

既約曲線の exponents について

埼玉大 矢野 環

§1. exponents 問題

(1.1) 孤立特異点の重要な numerical invariants としてある "exponents" と, 既約曲線の場合に決定したい. "exponents" には, 三通りの種類があり, 一つは一般的には定義されてない. 残り二つは "b-exponents" 即ち, Gauss-Mannin connection の saturated lattice を用いたものであり, または "MH-exponents" 即ち, Mixed-Hodge structure に関係して定められたものである. いずれも exponents は $\mu \in \mathbb{Z}$ (Milnor 数) 個の正の有理数 $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ であり, $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_i) = \zeta_{\mu_i}$ は, 局所モノドロミの μ 個の固有値の全体と, 重複度とを共に一致してなる. ここでは前者, "b-exponents" と書くが,

(1.2) $f: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ を解析函数の芽, $f^{-1}(0)$ は原点で既約曲線を定め, 特異点 σ $(m, \beta_1, \dots, \beta_g)$ でありとする. 例として次の Puiseux 級数で与えられるもの.

$$y = x^{\beta_1/m} + x^{\beta_2/n} + \dots + x^{\beta_g/n}.$$

特性列の性質より,

$$(1.2.1) \quad e^{(i)} = \text{g.c.d.} (n, \beta_1, \dots, \beta_g) \quad i=1, \dots, g$$

と表わし, $e^{(i)}$ は $e^{(i-1)}$ の真の約数であり, $e^{(g)} = 1$.

(1.3) b -exponents は (n, β) により決定される.

この問題の答えは次のように決まる.

(a) A. f の特性列が (n, β) であり, $\forall j$ 対し b -exponents と異なるような数 a 組を指定せよ.

(b) B. 特性列 (n, β) を持つような, 一般に f について, b -exponents は (n, β) である.

(1.4) 実用上, 又理論上も, exponents $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ は, f の多項式 $P(t)$ によって与えられる.

$$(1.4.1) \quad P(t) = \sum_{i=1}^{\mu} t^{\alpha_i}$$

$$(1.4.2) \quad f = x^2 + y^3, \quad \alpha_1 = 5/6, \quad \alpha_2 = 7/6.$$

$$\begin{aligned} P(t) &= t^{5/6} + t^{7/6} = \frac{(t^{1/2} - t)(t^{1/3} - t)}{(1 - t^{1/2})(1 - t^{1/3})} \\ &= t^{5/6} \frac{1-t}{1-t^{1/6}} - t^{2/2} \frac{1-t}{1-t^{1/2}} - t^{3/3} \frac{1-t}{1-t^{1/3}} + t \end{aligned}$$

$$(1.5) \quad \alpha_f = \min_{i=1, \dots, \mu} \alpha_i \quad \text{と表す} \quad \text{minimax exponent}$$

と表す. この値は次の式で与えられる. (Varchenko,

Kato-Yano)

$$(1.5.1) \quad \alpha_f = \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_1}.$$

§ 2. 定義. 予想

(2.1) 定義. (n, β) に対し, 下記の自然数を定める.

$$e^{(i)} = \text{g.c.d.}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_i) \quad i=1, \dots, g, \quad \beta_0 = e^{(0)} = n.$$

$$\begin{cases} r_i = (\beta_i + n) / e^{(i)} \\ R_i = \{\beta_i e^{(i-1)} + \beta_{i-1}(e^{(i-1)} - e^{(i-2)}) + \dots + \beta_1(n - e^{(1)})\} / e^{(i)}, \\ r'_i = [r_i e^{(i)} / e^{(i-1)}] + 1 = r_{i-1} + [(\beta_i - \beta_{i-1}) / e^{(i-1)}] + 1 \\ R'_i = R_i e^{(i)} / e^{(i-1)} = R_{i-1} + \beta_i - \beta_{i-1} \end{cases}$$

$$r'_0 = 2, \quad R'_0 = n.$$

(2.2) 定義. (n, β) に対応する分母巾多項式とは,

$$\begin{aligned} R((n, \beta), t) &= \sum_{i=1}^g t^{r_i/R_i} \frac{1-t}{1-t^{1/R_i}} \\ &\quad - \sum_{i=0}^g t^{r'_i/R'_i} \frac{1-t}{1-t^{1/R'_i}} + t. \end{aligned}$$

(2.3) 命題. 特種列 (n, β) に対し, $R((n, \beta), t)$ を展開すれば, 非負整数係数の分母巾多項式となる. //

この命題は, 次の2つの補題に帰着する.

(2.3.1) 補題. $i=1, \dots, g$ について次の関係が成立する.

$$1) R'_i | R_i \quad 2) r'_i / R'_i > r_i / R_i \quad 3) (r'_i - 1) / R'_i \leq (r_i - 1) / R_i$$

(2.3.2) 補題. さらに, 1) $r'_0 / R'_0 > r_1 / R_1$ //

$$2) (r'_0 - 1) / R'_0 \leq (r_1 - 1) / R_1 \quad 3) e^{(1)} | R_2 \quad 4) e^{(1)} \nmid R'_2$$

$$5) r_2 / R_2 < 1 / e^{(1)}. //$$

(2.4) 予想 特性列 (m, β) であるような殆どすべての特異点について

$$P(t) = R((m, \beta), t).$$

ここで「殆どすべて」とは、特性列 (m, β) であるような新しい modality 次元 μ (μ -constant) stratum において、open dense な群について、2.11) 意味に解する。

上記は §1 の (a) B に対する μ の解答である。 (b) A については、B.L. Lichtin 氏が次の予想を提す (2.11)。

(2.5) 予想 特性列 (m, β) であるような特異点については、 b -exponents は $r_1/R_1, r_2/R_2, \dots, r_g/R_g$ を含む。

(1.5) により、 $g=1$ のとき (2.5) は正し。

§3. 定理.

(3.1) 定理. (2.4) は m -modal 特異点 $(m \leq 3)$ について、既約曲線を通じて成り立つ。//

$g=4$ 以外については、

(3.2) 命題. (加藤 清世) (2.4) は 特性列

$(5, 7), (4, 9)$ については成り立つ。 (1174) (4-modal).

実際、(2.4) の $g=1$ の場合は、加藤氏により成り立っていた予想と一致している。//

これらについて、特異点解消の図式とその図式をもとに、すべて省略する。 (尚、(3.1) は 特性列 $(6, 2p+5)$ を含む)