

Nonlinear Ergodic Theorems and their Applications

東工大 理 高橋 渉

(WATARU TAKAHASHI)

E を Banach 空間とし, $C \subset E$ の空でない閉凸集合とする.
このとき, C 上の写像 T が nonexpansive であるとは

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad (x, y \in C)$$

を満たすときである. T の不動点からなる集合を $F(T)$ で表わす. C 上の nonexpansive 写像 $S(t)$ からなる族 $S = \{S(t) : t \geq 0\}$ が, つぎの条件 (a), (b) を満たすとき, C 上の nonexpansive semigroup であるといわれる.

$$(a) \quad S(0) = I, \quad S(t+s) = S(t)S(s) \quad (t, s \geq 0).$$

$$(b) \quad \text{任意の } x \in C \text{ に対し, } t \mapsto S(t)x \text{ は連続である.}$$

最初の非線形エルゴード定理は 1975 年に Baillon [1] によって証明された: H を Hilbert 空間, C を閉凸な部分集合, T を C から C への nonexpansive 写像とする. $F(T) \neq \emptyset$ とし, C の任意の元 x に対し

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

は $F(T)$ の点に弱収束する。

この定理は後に Bruck [6], Hirano [11], Reich [20] 等によって一様凸な Banach 空間の場合まで拡張されている。上記の nonexpansive semigroups に対応する結果は Baillon [2], Baillon-Brezis [3] 等によって証明されている。また可換な semigroups に対する非線形エルゴード定理は Brezis-Browder [5], Hirano-Takahashi [15] によって与えられている。最近 Takahashi [31] は非可換な semigroups に対してつぎのような非線形エルゴード定理を証明した: H を Hilbert 空間とし, C を H の閉凸集合とする。 $\mathcal{S}$ を C 上の nonexpansive 写像の作る amenable semigroup とし,

$$F(\mathcal{S}) = \bigcap \{ F(t) : t \in \mathcal{S} \} \neq \emptyset$$

とする。このとき, C から $F(\mathcal{S})$ への nonexpansive retraction P で, 任意の $t \in \mathcal{S}$ に対して $Pt = tP = P$ であり, しかも

$$Px \in \overline{\text{co}} \{ tx : t \in \mathcal{S} \}, \quad \forall x \in C$$

を満たすものが存在する。ただし $\overline{\text{co}} A$ は A の convex hull の closure を表わす。

このような retraction を "Ergodic retraction" と呼ぶことにすると, エルゴード理論では "Ergodic retraction" の存在と一意性を研究することが最も本質的な部分となってくる。

ここでは, まず Hilbert 空間において, より一般的な semigroups

に対して, このような "Ergodic retraction" の存在と一意性を証明する. そのあと, 線形の場合でいうところの mixing に対応する結果を研究し, さらに mean ergodic 定理を証明する. この結果を用いてこれまでのエルゴード定理のいくつかを証明し, 最後にエルゴード定理と発展方程式の関係について述べる.

§1. 準備

S を abstract semigroup とし, $m(S)$ を S 上の有界実数値関数の作る Banach 空間とする. そのノルムは supremum norm とする. 任意の $s \in S$ と $f \in m(S)$ に対して, f_s, f^s を

$$f_s(t) = f(st), \quad f^s(t) = f(ts) \quad (t \in S)$$

で定義する. $\mu \in m(S)^*$ ($m(S)^*$ は $m(S)$ の dual space) は $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ であるならば mean とわれる. Mean μ が left (right) invariant であるとは,

$$\mu(f_s) = \mu(f) \quad (\mu(f^s) = \mu(f))$$

を満たすときである. Invariant mean とは left と right な invariant mean のことである. left (right) invariant mean をもつ semigroup を left (right) amenable, invariant mean をもつ semigroup を amenable とする.

