

4 次複素一般線型群の既約表現のテンソル積空間におけるザリスキ閉包

The Zariski closure in a space of 2-tensors on irreducible representations of the complex general linear group of degree 4

九州大学大学院数理学府 太田了徳^{*1}

RYOTOKU OTA

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY

Abstract

We consider the irreducible representations of the complex general linear group of degree 4 as polynomial mappings from the set of all complex square matrices of degree 4 to a tensor product of spaces of alternating 2-tensors on 4-dimensional complex vector spaces. We obtain the result that the Zariski closure of the image of such a polynomial mapping is either a singleton, the entire target space, or a non-trivial affine algebraic variety. Furthermore, we find that the image of the polynomial mapping is a dense subset of its Zariski closure.

1 序章

4 次複素一般線型群 $GL_4(\mathbb{C})$ の既約表現を $(\rho, \wedge^k \mathbb{C}^4)$ とする. 整数 k は $0 \leq k \leq 4$ をみたすものとする. このとき, $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\wedge^k \mathbb{C}$ のテンソル積 $\wedge^k \mathbb{C}^4 \otimes \wedge^k \mathbb{C}^4$ における Zariski 稠密な集合 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ と, その Zariski 閉包 $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))}$ を求めると以下の表 1 のようになる:

表 1: $M_{4C_k}(\mathbb{C})$ における稠密な集合とその Zariski 閉包

k	0	1	2	3	4
$\rho(M_4(\mathbb{C}))$	$\{1\}$	$M_4(\mathbb{C})$	$V(I_{16})$ に対して稠密な集合	$M_4(\mathbb{C})$ に対して稠密な集合	$M_1(\mathbb{C})$
$\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))}$	$\{1\}$	$M_4(\mathbb{C})$	$V(I_{16})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_1(\mathbb{C})$

ただし, 表現空間 $\wedge^k \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\wedge^k \mathbb{C}^4 \otimes \wedge^k \mathbb{C}^4$ は $M_{4C_k}(\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}$ 線型同型であるから, テンソル積 $\wedge^k \mathbb{C}^4 \otimes \wedge^k \mathbb{C}^4$ を $M_{4C_k}(\mathbb{C})$ とみなし, Zariski 位相を入れる. また, 注意として, $k = 2$ のとき, つまり $GL_4(\mathbb{C})$ の 6 次元表現 $(\rho, \wedge^2 \mathbb{C}^4)$ のとき, 像 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ は非自明なアフィン代数多様体 $V(I_{16})$ に対する稠密な部分集合となる [太田]. ただし, この非自明なアフィン代数多様体 $V(I_{16})$ は $M_6(\mathbb{C})$ の相対位相を入れた空間である.

本稿では, 線型空間 $M_{4C_k}(\mathbb{C})$ の部分集合に対して, 稠密性のみに着目した. すなわち, 「線型空間 $M_{4C_k}(\mathbb{C})$ の部分集合 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ が, 稠密な部分集合になるか否か, ならないのであればどのような集合に対して稠密

^{*1} 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744 E-mail: ota.ryotoku.588@s.kyushu-u.ac.jp

な部分集合になるのか」という問いを立て、答えを導き出した。特に $k = 2$ のとき、線型空間 $M_6(\mathbb{C})$ における部分集合 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ は、 $M_6(\mathbb{C})$ に対して稠密な部分集合とならず、非自明なアフィン代数多様体 $V(I_{16})$ に対する稠密な部分集合となる。

本稿では、表 1 の結果を証明する。以下、1.1 節で改めて表 1 の主張を述べ、第 2 章で証明を与える。また、特に断りがない限り、位相は Zariski 位相とする。

1.1 主結果

定理 1

4 次複素一般線型群の既約表現を $(\rho, \bigwedge^k \mathbb{C}^4)$ とする。ただし整数 k は $0 \leq k \leq 4$ をみたすものとする。このとき、 ${}_4C_k$ 次元表現 $\rho: GL_4(\mathbb{C}) \rightarrow GL_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ を 4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\bigwedge^k \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\bigwedge^k \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^4 \cong M_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ への多項式写像とみなす：

$$\begin{array}{ccc} \rho: M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_{{}_4C_k}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longmapsto & \bigwedge^k A. \end{array}$$

