

渦系の運動

特に半円領域における渦系の運動

東大 理 木村 芳文

Yoshifumi Kimura

§ 1 はじめに

2次元渦系群の運動の研究は、古くは前世紀後半に、Kelvin や Routh らにより活発に行なわれたものであるが、近年、また新たな問題意識より注目されている。1つは Onsager により提唱された渦系群の統計力学が、液体ヘリウム II の表層に渦系が実現することがわかって現実性を帯びてきたこと、そしてもう1つは、ここ数年におけるカオスの研究の発展に伴い、渦系群の運動方程式系の持つ非線型性とカオスの間の関係に興味を持たれたことである。

先の2つの視点のうち、特に後者に関しては、少数の渦系の無限領域内における振舞いに話題がかなり集中していた感がある。^{1)~6)} たとえば Novikov¹⁾, Aref⁵⁾ によると、無限領域内の3個の渦系(同種)は相対運動を調べると周期的であり、個数が4となると非周期運動が現れカオスとなる。

そのような訳で、無限領域における4つの渦系のカオス性、統計性についてはいくつかの研究が行われてきた。

渦系が有限領域内にある場合はカオスの始まる個数は少なくなると期待される。これは無限領域においては運動の保存量であったエネルギー、慣性モーメント、角運動量、重心のうちいくつかは、有限領域においては保存量で無くなり、系の実質的な自由度が増加するためである。 Murty & Rao⁷⁾ は円領域における同種の渦系の運動を調べ、3個以上では運動がカオスになることを数値計算により報告している。この問題の場合、位置の自由度 $2 \times 3 = 6$ よりエネルギーと慣性モーメント分の2を差し引いた4が系の自由度といえる。このうち慣性モーメントは系の回転対称性により保存するものであるから、この対称性の無い系、例えば半円領域などに渦系が置かれた場合、事情が変わってくる。

本研究は、半円領域内における2つの渦系の運動を特に異種の場合に調べたものである。この場合、自由度は3となり円領域の3つの渦系の場合より低い。よってカオスがおこるかどうかは興味深い問題である。半円内の渦系は円内に対称に渦系を置くことにより実現できる。円の外側に円周上境界条件を満足させるために置く鏡像も含めると都合8個の対称に置かれた渦系を考えていることになる。考察の手順は以下

の通りである。①解析計算によって得られる固定点(安定、不安定)の近傍での運動を調べる。②初期条件を1つの渦系は固定点上に留め、他の渦系の位置を固定点よりずらして行く。③1つの渦系を固定点に置いた時のエネルギー等高線を描き、等エネルギー線上の数点を初期条件として選ぶ。

上で述べたいくつかの初期条件に対して渦系の運動の軌跡を計算機で追跡した。計算のスキームとしては4次のRunge-Kutta法を採用し、エネルギー保存が充分成り立つように時間きざみを選んだ。渦系の軌道を見ると、それが擬周期的であるか、あるいは非周期的であるか、ある程度のことは言えるが、それでは積極的な証拠には成り得ない。カオスであるためには、局所的拡大率—リャプノフ指数—の測定、一次元系への射影、連続スペクトルの観察等、いろいろなものが考えられるが、ここでは一番最後の連続スペクトルの出現をもってカオスであるということとした。

以下§2において簡単に原理を述べ、§3に結果を提示する。

§2 原理

無限領域の渦系群の運動は次の運動方程式により記述される。⁸⁾

$$\frac{dz_m^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{N'} \frac{\Gamma_i}{z_m - z_i} \quad (2.1)$$

ここで $z_m = x_m + iy_m$, Γ_m は m 番目の渦系の位置, 強さを表わし, $*$ は複素共役, $\sum$ の右上のプライムは和のうち $m=i$ の特異項を除くことを表わしている。

渦系が容器の中のような有限の領域にある場合には, 境界条件を満足させるために, 鏡像の渦系を考慮する必要がある。半径 a の円内の位置 z にある強さ Γ の渦系の鏡像は a^2/z^* にある強さ $-\Gamma$ の渦系である。鏡像を考える場合には自分自身の鏡像との相互作用も取り込まなくてはならないことに注意して運動方程式を書くと, N 個の渦系に対して,

$$\frac{dz_m^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{z_m - z_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i z_i^*}{z_m z_i^* - 1} \right] \quad (2.2)$$