Day [8] は commutative semigroup は amenable であることを証明している. また $\mu \in m(S)^*$ が S 上の mean である必要

十分条件は $f \in m(S)$ に対し

$$\inf \{f(s) : s \in S\} \leq \mu(f) \leq \sup \{f(s) : s \in S\}$$

であるから, semigroup S が right amenable で, $\mu \in$ right invariant mean とすると, $f \in m(S)$ に対し

$$\sup_s \inf_t f(ts) \leq \mu(f) \leq \inf_s \sup_t f(ts)$$

が成立することもある。Semigroup S は $a, b \in S$ に対し, $ac = bd$ ($ca = db$) となるような $c, d \in S$ が存在するとき, left (right) reversible であるといわれる。Granirer [10, 11] は left (right) amenable semigroup は left (right) reversible であることを証明している。 S が right reversible semigroup であるとし, $t, s \in S$ に対し $t = s$ or $t \in Ss$ のとき $t \geq s$ とすると, S は有向集合になる。

E^* を Banach 空間 E の dual 空間とし, $x^* \in E^*$ の $x \in E$ における値を $\langle x, x^* \rangle$ で表わす。このとき E から E^* への duality 写像 J は

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

によって定義される。Hahn-Banach の定理を用いると, $J(x)$ が空でないことが示され, さらに weak* compact で凸であることもわかる。 $B = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ を E の unit sphere とする。 E の φ が Gâteaux differentiable であるとは, $x, y \in B$ に対し

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \dots (*)$$

がつねに存在するときをいう。このとき E は smooth であるともいわれる。また x に対して $(*)$ の極限が $y \in B$ に関して一様であるとき、 E のノルムは Fréchet differentiable であるといわれる。Fréchet differentiable ノルムをもつ Banach 空間としては Hilbert 空間や L^p 空間 ($1 < p < \infty$) がその代表的例として挙げられよう。

§2. Hilbert 空間におけるエルゴード定理

この節では、Hilbert 空間において nonexpansive 写像の作る right reversible semigroup の非線形エルゴード定理を証明する。 C を Hilbert 空間 H の閉な凸集合とし、 S を right reversible semigroup とする。 $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像 $T_s, s \in S$ の作る族で、つぎの条件：

$$T_{st}(x) = T_s T_t(x), \quad \forall a, b \in S, \quad \forall x \in C$$

を満たすものとする。このとき $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像としての S の表現という。この $\mathcal{S}$ に対して $F(\mathcal{S})$ は $T_s, s \in S$ の共通な不動点全体の集合として定義される。すると $F(\mathcal{S})$ は閉で凸集合となる。

定理 1. C を Hilbert 空間の空でない閉凸集合とし、 S を right reversible semigroup とする。 $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C から

C への nonexpansive 写像としての S の表現とし, $F(S) \neq \emptyset$ とする. このとき, 次の条件は同値である.

(a) 任意の $x \in C$ に対して $\bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\} \cap F(S) \neq \emptyset$.

(b) C から $F(S)$ 上への nonexpansive retraction P で, 任意の $t \in S$ に対して $PT_t = T_t P = P$ であり, かつ

$$Px \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}, \forall x \in C$$

を満たすものが存在する.

証明. (b) $\Rightarrow$ (a). $x \in C$ とする. すると任意の $t \in S$ に対して $T_t P = P$ なので $Px \in F(S)$ となる. また任意の $s \in S$ に対して

$$Px = PT_s x \in \overline{\text{co}}\{T_t T_s x : t \in S\} \subset \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$$

であるから $Px \in \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$ となる. よって

$$\bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\} \cap F(S) \neq \emptyset.$$

(a) $\Rightarrow$ (b). $x \in C$ とし, $f \in F(S)$ とする. このとき $b \geq a$ ならば $b = sa$ となる $s \in S$ が存在するので

$$\begin{aligned} \|T_b x - f\|^2 &= \|T_{sa} x - f\|^2 = \|T_s T_a x - T_s f\|^2 \\ &\leq \|T_a x - f\|^2. \end{aligned}$$

そこで, $\lim_s \|T_s x - f\|^2$ が存在する.

$$g(f) = \lim_s \|T_s x - f\|^2, \forall f \in F(S)$$

とし, $r = \inf\{g(f) : f \in F(S)\}$ とする. このとき, g は連続で凸関数となり, $\|f\| \rightarrow \infty$ のとき $g(f) \rightarrow \infty$ である. よって

$$M(x) = \{f \in F(\mathcal{S}) : g(f) = r\}$$

は空でない。つぎにこの $M(x)$ が一点であることを示す。 f_0, f_1 を $M(x)$ の元とする。このとき、任意の $s \in S$ に対して

$$\left\| \frac{f_0 - f_1}{2} \right\|^2 = \frac{\|T_s x - f_0\|^2}{2} + \frac{\|T_s x - f_1\|^2}{2} - \left\| T_s x - \frac{f_0 + f_1}{2} \right\|^2$$

