

分散性圧縮性流体の臨界に近..ノズル流れ

阪大 基礎工 森岡茂樹

§1. まえおき

普通の気体力学で知られている臨界に近..ノズル流れの簡単な理論と、その現象が分散性のある圧縮性流体でいどうなるかを考える。

空気のような圧縮性流体では、その中を伝わる音の速さは波数に関係なく一定であると思われる。しかし音速が波数によって違うような圧縮性流体があれば、そのものを分散性圧縮性流体と呼ぶ。そのような例は気液二相流やプラズマ流でも見かける。

今大きな空気の溜につながれた細長いノズルを考えてみる。¹⁾ 空気の溜の圧力を P_0 、ノズル出口の圧力を P_2 とする。 P_2 が P_0 に等しければ流れは生じないが、 P_2 を下げて行くと流れが生じ流速が増し、流量が増える。このとき流速はスロートで最大となるが、その最大値が局所音速に達すると流量はそれ以上ふえなくなり、いわゆる流れの閉塞が起る。出口圧力の P_2 の

以上の減少はスロート下流のノズルの発散部分に現われる衝撃波の位置と、その下流の流れだけを変える。やがて衝撃波が出口まで来ると、その以後は衝撃波を伴うジェットパターンの変化だけが起る。

このようなノズル流れの簡単な解析は一次元流れを仮定してできる。連続の式 $\rho u A = \text{const.}$, 運動量の式 $\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx}$, 状態式 $p \rho^{-\gamma} = \text{const.}$ から ρ , p の導関数を消去すれば

$$(1-M^2) \frac{du}{dx} = -\frac{u}{A} \frac{dA}{dx} \quad (1-1)$$

但し $M^2 = \frac{\rho u^2}{\gamma p}$ は局所 Mach 数, A はノズルの断面積である。

$x-u$ 面での解曲線は図1のようになる。 $(1-M^2) = \frac{dA}{dx} = 0$ に鞍形の特異点がある。ちょうど特異点を通る解曲線は臨界流量に対応する。臨界値以下の流量では x の全域にわたる解曲線が二つ存在し、上下の分枝はそれぞれ超音速解と亜音速解を表わす。一方臨界値以上の流量では x の全域にわたる解曲線は存在しない。ノズル

出口の圧力が二つの臨界曲線の終端圧力の間にあるとき、スロート下流に衝撃波を伴う流れが生じる。

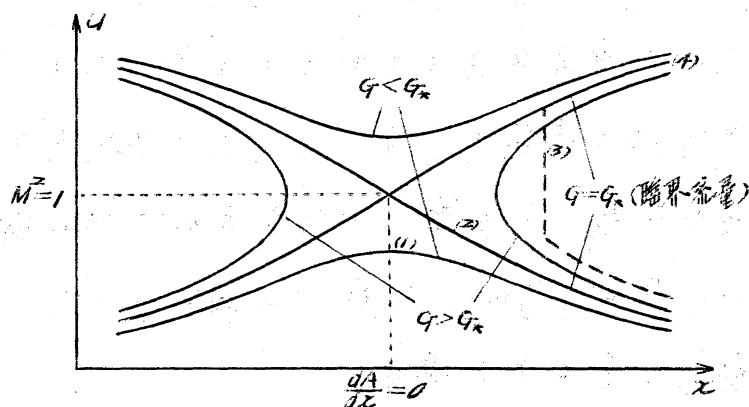


図 1

流れの開裂はスロートにおける流速が音速に達したとき下流条件の情報かスロートで遮断され、上流へ伝わりなくなる。と考えられる。情報の伝わる速さがその内容(音の波数)によって違うような分散性圧縮性流体では流れの開裂の様子も違ってくるであろう。

§2 ではこのような臨界に近いノズル流れの問題が普通の圧縮性流体でどのように扱われるかを見てみる。しかしこれらをもっと複雑な分散性圧縮性流体に拡張することを考慮して最も簡単なものからいってゆかそう。これらは一次元および二次元(すなわち軸対称)流れの線形および非線形振動論である。

§3 では最も簡単な分散性圧縮性流体の二つの代表的な例を取り上げ、振動の系統や現象の特徴について述べる。§4 ではさらに複雑な分散性圧縮性流体の例について注意すべき点を述べる。

