

5次元多様体上の $SO(3)$ -作用について

津田塾大 中西あゝ子

§.0 準備

§.0 で準備を、§.1 で得られた結果を、§.2 以降でその証明を与えることにする。

0.1 $SO(3)$ の部分群について

本論文では、 $SO(3)$ -多様体を取り扱うので、先づ $SO(3)$ の部分群について知らなければならない。ところが、 $SO(3)$ は次の7つの部分群、及びその共役類以外に部分群をもたないことがわがっている。([4], [5] 参照)

$$\textcircled{1} \quad S^1 \approx SO(2) \quad \textcircled{2} \quad N \approx O(2) \quad \textcircled{3} \quad \text{巡回群 } \mathbb{Z}_n$$

$$\textcircled{4} \quad \text{正2面体群 } D_n \quad \textcircled{5} \quad \text{正4面体群 } H_T \approx A_4$$

$$\textcircled{6} \quad \text{正8面体群 } H_O \approx S_4 \quad \textcircled{7} \quad \text{正20面体群 } H_I \approx A_5$$

A_4 , S_4 , A_5 は各々、4次の交代群、4次の対称群、5次の交代群を示す。

0.2. スライス表現について

G をコンパクト Lie 群, M を可微分 G -多様体とする。

スライス定理から、 M の各点 x の orbit Gx の管状近傍における G の作用を調べるには、表現 $G_x \xrightarrow{\text{hom.}} GL(S_x)$ を調べれば十分であることがわかる。 G_x は x の isotropy 群, S_x はスライスをあらわす。更に M がコンパクト可微分 G -多様体のとき、 M は G -不変計量をもつから、このスライス表現は、 $G_x \longrightarrow O(n)$ と考えればよい。 $(n$ はスライスの次元)

次に示す表は、 G を $SO(3)$, M を 5 次元の向きづけられた連結な可微分閉多様体とし、 M には可微分 $SO(3)$ 作用がはいっている場合の、スライス表現と、各場合の principal orbit type を記したものである。また G_x として存在し得るものは、0.1 に示した通り。

G_x	S_x	表 現	principal orbit type
e	D^2	trivial (e は単位元)	e
$SO(3)$	D^5	① $\rho \oplus \theta^2$, ρ ; $\mathbb{R}^3$ 上の standard $SO(3)$ -action θ^2 ; $\mathbb{R}^2$ 上の trivial action	(S^4)
		② weight 2 の表現 ([1] 参照)	(D_{2n})
		③ trivial	$SO(3)$
(S^4)	D^3	$S^4 \longrightarrow O(3)$	$(\mathbb{Z}_n)$

		$\begin{bmatrix} \cos \theta, -\sin \theta, 0 \\ \sin \theta, \cos \theta, 0 \\ 0, 0, 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{bmatrix} \cos n\theta, -\sin n\theta, 0 \\ \sin n\theta, \cos n\theta, 0 \\ 0, 0, 1 \end{bmatrix}$	
(N)	D^3	① S^1 が trivial に作用する場合 $N/S^1 \approx \mathbb{Z}_2$ だから $\mathbb{Z}_2$ の $O(3)$ への表現を 考える。	(S^1)
		② S^1 が non-trivial に作用する場合	(D_n)
		③ trivial	(N)
($\mathbb{Z}_n$)	D^2	① $\mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_q \hookrightarrow SO(2)$, $n=mq$ $\mathbb{Z}_q$ の D^2 への作用は、 D^2 の点を (r, r) で あらわしたとき、 $\xi(r, r) = (r, r + \nu \xi)$ $\xi = \frac{2\pi}{q}$, $(q, \nu) = 1$, $0 < \nu < q$	($\mathbb{Z}_m$)
(D _n)	D^2	① D_n $D_n/\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow SO(2)$	($\mathbb{Z}_n$)
		② D_{2k} $D_{2k}/D_k = \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow SO(2)$	(D_k)
		③ trivial	(D_n)
(A ₅)	D^2	① trivial (A_5 は単純群)	(A ₅)
(A ₄)	D^2	① A_4 $A_4/V_4 = \mathbb{Z}_3 \hookrightarrow SO(2)$ V_4 は、 $(i, j)(k, l)$ の形の元からなる A_4 の正規部分群で、 $V_4 \approx D_2$. ただし、 i, j, k, l はすべて異なる。	(D_2)
		② trivial	(A ₄)
(S ₄)	D^2	① S_4 $S_4/A_4 = \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow SO(2)$	(A ₄)

		② trivial	(ω_2)
--	--	-----------	--------------

0.3 軌道空間 M^* の向きについて.