であるから、

$$\left\| \frac{f_0 - f_1}{2} \right\|^2 = r - \lim_s \left\| T_s x - \frac{f_0 + f_1}{2} \right\|^2 \leq 0$$

となる。よって $f_1 = f_0$ である。 $M(x) = \{f_0\}$ とし、 Q を H から $F(\mathcal{S})$ への metric projection とする。このとき [21] から $QT_s x$ は $F(\mathcal{S})$ の点 z に強収束する。つぎにこの z は実は f_0 であることを示す。 $b \geq a$ とする。このとき $b = sa$ となる $s \in S$ が存在するので

$$\|QT_a x - T_b x\|^2 = \|T_s QT_a x - T_s a x\|^2 \leq \|QT_a x - T_a x\|^2$$

となる。だから任意の $a \in S$ に対して

$$\begin{aligned} g(QT_a x) &= \lim_b \|T_b x - QT_a x\|^2 \\ &= \lim_{b, a \leq b} \|T_b x - QT_a x\|^2 \leq \|T_a x - f\|^2. \end{aligned}$$

g は連続であり、 $QT_a x$ は $z \in F(\mathcal{S})$ に収束するので

$$g(z) \leq \lim_a \|T_a x - f\|^2 = g(f).$$

よって $f_0 = z = \lim_t QT_t x$ である。

$v \in \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s\} \cap F(S)$ としよう. すると

$$\|f_0 - v\|^2 = \|T_s x - v\|^2 - \|T_s x - f_0\|^2 - 2\langle f_0 - v, T_s x - f_0 \rangle$$

であるから

$$\begin{aligned} \|f_0 - v\|^2 + 2 \lim_s \langle f_0 - v, T_s x - f_0 \rangle \\ = \lim_s \|T_s x - v\|^2 - \lim_s \|T_s x - f_0\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$2 \lim_s \langle f_0 - v, T_s x - f_0 \rangle > -\|f_0 - v\|^2 - \varepsilon$$

である. よって $s_0 \in S$ が存在して, $s \geq s_0$ となる $s \in S$ に対して

$$2\langle f_0 - v, T_s x - v \rangle > -\|f_0 - v\|^2 - \varepsilon$$

である. $v \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s_0\}$ であるので

$$2\langle f_0 - v, v - f_0 \rangle \geq -\|f_0 - v\|^2 - \varepsilon.$$

よって $\|f_0 - v\|^2 \leq \varepsilon$. ε は任意であるので $f_0 = v$ となる.

今や $x \in C$ に対し, $Px = \lim_{t \in S} QT_t x$ を定義する. すると $T_s P = P$ は明らかであり,

$$PT_s x = \lim_{t \in S} QT_t T_s x = \lim_{t \in S} QT_{ts} x = Px$$

であるから, $PT_s = P$ である. Q は nonexpansive [25] であるので, P もまた nonexpansive となり, $Px \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$ は上の証明から明らかである.

S が amenable semigroup であるときは, つぎの定理を得る.

定理 2. C を Hilbert 空間の空でない閉凸集合とし, S を amenable semigroup とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C から C へ

の nonexpansive 写像としての S の表現とし, $F(S) \neq \emptyset$ とする.
 このとき, C から $F(S)$ 上への nonexpansive retraction P で,
 任意の $t \in S$ に対し $P T_t = T_t P = P$ であり, かつ

$$P x \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}, \quad \forall x \in C$$

を満たすものが存在する.

証明. μ を S 上の invariant mean とし, $x \in C$ とする.
 このとき $F(S) \neq \emptyset$ なので $\{T_t x : t \in S\}$ は有界である. 任意
 の $y \in H$ に対して, 実数値関数 $g(t) = \langle T_t x, y \rangle, t \in S$ を考え
 ると g は有界となる. $\mu_t \langle T_t x, y \rangle = \mu(g)$ とすると $\mu_t \langle T_t x, y \rangle$
 は y に関して linear で continuous である. よって Riesz の
 定理より

$$\mu_t \langle T_t x, y \rangle = \langle x_0, y \rangle, \quad \forall y \in H$$

となる $x_0 \in H$ が存在する. [31] の方法を使えば

$$x_0 \in \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s\} \cap F(S)$$

であることがわかる. 定理 1 より定理 2 がわかる.