となる。ここでは簡単のため円の半径を1とした。

円筒内の渦系の運動における保存量, すなわち (2.2) の積分としては, エネルギー

$$E = -\frac{1}{4\pi} \left[\sum_i \sum_{i \neq m} \log |z_i - z_m|^{\Gamma_i \Gamma_m} - \sum_i \sum_m \log \left| \frac{1}{z_i^*} - z_m \right|^{\Gamma_i \Gamma_m} \right] \quad (2.3)$$

と慣性モーメント

$$I = \sum_m \Gamma_m |z_m|^2 \quad (2.4)$$

が知られている。

半円領域内の運動を見るには、渦系を円内に図1のように配置すればよい。すなわち、円内に対称に置かれた4つの渦系により半円内の運動が得られる。

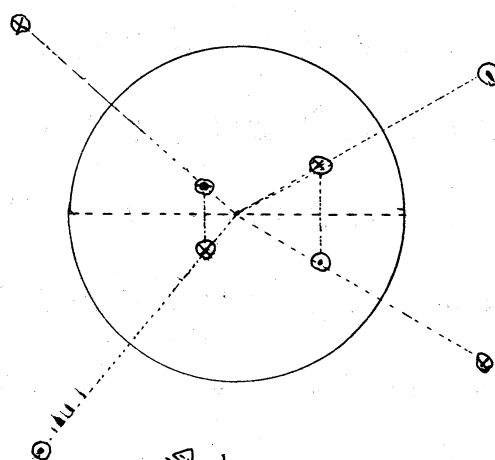


図1

§3 結果

以下、特別な場合として $\Gamma_1 = 1$ $\Gamma_2 = -1$, すなわち半円内の異種で同じ強さの渦系の問題を考える。

3-1, 2つの固定点

方程式(2.2)の左辺を0とするような配置が、半円異種の場合に計算できる。⁽¹⁰⁾ 1つは

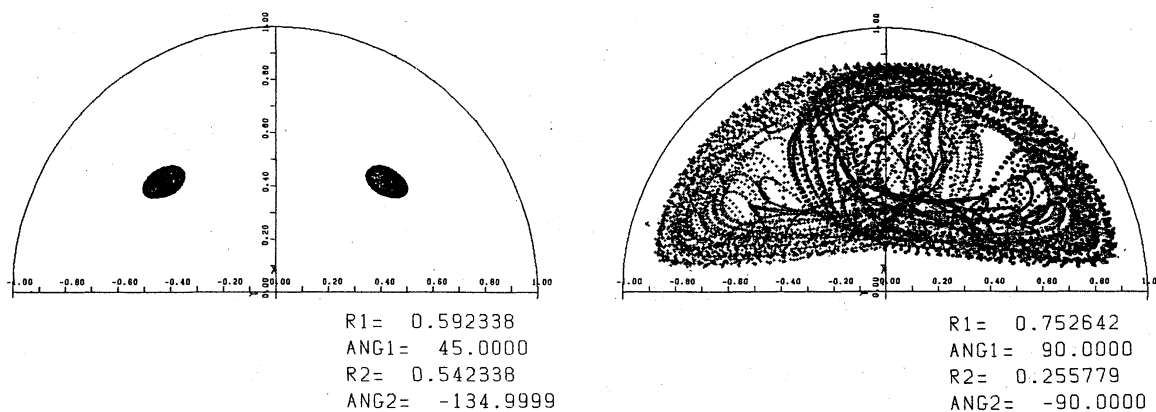
$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad r_1 &= r_2 = (\sqrt{17} - 4)^{1/4} \\ \theta_1 &= \pi/4, \quad \theta_2 = 3\pi/4 \end{aligned} \quad (3.1)$$

であり、(図2)、もう1つは

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad r_1 &= 0.75264 \dots \quad r_2 = 0.25578 \dots \\ \theta_1 &= \theta_2 = \pi/2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

である。(図3)

ここで、渦系の位置は $z_m = r_m e^{i\theta_m}$ であるとしている。
 2つの固定点の安定性を調べるために、(2.2)の右辺を線形化して固有値を求めると、①については $\pm 4.519i$, $\pm 2.076i$ であるのに対し、②は ± 6.219 , $\pm 2.716i$ であり、①は中立安定、②は不安定であることがわかる。図4に軌道の様子を示した。これは(2.2)の時間発展を50万ステップ計算し、その100ステップごとの位置をプロットしたものである。