M は、0.2 の後半に示したような 5 次元の向きづけられた可微分 $SO(3)$ -多様体とする。このとき、Stiefel-Whitney 類 W_i を調べて、principal isotropy 群として (N) があらわれないことがわかる。また、 N 以外の principal isotropy 群 H に因しては、 $SO(3)/H$ は向きづけ可能な多様体となる。故に、 M^* が向きづけ不可能となる可能性のあるのは、 $N(H)/H$ の M^H への作用、及びスライス表現を調べることにより $H = (S^1)$ の場合だけであることが証明できる。 M^* が向きづけ可能な時、 M^* と $SO(3)$ の向きが M の向きを与えるように M^* を向きづけるものとする。ここに、 $N(H)$ は H の正規化群、 M^H は H で止まっている M の点の集合とする。

§.1. 結果

M を、5 次元、向きづけられた連結な可微分多様体とし、 M には可微分 $SO(3)$ 作用がはいっているものとする。そして、このような多様体 M, M' の間に、equivariant diffeomorphism φ ($\varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot g$) が存在して、それが軌道空間 M^*, M'^*

の向きを保つ写像 φ_* を誘導するとき、 M と M' は同値であると定める。ただし、 M^* が向きづけ可能多様体である場合に限る。この同値関係によって、上のような 5 次元 $SO(3)$ -多様体を分類すると、principal orbit type が e , A_4 , A_5 , D_4 のとき、次に記す定理を得る。定理 1 ～ 3 において M は上に記したような多様体であるものとする。

定理 1

principal isotropy 群が e のとき、 M は次の (i) (ii) を満たす数 $\{\ell; (g, f, m); (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)\}$ によって分類される。

- (i) $f > 0$ ならば $\ell = 0$, $m \geq 0$, $f = 0$ ならば $\ell \in \mathbb{Z}_2$, $m = 0$
- (ii) $(\alpha_i, \beta_i) = 1$, $0 < \beta_i < \alpha_i$

定理 2

principal isotropy 群が (A_5) のとき、 M は軌道空間 M^* の種数 g によって分類される。このことは (D_4) のときにも成り立つ。

定理 3

principal isotropy 群が (A_4) のとき、 M は (i) (ii) (iii) を満たす数

$\{g, \varepsilon, r\}$ によって分類される。

(i) $\varepsilon \in \{0, 1\}$ (ii) r は偶数 (iii) $g=0$ ならば $\varepsilon=0$

§.2. 定理1の証明

§.0.2の表から存在し得る orbit type は $e, (S^1), (Z_n)$ のみである。ここで、 $E = \{x \in M; G_x = \text{巡回群}\}$, $Y = \{x \in M; G_x = \{1\}\}$ とおく。 M^* の各点 x^* の近傍は S_x/G_x で与えられるから、スライス表現をみれば、 M^* が2次元のコンパクト、連結多様体となること、 E の各 orbit は M で孤立していて、それ故 $E^* \neq \emptyset$ は M^* の孤立点の集合となること、そして Y^* は M^* の境界となっておりあられることが容易に調べられる。 $Y = \emptyset$ のとき M^* は境界がないことに注意する。更に§.0.3で述べたように、 M^* は向きづけ可能な多様体である。

g を M^* の種数と定める。 M と M' が同値ならばたしかに $g=g'$ である。

Case 1 $E \cup Y = \emptyset$ のとき

M は M^* 上の principal $SO(3)$ -bundle であるから、 M は bundle として、obstruction $\ell \in H^2(M^*; \pi_1(SO(3))) \approx \mathbb{Z}_2$ で分類される。故に、 M は $\{g, \ell \in \mathbb{Z}_2\}$ で分類される。 M の