§3. 非線形作用素に対する mixing

この節では $\{T_t x\}$ の収束性を問題にする. T_t が線形の時
 $T_t x$ が弱収束することは mixing の性質として知られている.

補助定理. E を Fréchet differentiable norm をもつ 一樣凸な
 Banach 空間, C をその閉凸集合, S を right reversible
 semigroup とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C から C へ a nonexpansive

写像としての S の表現とし, $F(S) \neq \emptyset$ とする. $x \in C$ とする.

このとき, $z \in \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s\} \cap F(S)$ と $y \in F(S)$ に対して

$$\langle T_t x - y, J(y - z) \rangle \leq 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

となるような $t_0 \in S$ が存在する.

この補助定理を用いて, つぎの定理を得る.

定理3. E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間, C をその閉凸集合, S を right reversible semigroup とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像としての S の表現とし, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とする. このとき, 任意の $x \in C$ に対して, 集合 $\bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s\} \cap F(\mathcal{S})$ は高々一点からなる.

証明. $y, z \in \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s\} \cap F(\mathcal{S})$ とする.

$\frac{y+z}{2} \in F(\mathcal{S})$ なので, 補助定理より

$$\langle T_t x - \frac{y+z}{2}, J(\frac{y+z}{2} - z) \rangle \leq 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

となる $t_0 \in S$ が存在する. $y \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq t_0\}$ なので

$$\langle y - \frac{y+z}{2}, J(\frac{y+z}{2} - z) \rangle \leq 0.$$

よって, $\langle y - z, J(y - z) \rangle \leq 0$ となり $y = z$ を得る.

この定理から, $\{T_t x : t \in S\}$ の弱収束に関するいくつかの結果を得ることが出来る. $x \in C$ に対して, $w(x)$ は

$\{T_t x : t \in S\}$ の weak limit points の全体を表わすとする.

定理4. E を Fréchet differentiable norm をもつ 一様凸な Banach 空間, C をその閉凸集合, S を right reversible semigroup とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像として S の表現とし, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とする. このとき, $x \in C$ に対して $W(x) \subset F(\mathcal{S})$ ならば net $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束する.

証明. $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ なので, $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$ は有界である. だから $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$ は弱収束する subnet $\{T_{\alpha_\lambda} x\}$ をもつ.

$T_{\alpha_\lambda} x \rightarrow z \in C$ とする. (ここで $\rightarrow$ は弱収束を意味する.)

z は $\bigcap_{s \in S} \overline{\{T_t x : t \geq s\}}$ に属するし, $W(x) \subset F(\mathcal{S})$ であるから

$$z \in \bigcap_{s \in S} \overline{\{T_t x : t \geq s\}} \cap F(\mathcal{S})$$

となる. ここで定理3を用いれば $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束することがわかる.

E が Hilbert 空間のときは, つぎの定理を得る.

定理5. C を Hilbert 空間の閉凸集合とし, S を right reversible semigroup とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像として S の表現とし, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とする. このとき, $x \in C$ に対して, $T_\alpha x \rightarrow y \in C$ である必要十分条件は, S のすべての元 g に対して

$$T_{g\alpha} x - T_\alpha x \rightarrow 0$$

となることである.

証明. "If" partのみを証明すれば十分である. $\{T_{a_\alpha}x\}$ を $\{T_ax: a \in S\}$ の弱収束する部分列とし, $T_{a_\alpha}x \rightarrow z$ とする.