3-2 固定点からの移動

図5は、1つの渦系を固定点に置いた時のエネルギー等高線図である。また次頁の図6のa)~f)は初期条件を1つ

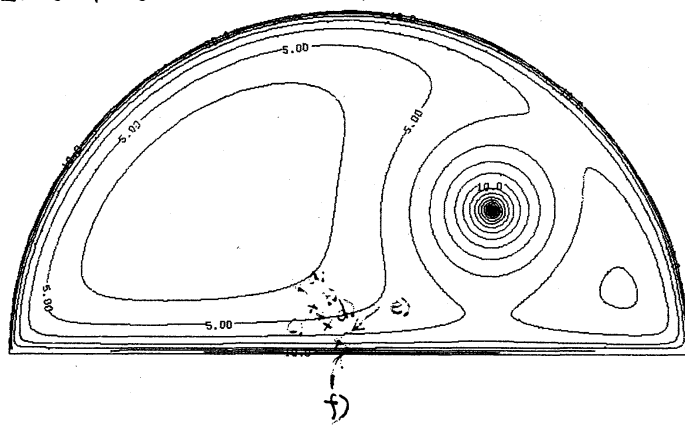
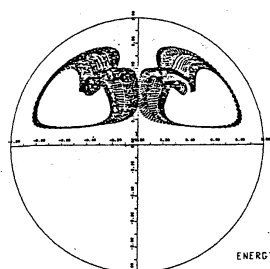
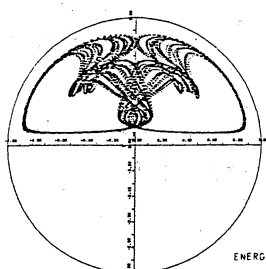


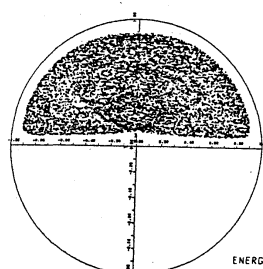
図5



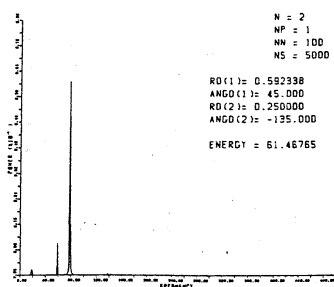
ENERGY = 61.4676570



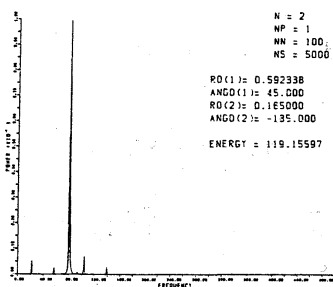
ENERGY = 119.1559791



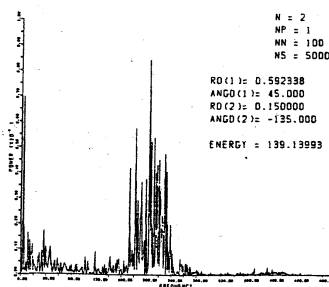
ENERGY = 139.1399383



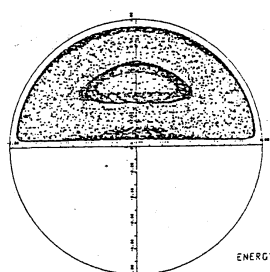
a)



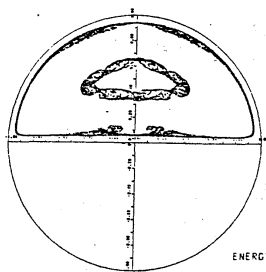
b)



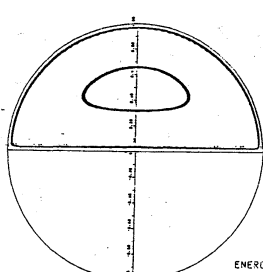
c)