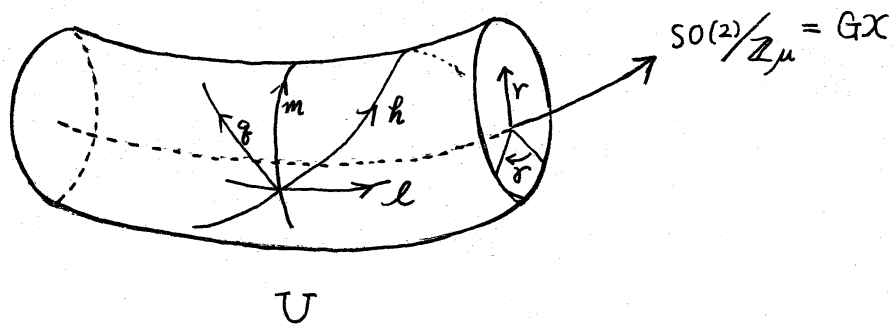
向きをかえた $-M$ と M が同値であることは容易にわかる。

Case 2. $E \neq \emptyset$, $Y = \emptyset$ のとき

M の実 X の *isotropy* 群が $\mathbb{Z}_\mu$ であるとする。このとき S_x は 2次元の円板 D^2 と考えられ、 $\mathbb{Z}_\mu$ は D^2 に次のように作用していることは前に示した。(0.2)

$$\xi(r, \theta) = (r, \theta + \nu \xi), \quad (\mu, \nu) = 1, \quad 0 < \nu < \mu, \quad \xi = \frac{2\pi}{\mu}$$

$\text{orbit } GX$ の管状近傍 U は $D^2 \times_{\mathbb{Z}_\mu} SO(3)$ で、この近傍に自然にはいっている部分集合 $D^2 \times_{\mathbb{Z}_\mu} SO(2)$ を U とする。



更に、 m をスライス D^2 の境界の向きづけられた曲線、 l を GX とホモロークな U 上の向きづけられた曲線とすると、順序対 (m, l) は U の向きを与える。また、 U は $(U)^* = (U)^* \approx S^1$ 上の principal $SO(2)$ -bundle であるから、断面 $\theta: (U)^* \rightarrow U$ が存在する。そして、 θ を U 上の向きづけられた principal orbit としたとき、順序対 (θ, θ) が (m, l) と同じ向きを与えるように θ を向きづけておく。

ファイバー空間の完全系列より、 m, l は

$$m = \alpha g + \beta h, \quad l = -\nu g - \rho h, \quad \alpha = \mu, \beta > 0, \nu > 0$$

とあらわされる。また、 $(m, l), (g, h)$ が同じ向きを与えることから、 $\beta\nu \equiv 1 \pmod{\alpha}$ が導かれ、断面を適当にえらんで β は、 $0 < \beta < \alpha$ に制限できる。また、 $(\mu, \nu) = 1$ から $(\alpha, \beta) = 1$ である。

これで、 E -orbit の *isotropy* 群、及びそのスライスへの作用から一意に定まる、上の条件を満たす整数の組 (α, β) が作られた。逆にこのような組 (α, β) が与えられれば、*isotropy* 群、及びそのスライスへの作用は一意に与えられる。また、 (α, β) は、 $m = \alpha g + \beta h$ となる断面 g が U 上に、それ故 U 上に一意に定めている。 $-M$ では、この組は $(\alpha, \alpha - \beta)$ になる。

今、 E -orbits の個数を r として、各々の管状近傍を V_i とすると、同様に、 (α_i, β_i) が定められ、それは U_i 上に断面 g_i を定める。この断面 $g_1, \dots, g_r$ を $M^* - \text{Int}(\bigcup_{i=1}^r V_i^*)$ 上に拡張する *obstruction* を $\mathcal{C}$ とすると

$$\mathcal{C} \in H^2(M^* - \text{Int}(\bigcup_{i=1}^r V_i^*), \bigcup_{i=1}^r U_i^*; \pi_1(SO(3))) \simeq \mathbb{Z}_2$$

である。 M と M' において $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ ということは、 $\bigcup_{i=1}^r U_i$ と $\bigcup_{i=1}^r (M - \text{Int}(\bigcup_{i=1}^r V_i))$, $\bigcup_{i=1}^r U_i'$ と $\bigcup_{i=1}^r (M' - \text{Int}(\bigcup_{i=1}^r V_i'))$ のくっつき方が同値であることを示す。すなわち、このように定めた数、