このとき, $u \in F(S)$ に対し

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T_{a_\alpha}x - z\|^2 - \|T_{ga_\alpha}x - T_gz\|^2 \\ &= \|T_{a_\alpha}x - u\|^2 + 2\langle T_{a_\alpha}x - u, u - z \rangle + \|u - z\|^2 \\ &\quad - \|T_{ga_\alpha}x - u\|^2 - 2\langle T_{ga_\alpha}x - u, u - T_gz \rangle - \|u - T_gz\|^2 \\ &= \|T_{a_\alpha}x - u\|^2 - \|T_{ga_\alpha}x - u\|^2 + 2\langle T_{a_\alpha}x - u, T_gz - z \rangle \\ &\quad + 2\langle T_{a_\alpha}x - T_{ga_\alpha}x, u - T_gz \rangle + \|u - z\|^2 - \|u - T_gz\|^2 \end{aligned}$$

であるので,

$$0 \leq 2\langle z - u, T_gz - z \rangle + \|u - z\|^2 - \|u - T_gz\|^2 = -\|z - T_gz\|^2$$

を得る. $(\|T_ax - u\|^2)$ は decreasing net であるから

$$\lim_{\alpha} \|T_{a_\alpha}x - u\|^2 = \lim_{\alpha} \|T_{ga_\alpha}x - u\|^2 = \lim_{\alpha} \|T_ax - u\|^2$$

であることに注意.) よって定理4から, $\{T_ax: a \in S\}$ は $F(S)$ の元に弱収束することがわかる.

この節の最後につぎの定理を得る.

定理6. E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間とし, C をその閉凸集合, S を right reversible semigroup とする. $\mathcal{S} = \{T_t: t \in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像としての S の表現とし, $F(S) \neq \emptyset$ とする. このとき, $x \in C$ に対し

$$\lim_{\alpha} \|T_{ga_\alpha}x - T_ax\| = 0, \forall g \in S$$

ならば, $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$ は $F(S)$ の元に弱収束する.

証明. 定理4より, $w(x) \subset F(S)$ を示せば十分である.

$\{T_\alpha x\}$ を $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$ の subnet で, C の元 y に弱収束するものとする. $g \in S$ に対して仮定より

$$(I - T_g)T_\alpha x \rightarrow 0$$

であるから $(I - T_g)y = 0$ を得る. これは $y \in F(S)$ を意味する. よって定理4から $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$ は $F(S)$ の元に弱収束する.

§4. Banach空間における mean ergodic theorems.

この節では特に断わらなければ, S は commutative semi-group を表わし, E は一様凸な Banach 空間を表わすものとする. また D は $m(S)$ の subspace で, すべての constant 関数を含むものとする. $\mu \in D^*$ が mean であるとは $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ を満たすときをいい, μ が finite mean であるとは

$$\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta_{s_i} \quad (\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, s_i \in S)$$

なるときをいう. ここで $\delta_s(f) = f(s)$ である. D を上のような subspace とし, f を S から E への写像で $\{f(t) : t \in S\}$ の weak closure が weakly compact であるものとする. また任意の $x^* \in E^*$ に対して, 実数値関数 $t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$ は D に含まれているものとする. このとき $\mu \in D^*$ に対して

$$\langle f_\mu, x^* \rangle = \mu_t \langle f(t), x^* \rangle, \quad \forall x^* \in E^*$$

となるような $f_\mu \in E$ が存在する. この f_μ を

$$f_\mu = \int f(t) d\mu(t) \text{ または } f_\mu = \mu_t(f(t))$$

で表わす. 以下の結果は最近 Hirano-Kido-Takahashi [14] によって得られた.

定理 7. S を commutative semigroup とし, D を $m(S)$ の subspace で, $D \ni 1$, $r_s(D) \subset D$, $s \in S$ を満たすものとする. f を S から E への写像で, $\{f(t) : t \in S\}$ の weak closure が weakly compact であり, 任意の $x^* \in E^*$ に対して実数値関数 $t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$ が D に含まれるものとする. このとき, E の weakly compact な凸集合 K に対して, つぎの条件は同値である.

(a) K の任意の weak 近傍 W に対して

$$\lambda_t(f(t+s)) \in W, \forall s \in S$$

となる finite mean λ_t が存在する.

(b) finite means の net $\{\lambda_\alpha\}$ が存在して, K の任意の weak 近傍 W に対して

$$\int f(t+s) d\lambda_\alpha(t), \forall \alpha \geq \alpha_0, \forall s \in S$$

となる α_0 が存在する.

(c) $m(S)$ 上の invariant mean μ に対して $f_\mu \in K$ である.