このとき、像 $\rho(M_4(\mathbb{C})) \subset M_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ とその Zariski 閉包 $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} \subset M_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ は次の通りである：

$$\begin{aligned} k=0 \text{ のとき, } \rho(M_4(\mathbb{C})) &= \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = \{1\}, \\ k=1 \text{ のとき, } \rho(M_4(\mathbb{C})) &= \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = M_4(\mathbb{C}), \\ k=2 \text{ のとき, } \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} &= V(I_{16}), \\ k=3 \text{ のとき, } \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} &= M_4(\mathbb{C}), \\ k=4 \text{ のとき, } \rho(M_4(\mathbb{C})) &= \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = M_1(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

2 主結果の証明

ここでは 1.1 節で述べた定理 1 に対して、証明を与える。

証明 $k=0$ とする。

$GL_4(\mathbb{C})$ の自明表現 $(\rho, \bigwedge^0 \mathbb{C}^4)$ に対して、4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\bigwedge^0 \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\bigwedge^0 \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^0 \mathbb{C}^4 \cong M_1(\mathbb{C})$ への多項式写像を定めると、

$$\begin{array}{ccc} \rho: M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_1(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longmapsto & 1 \end{array}$$

を得る。このとき、像は $\rho(M_4(\mathbb{C})) = \{1\}$ である。したがって $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ の Zariski 閉包は、 $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = \{1\}$ である。

$k=1$ とする。

$GL_4(\mathbb{C})$ の自然表現 $(\rho, \bigwedge^1 \mathbb{C}^4)$ に対して、4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\bigwedge^1 \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\bigwedge^1 \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^1 \mathbb{C}^4 \cong M_4(\mathbb{C})$ への多項式写像を定めると、

$$\begin{array}{ccc} \rho: M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_4(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longmapsto & A \end{array}$$

を得る. このとき, ρ は全単射であるから像は $\rho(M_4(\mathbb{C})) = M_4(\mathbb{C})$ である. 像 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ の Zariski 閉包は, $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = M_4(\mathbb{C})$ である.

$k = 2$ とする.

$GL_4(\mathbb{C})$ の 6 次元表現 $(\rho, \wedge^2 \mathbb{C}^4)$ に対して, 4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\wedge^2 \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\wedge^2 \mathbb{C}^4 \otimes \wedge^2 \mathbb{C}^4 \cong M_6(\mathbb{C})$ への多項式写像を定めると,

$$\begin{array}{ccc} \rho: M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_6(\mathbb{C}) \\ \Psi & & \Psi \\ A & \longmapsto & \wedge^2 A \end{array}$$

を得る. ただし, $\wedge^2 A := (\det A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix})_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4, 1 \leq j_1 < j_2 \leq 4}$ である [山本]. ここで, 4 次複素正方行列 A の成分を $a_{ij} \in \mathbb{C}$ とし,

$$x_{11} = \det A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =, \dots, x_{66} = \det A \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

イデアル I を $I = \langle x_{11} - \det A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \dots, x_{66} - \det A \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{C}[a_{11}, \dots, a_{44}, x_{11}, \dots, x_{66}]$ とおく. すると 16 次消去イデアル $I_{16} = I \cap \mathbb{C}[x_{11}, \dots, x_{44}]$ のグレブナー基底 G_{16} は

$$\begin{aligned} G_{16} &= \left\{ \begin{array}{l} x_{63}x_{64} - x_{62}x_{65} + x_{61}x_{66}, \dots, \\ -x_{14}x_{22}x_{24}x_{51}x_{52}x_{55}x_{62} + \dots - x_{11}^2x_{22}^2x_{52}x_{53}x_{63}x_{66} \end{array} \right\} \\ &= \{g_1, \dots, g_{772}\}. \end{aligned}$$

よって, 16 次の消去イデアル $I_{16} = \langle G_{16} \rangle$ の共通零点全体は,

$$V(I_{16}) = \left\{ (x_1, \dots, x_{36}) \in M_6(\mathbb{C}) \left| \begin{array}{l} g_1(x_{11}, \dots, x_{66}) = 0, \\ \vdots \\ g_{772}(x_{11}, \dots, x_{66}) = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

よって, 多項式陰関数表示化 [COX] より, $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ の Zariski 閉包は, $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = V(I_{16})$ である.