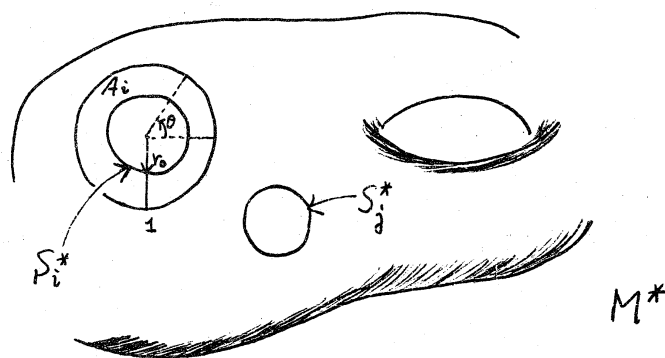
$\{g, b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)\}$ が M を決定する。

ここに、 $-M$ のこの *abstraction* は、 r が偶数のとき M のそれと同じで、 r が奇数のとき、 $\mathbb{Z}_2$ の元としてもう一方の方をとる。

Case 3. $E=\emptyset, Y \neq \emptyset$ のとき

Y の各連結成分を S_i とすると、スライス表現と M がコンパクトであることから $S_i^* \approx S^1$ で、 S_i^* は M^* の境界となっている。また、 S_i は S_i^* 上のファイバー $SO(3)/S^1$ 、構造群 $N(S^1)/S^1 \approx \mathbb{Z}_2$ の bundle で、それは、trivial か non-trivial かの2種類しかない。そこで、 f を Y の連結成分の数、 m をそのうちの non-trivial bundle になっているものの数と定める。

次に、 M^* 上に S_i^* を境界とする円環 A_i を考え、 θ を増すことによって向きを与えるように A_i の点を (r, θ) , $r_0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ であらわす。



① $S_i \longrightarrow S_i^*$ が trivial bundle のとき

さらに $G_S(r_0, \theta) = Se_1$ となる断面 S が存在する。ここに e_1 は $\mathbb{R}^3$ の標準基底で、 Se_1 は e_1 を軸とした回転をあらわす。これに [6], p.417, lemma 2.6 を適用すると、 S の拡張 $S: A_i \longrightarrow P^1(A_i)$, $G_S(r_0, \theta) = Se_1$, $G_S(r, \theta) = e$, ($r \neq r_0$) が存在する: とがわかる。

② $S_i \longrightarrow S_i^*$ が non-trivial bundle のとき

$G_S(r_0, \theta) = Sp_0$ となる断面 S が存在する。 p_0 は S^2 の点で、

$$p_0 = \begin{cases} (\cos \theta) e_1 + (\sin \theta) e_2 & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ -e_1 & (\pi \leq \theta \leq 2\pi) \end{cases}$$

Sp_0 は p_0 を通る軸に関する回転をあらわす。これにも、[6], lemma 2.6 を適用して、拡張した断面 $S: A_i \longrightarrow P^1(A_i)$, $G_S(r_0, \theta) = Sp_0$, $G_S(r, \theta) = e$ ($r \neq r_0$) が存在する。

また、 k_0 を ① のとき、 e_1 を軸とした θ の回転、② のとき、 p_0 を通る軸に関する角 π の回転とし、 $k_0 \cdot S(r, \theta) = S'(r, \theta)$ で定めた断面 S' を考えると、 k_0 は $\pi_1(SO(3))$ の生成元をあらわすから、 S 、あるいは S' を、 M^* 全体に拡張する: とができる。更に ① でも ② でも、 $G_S(r, \theta) = G_{S'}(r, \theta)$ であることに注意すると、 M, M' において、 $\{g, f, m\} = \{g', f', m'\}$ ならば、上のようにして得られる断面から、 M と M' の equivariant diffeomorphism が得られる。故に、 M は、 $\{g, f, m\}$

によって分類される。

Case 4. $E \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ のとき

V_i^* を E^* の各点の M^* での近傍とする。 r , 及び (α_i, β_i) , $i=1, \dots, r$ がきまれば、考えている同値関係のもとで, $\bigcup_{i=1}^r V_i$ は一意に定まる。また, $\bigcup_{i=1}^r V_i^*$ 上に (α_i, β_i) により定まる断面 $g_1, \dots, g_r$ が存在するわけだが、これらは $M^* - \text{Int}(\bigcup_{i=1}^r A_i) - \text{Int}(\bigcup_{i=1}^r V_i^*)$ まではたしかに拡張でき、Case 3 の議論から結局それは $M^* - \text{Int}(\bigcup_{i=1}^r V_i^*)$ 全体に拡張できることになる。ただし、この断面は、 $\bigcup_{i=1}^r A_i$ 上では Case 3 に示した性質をもつものである。今までの議論から、 M は $\{(g, f, m); (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)\}$ で分類され、 $\ell = 0$ であることがわかる。