(d) D 上の invariant mean μ に対して $f_\mu \in K$ である.

定義. D を $D \ni 1$, $r_s(D) \subset D$ となる $m(S)$ の subspace と

する。このとき, $\{\mu_\alpha\} \subset D^*$ が strongly regular であるとは

$$(i) \sup_\alpha \|\mu_\alpha\| < \infty; \quad (ii) \lim_\alpha \mu_\alpha(1) = 1;$$

$$(iii) \lim_\alpha \|\mu_\alpha - r_s^* \mu_\alpha\| = 0, \quad \forall s \in S$$

を満たすときをいう。

定理 8. S, D, E, f を定理 7 のようであるとす, $y \in E$ とする。このときつぎの条件は同値である。

(a) y の weak 近傍 W に対し

$$\lambda_t(f(t+s)) \in W, \quad \forall s \in S$$

となる finite mean λ が存在する。

(c) $\{\mu_\alpha\}$ を strongly regular とするとき, $\int f(t+s) d\mu_\alpha(t)$ は s に関し 2 一様に y に弱収束する。

定理 7, 8 を用いて, つぎの mean ergodic theorems を証明することができる。

定理 9. S を commutative semigroup とし, D を $m(S)$ の subspace で, $D \ni 1$, $r_s(D) \subset D$, $s \in S$ となるものとする。

C を E の閉凸集合とし, $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像とし $\mathcal{S}$ の表現とする。また $x \in C$, $x^* \in E^*$ に対し, 関数 $t \mapsto \langle T_t x, x^* \rangle$ は D に含まれるものとし, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とする。このとき, D 上の invariant mean μ に対し

$$\langle \mathcal{I}_\mu x, x^* \rangle = \int \langle T_t x, x^* \rangle d\mu_t, \quad \forall x^* \in E^*$$

で定義される $\mathcal{T}_\mu$ は C から $F(\mathcal{S})$ 上への nonexpansive retraction で, 任意の $s \in S$ に対し $\mathcal{T}_\mu T_s = T_s \mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_\mu$ であり, しかも $\mathcal{T}_\mu x \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$, $\forall x \in C$ を満たす.

定理10. $S, D, C, E, \mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ は定理9 のようであるとし, さらに E は Fréchet differentiable norm をもつものとする. このとき, C から $F(\mathcal{S})$ 上への nonexpansive retraction P で, 任意の $s \in S$ に対し $P T_s = T_s P = P$ であり, しかも $P x \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$, $\forall x \in C$ となるものが一意に存在する.

さらに $\{\mu_\alpha\} \subset D^*$ が strongly regular であるならば, $x \in C$ に対し $\mathcal{T}_{\mu_\alpha} T_t x$ は t に関して一様に $P x$ に弱収束する.

証明. 定理9 によつて, C から $F(\mathcal{S})$ 上への "Ergodic retraction P " が存在する. また任意の $s \in S$ に対し

$$P x = P T_s x \in \overline{\text{co}}\{T_t T_s x : t \in S\} \subset \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$$

であるから, $P x \in \bigcap_s \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\} \cap F(\mathcal{S})$ となり, 定理3 を使えば, 2 のような P は一意であることがわかる. μ を invariant mean とし, $x \in C$ とすると

$$\mathcal{T}_\mu x = \int T_t x d\mu(t) = P x$$

であるから, 定理7, 8 より $\int T_{s+t} x d\mu_\alpha(s) = \mathcal{T}_{\mu_\alpha} T_t x$ は t に関して一様に $P x$ に弱収束する.

§5. Applications

定理10を用いると, つぎのような系は簡単に証明できる.

系1. E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする. T を C から C への nonexpansive 写像で, $F(T) \neq \emptyset$ とする. このとき, 任意の $x \in C$ に対して

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^{i+k} x \rightarrow y \in F(T)$$

である. またこの収束は k に関して一様でもある.

証明. $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{S} = \{T^i : i = 0, 1, 2, \dots\}$, $D = m(S)$ とし, 任意の $f \in D$ に対して

$$\mu_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

とする. このとき $\{\mu_n\}$ は strongly regular である.