完全な問題はあらゆる形のノズルについて壁面、入口、出口における適当な条件に関する混合境界値問題となるが、現象の定性的な特徴をえとく分るので現象を考え、ここでは一维線形振動の形式解や非線形振動の類似解から臨界に近い流れ場の性質を調べ、振動する遷音速ノズル流れに対する適切な問題を与える方を探る。

§2. 従来の気体力学における扱ひ方

1. 一次元線形振動

無次元化した連続の式、運動量の式、状態式は

$$\rho u A = 1, \quad \rho u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{dx}, \quad p \rho^{-\gamma} = 1 \quad (2-1)$$

のように書ける。但し M は基準点の Mach 数を表わす。一定断面面積の管内の一流体からの振動を考え、 $A = 1 - \epsilon A'$, $u = 1 + \epsilon u'$, ... と (2-1) に代入し、振動の高次項を落し、 u' について解けば

$$(1 - M^2) u' = A'(x) \quad (2-2)$$

を得る。これはノズル流の最も簡単な解と見られるが、 M^2 が 1 に近くなるとはノズル流に成り立たない。

2. 一次元非線形振動

線形振動の解 (2-2) は M^2 が 1 に近くなるとノズル断面面積のわずかな変化が流場に大きな変動をもたらすことを示唆する。

この事情を考慮して断面面積の変化が $O(\epsilon)$ のとき流場の変動は $O(\epsilon^{1/2})$ であると考えよう。そこで $A = 1 - \epsilon A'$, $u = 1 + \epsilon^{1/2} u'$, ... と (2-1) に代入し、最低次の項から成る式を書き下すと

$$\frac{(1 - M^2)}{\epsilon^{1/2}} u' - \frac{1}{2} (\gamma + 1) u'^2 = A'(x) \quad (2-3)$$

この解は臨界に近くなるとノズル流の特徴とある程度うまく捕えてゐる。鞍形の特異点やこの近くの解曲線を与え、流場の閉条件とすれば

$$(1 - M_c^2)^2 < 2(\gamma + 1)\epsilon \quad (2-4)$$

を与える。

3. 二次元線形擾動

臨界に近づく流の二次元的構造が顕著になる。また磁場のかけたプラズマ流のような分散性圧縮性流体では本質的に二次元(または三次元)構造を持つている。

$y = \pm\{1 - \epsilon f(x)\}$ で表わされる二次元ノズルに対して流の擾動を $u = 1 + \epsilon u'$, $v = \epsilon v'$, ... のようにとれば, 二次元に拡張した (2-1) は線形化される

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} = 0 \quad (2-5)$$

を与える。壁上の条件は $y = \pm 1$ で $\frac{\partial u'}{\partial y} = \mp \frac{df}{dx}$ のように与えられる。ノズルが十分長いとき解は一般に Fourier 積分の形で表わされる。

$$u' = \frac{1}{2iL} \int_{-N-i0}^{N-i0} \frac{k^2 \bar{f}(k) \cosh(\alpha k y)}{\alpha k \sinh(\alpha k)} e^{ikx} dk \quad (2-6)$$

但し $\alpha^2 = 1 - M^2$, $\bar{f}(k) = \int_{-N}^N f(x) e^{-ikx} dx$. M^2 が 1 に近づくとき解は一樣に成り立たない。

4. 二次元非線形擾動

線形理論は遷音速流で壁のわずかな変化が流に大きな変動を与え, 流と直角な方向に遠くまで及ぶことを示唆する。そこで流と直角な方向に押し縮めた座標系 $\xi = x$, $\eta = \epsilon y$ を用い, 流の擾動を $u = 1 + \epsilon^2 u'$, $v = \epsilon v'$, ... のようにとれば, 以下の遷音速の式が得られる。

$$\frac{1 - M^2}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} (\gamma + 1) \frac{\partial^2 u'^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 0 \quad (2-7)$$

