τ 函数：すべての座標が偶数の格子点およびすべての座標が奇数の格子点上で定義される。

双線形方程式： $\tau^{ii}\tau_i^{jk} - \tau^{jj}\tau_j^{ik} = 2(n_i - n_j)\tau\tau^{ijk}$

およびこの式で任意の二軸を反転させたもの、

$$\begin{aligned}\tau_{ii}\tau_j^{ik} - \tau_{jj}\tau_i^{jk} &= -2(n_i - n_j)\tau\tau_{ij}^k \\ \tau_{ii}\tau_j^{ik} - \tau^{kk}\tau_{ijk} &= -2(n_i + n_k)\tau\tau_{ij}^k\end{aligned}$$

非線形変数： n_1, n_2, n_3 のうち二つが偶数で一つが奇数の格子点および二つが奇数で一つが偶数の格子点上で定義される。

$$x = \frac{\tau^{ij}\tau_{ij}}{\tau^k\tau_k} \quad y = \frac{\tau_j^i\tau_i^j}{\tau^k\tau_k}$$

積分定数： $x + y = 2t$

離散 Painlevé 方程式の例：dPII (3) や dPI (2) が構成される。

$$\begin{aligned} \text{dPII} \quad & \begin{cases} X^{112} + X^2 = \frac{2(n_1 + n_2 + 2)}{X^{12} + t} + \frac{2(n_1 - n_2)}{X^{12} - t} \\ X^{12} + X_1^2 = \frac{2(n_1 + n_3)}{X^2 + t} + \frac{2(n_1 - n_3)}{X^2 - t} \end{cases} \\ \text{dPI} \quad & \begin{cases} x^{13} + x_2^1 = \frac{2(n_2 + n_3)}{x^1} + 2t \\ x^1 + x_2 = \frac{2(n_1 + n_2)}{x_2^1} + 2t \\ x_2^1 + x_{23} = \frac{2(n_3 + n_1)}{x_2} + 2t \end{cases} \end{aligned}$$

ここで $X = x - t$ である。格子の軸方向への発展を記述するのが dPII (3) で、立方対角の方向への発展を記述するのが dPI (2) である。これらはそれぞれ、asymmetrize、ternarize されており、可積分性を崩すことなくそれだけの自由度がはいることは、singularity confinement によってわかる。この例のように、一つの格子上に、発展方向によって複数の離散 Painlevé 方程式が存在しうる。つまり、格子の構造をすべて明らかにすることによって、離散 Painlevé 方程式を分類することができる。

連続の双線形方程式： $D_t \tau^k \cdot \tau_k = \tau^{ij} \tau_{ij}$

連続の Painlevé 方程式： $w = 1 - 2t/x^1$ とおくと、 w は以下の Painlevé V 方程式を満足する。

$$\begin{aligned} w_{tt} = & \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \right) w_t^2 - \frac{1}{t} w_t + \frac{(w-1)^2}{2t^2} \left((n_2 + n_3)^2 w - \frac{(n_2 - n_3)^2}{w} \right) \\ & - 4(n_1 + 1)w - 2t^2 w \frac{w+1}{w-1} \end{aligned}$$

3.3 5次元^{9, 10)}

格子：5次元正方格子 $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$

τ 函数：すべての座標が偶数の格子点およびすべての座標が奇数の格子点上で定義される。

双線形方程式： $\tau^{ijk}\tau_{ijk} = q^{n_i+n_j+n_k}\tau^{lm}\tau_{lm} + q^{-n_i-n_j-n_k}\tau_m^l\tau_l^m$

およびこの式で任意の二軸を反転させたもの、

$$\tau_{ij}^k\tau_k^{ij} = q^{-n_i-n_j+n_k}\tau^{lm}\tau_{lm} + q^{n_i+n_j-n_k}\tau_m^l\tau_l^m$$