系2. E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする. $\mathcal{S} = \{S(t) : 0 \leq t\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とする. このとき, 任意の $x \in C$ に対して

$$\frac{1}{s} \int_0^s S(t+k)x dt \rightarrow y \in F(\mathcal{S})$$

である. またこの収束は k に関して一様でもある.

証明. $S = [0, \infty)$, $\mathcal{S} = \{S(t) : 0 \leq t\}$, $D = C(S)$ (ただし, $C(S)$ は $\mathcal{S}$ 上の有界連続関数の全体である) とし, 任意の $f \in D$ に対して

$$\mu_s(f) = \frac{1}{s} \int_0^s f(t) dt$$

とすると, $\{\mu_s\}$ は strongly regular である.

$N = \{0, 1, 2, \dots\}$ とし, $Q = \{q_{n,m}\}_{n,m \in N}$ を strongly regular matrix とする. すなわち

$$(i) \sup_n \sum_m |q_{n,m}| < \infty; (ii) \lim_n \sum_m q_{n,m} = 1;$$

$$(iii) \lim_n \sum_m |q_{n,m+1} - q_{n,m}| = 0$$

を満たすとする. このとき, つぎの系を証明できる.

系3. E を Fréchet differentiable norm をもつ 一様凸な Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする. T を C から C への nonexpansive 写像で, $F(T) \neq \emptyset$ とする. このとき 任意の $x \in C$ に対して

$$\sum_m q_{n,m} T^{m+k} x \rightarrow y \in F(T)$$

である. またこの収束は k に関して一様収束でもある.

証明は系1, 2と同様である. またつぎのような系も得られる.

系4. E を Fréchet differentiable norm をもつ 一様凸な Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする. S, T を C から C への nonexpansive 写像で, $ST = TS$ なるものとし, $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ とする. このとき, 任意の $x \in C$ に対して

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=0}^{n-1} S^{i+k} T^{j+h} x \rightarrow y \in F(S) \cap F(T)$$

である. またこの収束は k, h に関して一様でもある.

以上のようなエルゴード定理は発展方程式の理論と大きな
かかわりをもっている。Baillon-Brezis [3] は発展方程式の
理論を用いて, C 上の nonexpansive semigroup のエルゴ
ード定理(系2) を証明したし, Bruck [7] はつぎのような
命題を証明した。

φ を Hilbert 空間 H から $(-\infty, \infty]$ への proper lower semi-
continuous convex 関数とし, 最小値をもつものとする。
 $\partial\varphi$ を φ の subdifferential とし, $\mathcal{S} = \{S(t); 0 \leq t\}$ を $-\partial\varphi$ に
よって生成される $\overline{D(\partial\varphi)}$ 上の nonexpansive semigroup
とすると, 任意の $x \in \overline{D(\partial\varphi)} = \overline{D(\varphi)}$ に対して, $S(t)x$ は
 $\partial\varphi^{-1}(0)$ の元に弱収束する。

またエルゴード定理の応用として, Baillon-Clément [4],
Hirano [12] は Hilbert 空間における Nonlinear Volterra
Equations の解の asymptotic behavior を研究し, Kido [17]
は一様凸な Banach 空間においてそれを行った。

最後に定理10を用いてつぎのような変分不等式に関する解
の近似法も考えられるので挙げておきたい。

C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし, A を maximal
monotone 作用素とする。 I_C を $x \in C$ のとき $I_C(x) = 0$,
 $x \notin C$ のとき $I_C(x) = \infty$ であるような関数とし, ∂I_C をその
subdifferential とする。 $A + \partial I_C$ を maximal monotone

であるとし, 変分不等式:

$$\begin{cases} u \in C \cap D(A), v \in Au, \\ \langle v, x - u \rangle \geq 0, \forall x \in C \end{cases}$$

を考える. この不等式は解 $u_0 \in C$ をもつものとし,
 $T = (I + A + \partial I_C)^{-1}$ とすると, T は C から C への nonexpansive 写像であり, T の不動点 $F(T)$ は変分不等式の解の集合と一致する. ゆえに $u_0 \in F(T)$. $x \in C$ に対し, $r = \|x - u_0\|$ とし, $C' = C \cap B_r[u_0]$ とする. ただし $B_r[u_0] = \{z \in H : \|u_0 - z\| \leq r\}$ である. すると C' は T -invariant であり, C' は H の空でない weakly compact convex 集合である. このとき, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ とする positive sequence $\{a_i\}$ に対し,

$$g_{\mu_n} x = \sum_{i=1}^n a_i T^i x / \sum_{i=1}^n a_i$$

を考えると, 定理10よりこれは変分不等式の解へ弱収束する.