壁の条件は $\eta = \pm \epsilon^{\frac{1}{2}}$ により $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \mp \frac{df}{d\xi^2}$ に変換される。(2-7) はホドグラフ変換により線形化され、簡単な混合型の式を与える。遷音速流れの多くの性質がその解から知られる。レクレ散逸や分散の効果を加えるとき、ホドグラフ変換はもはや有効でない。一方 (2-7) の解を直接求めることは非常にむずかしいがノズル流れを表す Tomotika-Tamada (以下 T-T と略す) の相似解に注意した²⁾。この相似解はノズルの形とあらたじめ指定できないが、散逸や分散のある場合にもしばしば有効であり臨界に近いノズル流れの二次を構造を知るのに役立つ。(2-7) は変換 $\frac{1}{2}(\gamma+1)u' = w(z) + z\eta^2$, $z = \xi + \eta^2$ により二階の常微分方程式に帰着できる。

$$\frac{1-M^2}{\epsilon^{\frac{2}{3}}} \frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{d^2}{dz^2} w^2 + z \frac{dw}{dz} + 4 = 0 \quad (2-8)$$

これは二度積分でき、一般解を与える

$$(\tilde{w} + \epsilon \chi \tilde{w} - z \epsilon)^2 = C_2 \quad (2-9)$$

但し $\tilde{w} = w - (1-M^2)/2\epsilon^{\frac{2}{3}}$, $\epsilon = z + (1-M^2)/4\epsilon^{\frac{2}{3}} - C_1$ 。 $\epsilon - \tilde{w}$ 面の解曲線は図1と定性的に似ている。このように相似変換は軸対稱な流れにも容易に拡張できる。³⁾

§3. 簡単な代表的なシフの例

1. 冷いイオンと熱い電子から成る稀薄な電離気体

外部磁場がなく、電子は等温変化するとし、電子の質量は

無視する。無次元形ビイオンと電子に対する連続の式と運動量の式は

$$n_i u_i A = n_e u_e A = 1, \quad (3-1)$$

$$M^2 u_i \frac{du_i}{dx} = E, \quad 0 = -\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dx} - E. \quad (3-2)$$

ポアソン式の式は $\frac{\lambda_D^2}{L^2} \frac{dE}{dx} = n_i - n_e \quad (3-3)$

と書ける。但し $M^2 = m_i u_i^2 / kT_e$, λ_D は Debye の長さである。

まず一次元線形振動をとり、§2-1. と同じ系統で

$$\epsilon_{\lambda_D} \frac{d^2 u_i}{dx^2} + (1 - M^2) u_i = A(x) \quad (3-4)$$

を得る。但し $\epsilon_{\lambda_D} = M^2 \lambda_D^2 / L^2$ 。 (3-4) は $M^2 < 1$ のとき形式的に線形振動振動の式であり、その解は

$$u_i = \frac{1}{\epsilon_{\lambda_D} \alpha} \int_0^x A(\xi) \sin\left\{\frac{\alpha}{\epsilon_{\lambda_D}}(x - \xi)\right\} d\xi \quad (3-5)$$

で表わされる。但し $\alpha^2 = 1 - M^2$ 。今スロートに関し対称なノズル $A = (1 + \kappa x^2)^{-1}$ を考えると、スロートに関し対称な位置における流速の差は

$$u_i(x) - u_i(-x) = \frac{\pi}{\alpha^2 \kappa} e^{-\frac{\alpha}{\kappa \epsilon_{\lambda_D}}} \sin\left(\frac{\alpha}{\epsilon_{\lambda_D}} x\right) \quad (3-6)$$

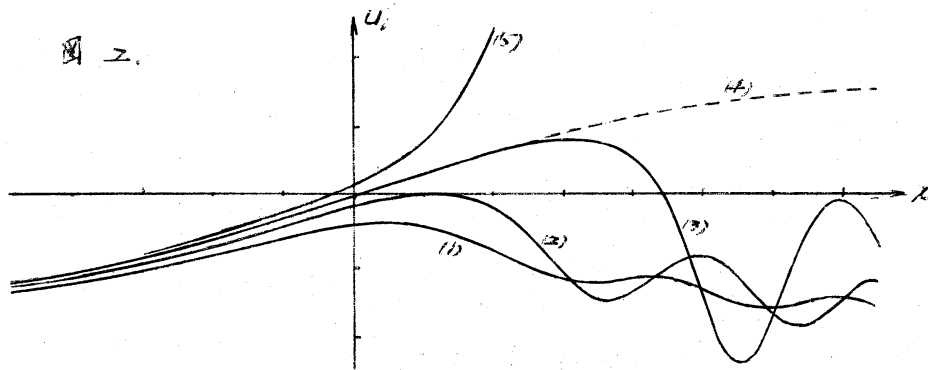
となる。流はスロートに関し対称でなく、振動する非対称な項は M^2 が小さくなるにつれて指数関数的に小さくなるが、 M^2 が 1 に近くなると非常に大きくなる。しかる M^2 が 1 に近くなるような解は一様になりすぎる。