非線形変数： n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 のうち三つが偶数で二つが奇数の格子点および三つが奇数で二つが偶数の格子点上で定義される。

$$x = \frac{\tau_m^l\tau_l^m}{\tau^{lm}\tau_{lm}}$$

離散 Painlevé 方程式：qPVI 方程式

$$x^i x_i = \frac{(q^{-n_i-n_j+n_k} + q^{n_i+n_j-n_k}x)(q^{-n_i+n_j-n_k} + q^{n_i-n_j+n_k}x)}{(q^{n_i+n_j+n_k} + q^{-n_i-n_j-n_k}x)(q^{n_i-n_j-n_k} + q^{-n_i+n_j+n_k}x)}$$

この場合には対応する連続系はない。

4 まとめ

離散 Painlevé 方程式においては、 τ 函数がのっている格子の geometry とその上の consistent な双線形方程式とが、Schlesinger 変換を含めた方程式による発展をすべて決定している。ここで、ただ一つの離散非自律双線形方程式だけから、すべての Bäcklund 変換が導出されていることを強調しておく。このような自己双対構造は、離散 Painlevé 方程式が非常に高い対称性をもっていることの反映である。(ただし、すべての離散 Painlevé 方程式が自己双対であるわけではない。反例が知られている。)

一つの(格子, 双線形方程式)の組に対し、発展する方向に応じて複数の離散 Painlevé 方程式が対応していることから、各離散 Painlevé 方程式が属する格子と双線形方程式を求めることによって、その離散 Painlevé 方程式の帰属を明らかにすることができる。その際、singularity confinement アルゴリズムなどを用いて、離散 Painlevé 方程式に係数の最大自由度を導入して縮退を解いておくことが、格子の geometry を完全に決定するために重要である。結局、離散 Painlevé 方程式の分類問題とは、格子とその上の consistent な双線形方程式をすべてリストアップせよ、という問題であるといえる。

References

- 1) Painlevé 方程式については非常に多くの研究が成されており、ここで詳しく文献を挙げないが、例えば、岡本和夫, パンルヴェ方程式序説, 上智大学数学講究録 No. 19 などを参照.
- 2) Singularity confinement の基本的考え方については、例えば、A. Ramani, B. Grammaticos and V. Papageorgiou, in CRM Proc. Lecture Notes **9**, Amer. Math. Soc. (1996) 303 に詳しい解説がある.
- 3) 離散 Painlevé 方程式の組織的研究は、A. Ramani, B. Grammaticos and J. Hietarinta, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1829 に始る. 物理系においては二次元量子重力に関係して、E. Brézin and V. A. Kazakov, Phys. Lett. B **236** (1990) 144; A. R. Its, A. V. Kitaev and A. S. Fokas, Usp. Mat. Nauk **45** (1990) 135; V. Periwai and D. Shevitz, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1326 などに離散 Painlevé 方程式が現れる. A. Ramani and B. Grammaticos, Physica A **228** (1996) 160 には多くの離散 Painlevé 方程式が載っているので参考になる.
- 4) A. Ramani and B. Grammaticos, Lecture at the Toda symposium (1996).
- 5) F. Nijhoff, J. Satsuma, K. Kajiwara, B. Grammaticos and A. Ramani, Inv. Prob. **12** (1996) 697.
- 6) B. Grammaticos and A. Ramani, J. Phys. A **31** (1998) 5787.
- 7) M. Noumi and Y. Yamada, q-alg/9708018, math.QA/9808003.
- 8) 連続の Painlevé 方程式の Schlesinger 変換から離散 Painlevé 方程式を構成できるという考え方は、M. Jimbo and T. Miwa, Physica D **2** (1981) 407 などにすでに見られる.
- 9) A. Ramani, Y. Ohta, J. Satsuma and B. Grammaticos, Comm. Math. Phys. **192** (1998) 67.
- 10) M. Jimbo and H. Sakai, Lett. Math. Phys. **38** (1996) 145.