$k = 3$ とする.

$GL_4(\mathbb{C})$ の 4 次元表現 $(\rho, \wedge^3 \mathbb{C}^4)$ に対して, 4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\wedge^3 \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\wedge^3 \mathbb{C}^4 \otimes \wedge^3 \mathbb{C}^4 \cong M_4(\mathbb{C})$ への多項式写像を定めると,

$$\begin{array}{ccc} \rho: M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_4(\mathbb{C}) \\ \Psi & & \Psi \\ A & \longmapsto & \wedge^3 A \end{array}$$

を得る. ただし, $\wedge^3 A := (\det A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix})_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4, 1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq 4}$ である [山本]. ここで, 4 次複素正方行列 A の成分を $a_{ij} \in \mathbb{C}$ とし,

$$x_{11} = \det A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =, \dots, x_{44} = \det A \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

イデアル I を $I = \langle x_{11} - \det A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \dots, x_{44} - \det A \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{C}[a_{11}, \dots, a_{44}, x_{11}, \dots, x_{44}]$ とおく. すると 16 次消去イデアル I_{16} は $I_{16} = I \cap \mathbb{C}[x_{11}, \dots, x_{44}] = \langle 0 \rangle$ である. よって, 多項式陰関数表示化 [COX] より, 像 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ の Zariski 閉包は, $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = V(I_{16}) = V(0) = M_4(\mathbb{C})$ である.

$k = 4$ とする.

$GL_4(\mathbb{C})$ の行列式表現 $(\rho, \wedge^4 \mathbb{C}^4)$ に対して, 4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\wedge^4 \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\wedge^4 \mathbb{C}^4 \otimes \wedge^4 \mathbb{C}^4 \cong M_1(\mathbb{C})$ への多項式写像を定めると,

$$\begin{array}{ccc} \rho: M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_1(\mathbb{C}) \\ \psi & & \psi \\ A & \longmapsto & \wedge^4 A \end{array}$$

を得る. ただし, $\wedge^4 A := (\det A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \end{pmatrix})_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 4, 1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq 4} = \det A$. ここで, 4 次複素正方行列 A の成分を $a_{ij} \in \mathbb{C}$ とし, $x_{11} = \det A$ イデアル I を $I = \langle x_{11} - \det A \rangle \subset \mathbb{C}[a_{11}, \dots, a_{44}, x_{11}, \dots, x_{44}]$ とおく. すると 16 次消去イデアル I_{16} は $I_{16} = I \cap \mathbb{C}[x_{11}, \dots, x_{44}] = \langle 0 \rangle$ である. よって, 多項式陰関数表示化 [COX] より, 像 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ の Zariski 閉包は, $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = V(I_{16}) = V(0) = M_1(\mathbb{C})$ である.

また, 像 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ が $M_1(\mathbb{C})$ となることを示す. $\rho^{-1}(M_1(\mathbb{C}) - \{0\}) = GL_4(\mathbb{C})$, $\rho(M_4(\mathbb{C}) - GL_4(\mathbb{C})) = \{0\}$ であるから, $\rho(M_4(\mathbb{C})) = \rho(GL_4(\mathbb{C}) \cup (M_4(\mathbb{C}) - GL_4(\mathbb{C}))) = \rho(GL_4(\mathbb{C})) \cup \rho(M_4(\mathbb{C}) - GL_4(\mathbb{C})) = M_1(\mathbb{C}) - \{0\} \cup \{0\} = M_1(\mathbb{C})$. 以上より, $\rho(M_4(\mathbb{C})) = \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = M_1(\mathbb{C})$.

■

謝 辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参 考 文 献

[COX] D. Cox, J. Little and D. O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*, 4th edition, Springer-Verlag, New York, 2015.

[山本] 山本哲朗. 『行列解析の基礎』, サイエンス社, SGC ライブラリ 79, 2010.

[太田] 太田了徳, 4 次複素一般線型群の既約表現のテンソル積空間におけるグレブナー基底の特徴, 数理解析研究所講究録 **2280** (2024), pp.46-54.