Case 1 ~ 4 によって定理 1 の証明は与えられた。

§3. 定理 2 の証明

principal isotropy 群が (A_5) のとき、存在し得る type は (A_5) のみである。スライス表現を調べて、 M^* が境界のない 2 次元の向きづけられた、連結、コンパクト多様体となることがわかる。また、 $N(A_5)/A_5 = \mathbb{C}$ であるから、 $M = M^* \times SO(3)/A_5$

となり、 M は、 M^* の種数 g によって分類される。

(S_4) の場合も、存在し得る orbit type は (S_4) のみで、 $N(S_4)/S_4 = e$ であるから全く同様である。

§.4. 定理3の証明.

存在し得る orbit type は $(A_4), (S_4)$ のみである。

$E = \{x \in M; G_x = (S_4)\}$ とおくと、 M^* は、境界のない、向きづけ可能な、2次元、連結、コンパクト多様体で、 E^* は、 M^* で孤立点の集合としてあらわれる。

Case 1. $E = \emptyset$ のとき

$M^{A_4} = \{x \in M; G_x = A_4\}$ とする。 M^{A_4} は M^* 上の $N(A_4)/A_4 \approx \mathbb{Z}_2$ -bundle であるから、 M^{A_4} は bundle としては、 M^* の種数と、obstruction $c \in H^1(M^*; \mathbb{Z}_2)$ で分類される。ところが、 c を M^* 上の bundle とし、その obstruction を $c(\xi), c(\eta)$ であるとするとき、 M^* の向きを保つ diffeomorphism で、 $f^*(c(\eta)) = c(\xi)$ となる $f: M^* \rightarrow M^*$ が存在すれば、我々が考えている同値関係のもとで c と η は同値であることになる。故に、そのような f を調べればよい。

① $g=0$ のとき。

$M^* \simeq S^2$. 故に M^{A_4} は trivial bundle のみ。

② $g=1$ のとき.

$M^* \simeq T_1$. $H_1(M^*; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の生成元を a, b としたとき、 M^* の向きを保つ diffeomorphism から導かれる。次のような $H_1(M^*; \mathbb{Z}_2)$ の homomorphism Δ_1, Δ_2 が存在する：とがわかる。

$$\Delta_1 : a \longmapsto b, \quad b \longmapsto a^{-1}$$

$$\Delta_2 : a \longmapsto ab, \quad b \longmapsto b$$

これから、 M^* 上の non-trivial $\mathbb{Z}_2$ -bundles は、すべて同値となる：とがわかる。

③ $g=2$ のとき.

$H^1(M^*; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の生成元を a_1, b_1, a_2, b_2 としたとき、同様に、 M^* の向きを保つ diffeomorphism から導かれる homomorphism Δ_1, Δ_2 が考えられる。

$$\Delta_1 : a_1 \longrightarrow a_2^{-1} b_1, \quad b_1 \longrightarrow a_1^{-1}, \quad a_2 \longrightarrow a_1^{-1} b_2, \quad b_2 \longrightarrow a_2^{-1}$$

$$\Delta_2 : a_1 \longrightarrow a_1 b_1, \quad b_1 \longrightarrow b_1, \quad a_2 \longrightarrow a_2, \quad b_2 \longrightarrow b_2$$

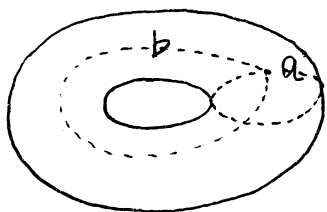
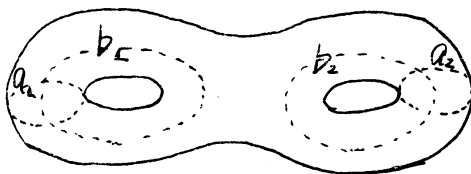
そして、 Δ_1, Δ_2 の合成、 $\varphi_1 = \Delta_1^3, \varphi_2 = \Delta_2, \varphi_3 = \Delta_1 \Delta_2 \xrightarrow{\Delta_1^{-1}} \Delta_2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_1^{-1}$

$\varphi_4 = \Delta_1 \varphi_3$ により、 M^* 上の non-trivial $\mathbb{Z}_2$ -bundles は、