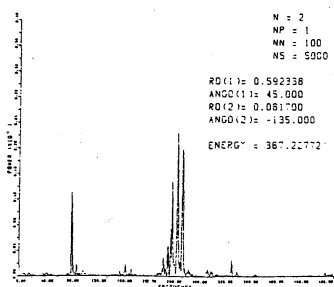
ENERGY = 387.2277259



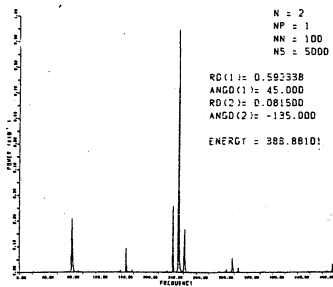
ENERGY = 388.8810157



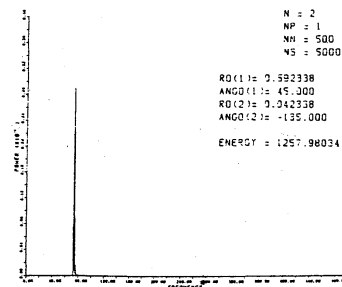
ENERGY = 1257.9803466



d)



e)



f)

图 6

7

を固定点に留め、他の1つを図5のa)~f)の点に置いたものである。ここで、エネルギーは便宜的に(2.3)のEに対し

$$G = \exp(-4\pi E) \quad (3.3)$$

をとるものとする。図5よりわかるようにa)~f)とかえるにつれて、 G の値はしだいに大きくなっている。a)では安定固定点に近いため軌道は擬周期的であるが、b)では2つの軌道が交叉しだし、c)では2つの軌道は完全に混ざりあってごちゃごちゃした状態、カオス、が現れる。さらに G の値をあげるとd)ではカオスの中に密度の高い島が見えだし、さらに G をあげると、渦系はその島の中にトラップされてしまう。その極限としては、f)に見えるように1つは壁に沿って運動をし、もう1つは1つの定軌道を描く。これは、壁に沿っての渦系が他方の渦系に影響をほとんど与えずに、あたかも半円内に1つの渦系があるように振舞うためである。a)~f)におけるスペクトルは、1つ渦系の γ の時間変化についてのパワースペクトルである。軌道の様子とパワースペクトルとがうまく対応しているのがわかる。すなわち、a)、b)ではいくつかの周期軌道であるのが、c)では連続的になっている。d)で連続スペクトルが離散化しだし、e)では再び、いくつかの周期軌道となり、f)は単一周期である。

上述の 擬周期→カオス→島の出現→擬周期(周期) の変化を別の方法で表現してみる。その方法は次頁に示すようなポアンカレ断面である。これは第1の渦系が $\theta = 135^\circ$ の線を右から左によぎった時に他の渦系の動径を横軸、角度を縦軸にとり点をプロットしたものである。7図のa)では点が1つの形をつくっており、トーラスである。b)では点は散在しておりカオスとなっている。c)では散在している点の中に島が見えており、d)では再びトーラスとなっているのがわかる。トーラスの存在は他の積分の存在を示しているので、渦系系がこの場合には可積分になっていると思われる。

今までは渦系を半径に沿って変位させたが、では、半径一定で角度を変化させるとどうなるであろうか。図5のエネルギー等高線でg)、h)と初期条件をとった時の軌道を追ったものが、図8である。g)では軌道は対称であるが非周期的になりはじめている、h)では完全に非周期的(あるいは無限個の周期軌道とも考えられるかもしれない。)となっている。h)においてはGの値は極めて大きくなっており、調べてみると図9のような運動をしていることがわかる。一般に異符号の渦系が近づくと2つはあたかも1つの粒子のごとく直線運動することが知られている。この場合も同様であるが、直線運動をしている渦対は壁にぶつかり、2つに分かれる。(自分