References

- [1] J. B. Baillon, Un théorème de type ergodique pour les contractions nonlinéaires dans un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975), 1511-1514.
- [2] J. B. Baillon, Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroupes de contractions impaires, C. R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976), 75-78

- [3] J. B. Baillon - H. Brezis, Une remarque sur le comportement asymptotique des semigroupes non linéaires, Houston J. Math., 2 (1976), 5-7.
- [4] J. B. Baillon - P. Clément, Ergodic theorems for nonlinear Volterra equations in Hilbert space, Nonlinear Analysis, 5 (1981), 789-801
- [5] H. Brézis - F. E. Browder, Remarks on nonlinear ergodic theory, Advance Math., 25 (1977), 165-177.
- [6] R. Bruck, A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces, Israel J. Math., 32 (1979), 107-116.
- [7] R. Bruck, Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space, J. Func. Anal., 18 (1975), 15-26.
- [8] M. M. Day, Amenable semigroups, Illinois J. Math., 1 (1957), 509-544.
- [10] E. Granirer, On amenable semigroups with a finite-dimensional set of invariant means I, Illinois J. Math., 7 (1963), 32-48.
- [11] E. Granirer, A theorem on amenable semigroups, Trans. Amer. Math. Soc., 111 (1964), 367-379.

- [11] N. Hirano, A proof of the mean ergodic theorem for nonexpansive mappings in Banach space, Proc. Amer. Math. Soc., 78 (1980), 361-365.
- [12] N. Hirano, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations, J. Differential Equations, 47 (1983), 163-179.
- [13] N. Hirano-K. Kido-W. Takahashi, Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces, to appear.
- [14] N. Hirano-K. Kido-W. Takahashi, to appear.
- [15] N. Hirano-W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert spaces, Kōdai Math. J. 2 (1979), 11-25.
- [16] N. Hirano-W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Banach space, Pacific J. Math., 112 (1984), 333-346.
- [17] K. Kido, Almost convergence of solution of nonlinear Volterra equation in Banach space, to appear.
- [18] K. Kido-W. Takahashi, Mean ergodic theorems for semigroups of linear continuous operators in Banach spaces, to appear in J. Math. Anal. Appl.

- [19] K. Kido-W. Takahashi, Means on commutative semi-groups and nonlinear ergodic theorems, to appear in J. Math. Anal. Appl..
- [20] 高村幸男-小西芳雄, 非線形発展方程式, 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 1977.
- [21] A. T. Lau, Semigroup of nonexpansive mappings on a Hilbert space, to appear in J. Math. Anal. Appl..
- [22] A. T. Lau-W. Takahashi, Weak convergence and nonlinear ergodic theorems for reversible semigroup of nonexpansive mappings, to appear.
- [23] 宮寺功, 非線形半群, 紀伊国屋書店, 1977.
- [24] I. Miyadera-K. Kobayashi, On the asymptotic behavior of almost-orbits of nonlinear contractive semigroups in Banach spaces, Nonlinear Analysis, 6 (1982), 349-365.
- [25] R. R. Phelps, Convex sets and nearest points, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 790-797.
- [26] S. Reich, Nonlinear evolution equations and nonlinear ergodic theorems, Nonlinear Analysis, 1 (1977), 319-330.
- [27] S. Reich, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl.,

67 (1979), 274-276.

- [28] W. Takahashi, Invariant functions for amenable semigroups of positive contractions on L^1 , Kodai Math. Sem. Rep., 23 (1971), 131-143.
- [29] W. Takahashi, Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 168-181.
- [30] 高橋渉, 不動点定理とその周辺, 三田学会雑誌, 73 (1980), 32-68.
- [31] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.
- [32] W. Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543-553.
- [33] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, to appear.
- [34] 高橋渉-平野戴倫, 非線形函数解析学における最近の話題-非線形エルゴード定理について-, 数学 33 (1981), 50-65.