すべて同値になる。

④ $g \geq 3$ のとき

$g=2$ のときの homomorphism を適当に使って、同じ結果が得られる。

 $g=1$  $g=2$

①~③より、 M は、 $\{g, E\}$ で分類されることがいえる。
 ことに、 E は M^{A_4} が *trivial bundle*、それ故、 M が *trivial bundle* のとき0、そうでないとき1をあらわすものとする。

Case 2. $E \neq \emptyset$ のとき

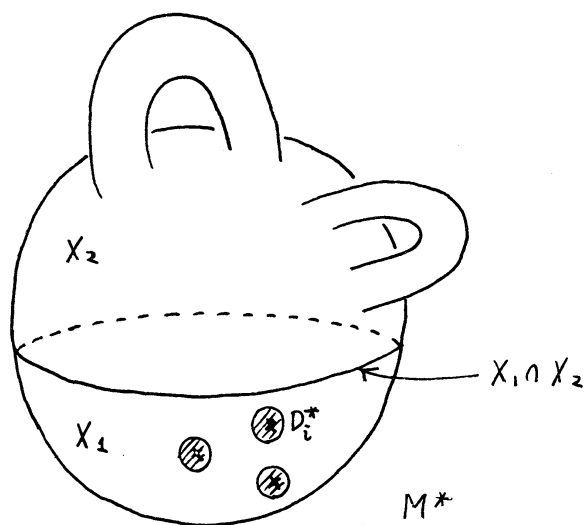
E^* の点 x^* の近傍は、 $S_x/G_x = D^2/S_4 \approx D^2$ である。 S_4 の S_x への作用はスライス表現の表を参照。更に、 E^* の各点 x_i^* の近傍 D_i^* において、 $(p^{-1}(D_i^*))^{A_4} \approx S_x \approx D^2$ であり、
 $(p^{-1}(2D_i^*))^{A_4} \longrightarrow 2D_i^*$ が *non-trivial $\mathbb{Z}_2$ -bundle* であることも容易にわかる。今、 $M^* - \text{Int}(\bigcup_{i=1}^r D_i^*)$ は下図に示すように X_1, X_2 にわけられ、 X_2 上には E^* の点は含まれないようにできる。ただし r は E^* の点の数を示す。

このことから、 $p^{-1}(X_2)^{A_4}$ は、 r だけで決まることがわかる。また、 $X_1 \cap X_2$ は X_2 の境界であるから、 $(p^{-1}(X_1 \cap X_2))^{A_4} \longrightarrow X_1 \cap X_2$ は *trivial $\mathbb{Z}_2$ -bundle* でなければならない。故に r は偶数でなければならない。そして、 $p^{-1}(X_2)^{A_4}$ の分類は Case 1 に帰

着するから、 M は $\{g, \varepsilon, r\}$ で分類される。

たしかに $\{g, \varepsilon, r\} = \{g', \varepsilon', r'\}$ ならば、 $p^{-1}(X_1 \cup (\bigcup_{i=1}^n D_i^*))^{A_4}$ と $p^{-1}(X_2' \cup (\bigcup_{i=1}^n D_i'^*))^{A_4}$, $p^{-1}(X_2)^{A_4}$ と $p^{-1}(X_2')^{A_4}$ は同値であり、 $p^{-1}(X_1)^{A_4}$ と $p^{-1}(X_2)^{A_4}$ のつなぎ合わせは M にかかわらず一意に定まる。故に、 M^{A_4} と M'^{A_4} は同値、即ち、 M と M' は同値である。逆も明らか。

これで定理3が証明された。



以上で、定理1～3の証明が与えられた訳ですが、紙数の都合で、途中、簡略に成了箇所がありますが、ご斟酌下さい。

以上

引用文献

- [1] G. E. Bredon *Introduction to Compact Transformation Groups*
Academic Press 1972
- [2] K. Jänich *Differenzierbare G -Mannigfaltigkeiten*
Springer-Verlag, No. 59 1963
- [3] A. Karrass *Combinatorial Group Theory*
W. Magnus Interscience Publishers
D. Solitar
- [4] P. Orlik *Seifert Manifolds*
Springer-Verlag, No. 291
- [5] P. Orlik *Actions of $SO(2)$ on 3-manifolds*, "Proc.
F. Raymond Conf. Transformation Groups", New Orleans
1967. pp. 297-318. Springer-Verlag, 1968
- [6] R. W. Richardson *Actions of the Rotation Group on the 5 Sphere.*
Annals of Math. vol. 74