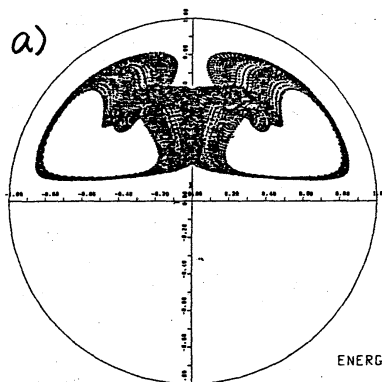
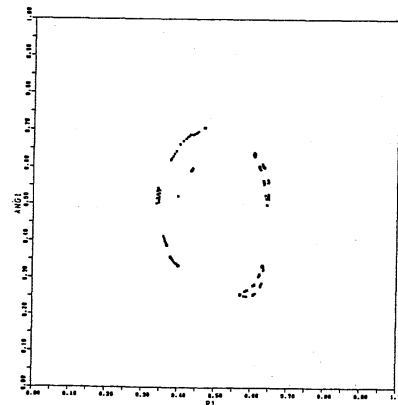
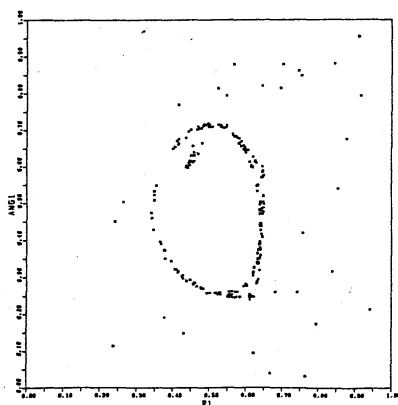
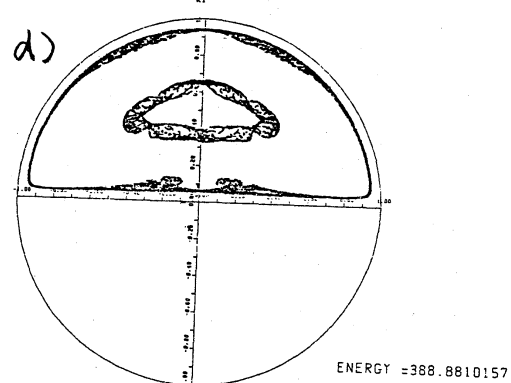
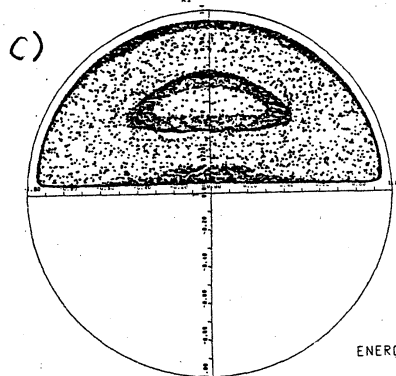
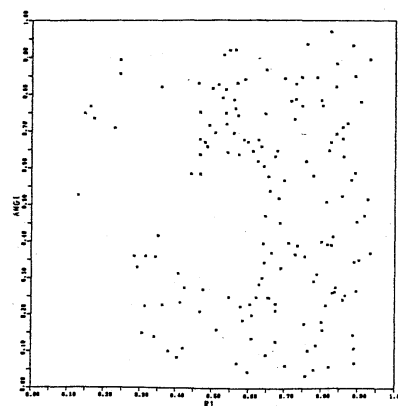
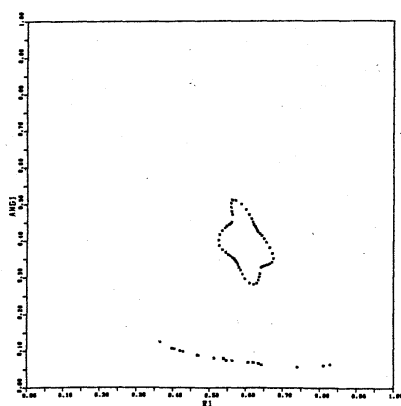
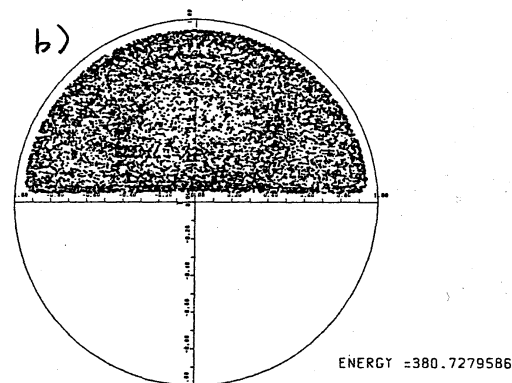
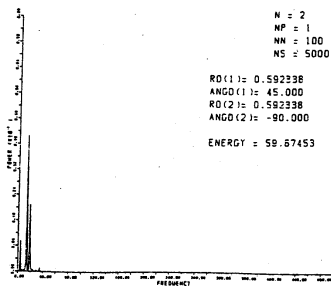
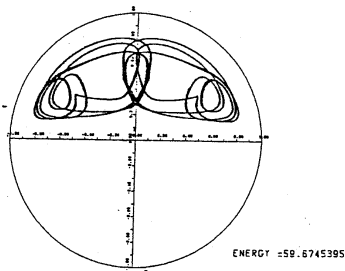
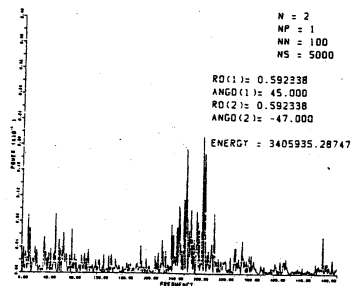
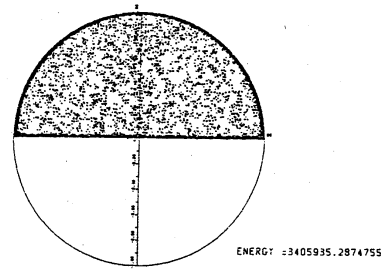


图 7





g)



h)

図 8

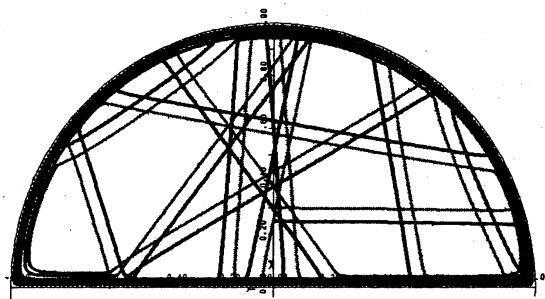


図 9

の鏡像と渦対をつくって壁に沿って動く。) この衝突→分裂の過程を模式的に描いたのが図10である。⁹⁾ これは平面に対して渦対が斜めに衝突する時の衝突後の様子(b) あるいは2つの渦対の正面衝突の場合の衝突後の新近状態(a) を表わしたものである。計算によると、 D と θ がわかるとき (D , θ は

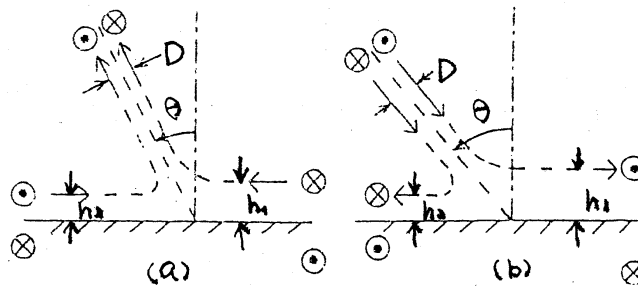


図 10

無限遠での渦対の間隔と平面の法線からの角度である。) h_1, h_2

は

$$h_1 = D (\sqrt{1 + \sin^2 \theta} + \sin \theta) \quad (3.4)$$

$$h_2 = D (\sqrt{1 + \sin^2 \theta} - \sin \theta) \quad (3.5)$$

で与えられる。この衝突→分裂→衝突→…で得られる描像は剛体球が領域内で反射を繰り返すことに似ているので、ビリヤードタイプのカオスと呼ぶことにしよう。これは明らかに先に得られた2つの周期運動の間のカオスとは異質なものであるといえる。よって我々は2種類のカオスを得たことになる。

それでは、上で述べたカオスを支配するパラメータは何であろうか。最初に思いつくのはエネルギーである。そこで再びエネルギー等高線に戻って等エネルギー線上で同じような状態が得られるかどうかを調べたのが図11である。等高線 A), B), C) の3点に対応する初期条件で動かしてみた。見て

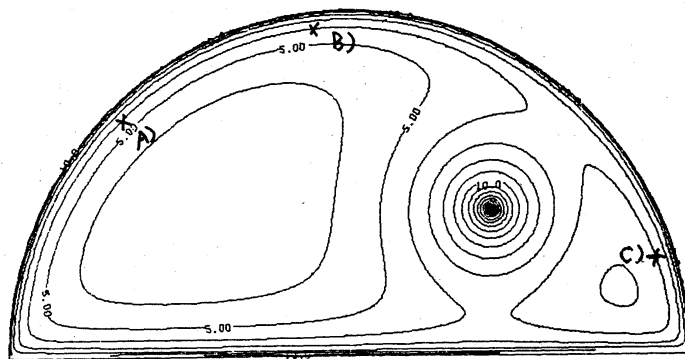
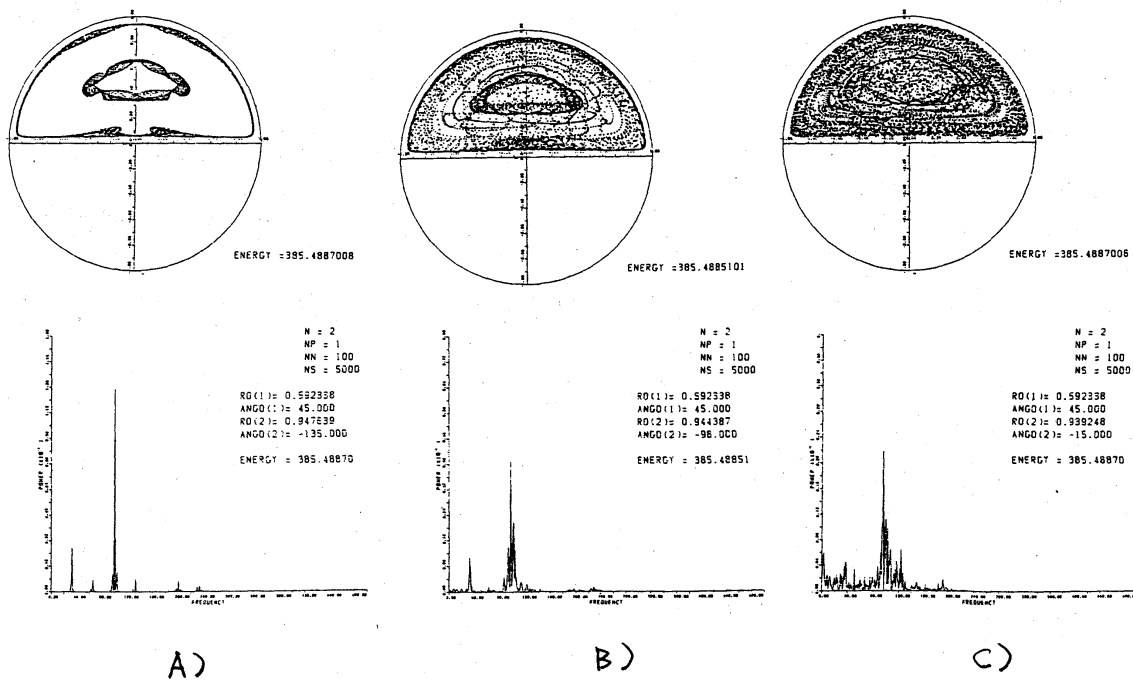


図 11

わかるように、等エネルギー線上でも同じ状態が得られるとは限らない。エネルギーの他に、あるパラメータが存在するのであろうが、まだ、それは求まってはいない。唯、言えるのは壁との近さを与えるようなものに違いないということである。

§4 結 論

半円内の異種の2つの渦系の運動を調べて次のことがわかった。①エネルギーのある値においてカオスが確認された。②カオスのタイプに2種類あった。③カオスを支配するパラメーターがエネルギーの他に壁との近さを表わすものとして存在しそうである。

参考文献

- 1) E. A. Novikov ; Sov. Phys. JETP 41 (1976) 937 - 943
- 2) E. A. Novikov & Yu. B. Sedov ; Sov. Phys. JETP 48 (1978) 440
- 3) E. A. Novikov & Yu. B. Sedov ; Sov. Phys. JETP 50 (1979) 297
- 4) E. A. Novikov & Yu. B. Sedov ; JETP Lett 29 (1979) 677
- 5) H. Aref. & N. Pomphrey ; Proc. Roy. Soc. A380 (1982) 359 - 387
- 6) H. Aref ; Ann. Rev. Fluid Mech. 15 (1983) 345 - 389
- 7) G. S. Murty & K. S. Rao ; J. Fluid Mech. 40 (1970) 595
- 8) I. Imai ; Ryutai Rikigaku (Fluid Dynamics)
- 9) H. Hasimoto et al ; Proceedings of IUTAM symposium on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids in Kyoto
- 10) Y. Kimura & H. Hasimoto ; to be published.