次に一次元非線形振動は §2-2. と同じ系統で

$$\frac{\epsilon_{\lambda_D}}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{d^2 u_i}{dx^2} + \frac{1 - M^2}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} u_i - u_i^2 = A(x) \quad (3-7)$$

と与える。但し ϵ_{λ_D} と $(1 - M^2)$ は共に $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ とみなす。この式は

超音速流いで分散項が重要な役を演じることを示す。特に右辺を零とした式が定常 Kortweg-de Vries (以下 K-dV と略す) の式になってゐることに注意したい。これはノズル断面積の変化によつて下流に K-dV 波が生じることを示唆する。実際には (3-7) が自励系でないため解析的な議論はむずかしいが、数値的に求めた解曲線は図 2 のようになる。流量の増加につれて (1) → (5) のように移行する。流量が臨界値に近づくときスロートの下流に分散波列が生じ、次第に振幅と波長を増して非線形波の特徴を現わす。流いの閉塞はちょうど無限下流に孤立波が生じる解にあたる。



普通の圧縮性流体でスロートにおける流速が音速に達し、下流条件との接続がスロートの下流に衝撃波を伴う流いによつて行われる局面は、今の場合スロートの下流に K-dV 波を伴う流いに代る。しかるに流量はわずかながらも変化し、下流条件の一部が上流に伝えられてゐることを示す。

二次元線形振動は §2-3 と同じ系統で

$$\epsilon_{\Lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta U_i + (1-M^2) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} = 0 \quad (3-8)$$

を与える。但し Δ は二次元ラプラスアンである。壁上の条件は §2-3 と同じである。解は一般に

$$U_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-M-i\infty}^{M-i\infty} \frac{k^2 \bar{F}(k) \cosh(\lambda y)}{\lambda \sinh \lambda} e^{ikx} dk \quad (3-9)$$

のように表わされる。但し $\lambda^2 = k^2(\alpha^2 - \epsilon_{\Lambda} k^2)/(1 - \epsilon_{\Lambda} k^2)$ 。今のよう
な純分散性の流体では極の位置 (M^2 の如何に拘らず実軸と虚軸
上にあり) と留数の値が陽に見出され、解は振動する項と減衰
する項から成る。 M^2 が 1 に近くなると解は一般に成り立たない。

二次元非線形振動は §2-4 と同じ手続で

$$\frac{\epsilon_{\Lambda}}{\epsilon^3} \frac{\partial^4 U_i}{\partial z^4} + \frac{1-M^2}{\epsilon^3} \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_i^2 + \frac{\partial^2 U_i}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3-10)$$

を与える。(3-10) はポドゴラフ変換や Meyer の級数展開が適用
できるが、 $T-T$ の相似変換は有効である。(3-10) は変換 $U_i =$
 $w(z) + z\eta^2$, $z = \xi + \eta^2$ により四階の常微分方程式

$$\frac{\epsilon_{\Lambda}}{\epsilon^3} \frac{d^4 w}{dz^4} + \frac{1-M^2}{\epsilon^3} \frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{d^2}{dz^2} w^2 + 2 \frac{dw}{dz} + 4 = 0 \quad (3-11)$$

に帰着できる。これは一度積分すれば

$$\frac{\epsilon_{\Lambda}}{\epsilon^3} \frac{d^3 \tilde{w}}{dz^3} - \frac{d}{dz} \tilde{w}^2 + 2\tilde{w} + 4z = 0 \quad (3-12)$$

を与える。但し $\tilde{w} = w - (1-M^2)/2\epsilon^3$, $z = \xi + (1-M^2)/4\epsilon^3 - C_1$ 。十分上
流で分散のない流れから得られる解曲線は図 3 のようになる。
 $z-\tilde{w}$ 面での解はノズル軸上の流速を表わし、定性的に二次元
非線形振動の解と同じであるが、これから物理面での流線や
等速線と求めると、臨界に近くなるとノズル流の二次元構造が見出

される。同様に超音速
解を数値的に求めると、
ノズル流を表す解が
得られる。このことが分る。
事情は一次元非線形振
動のときも同じである。

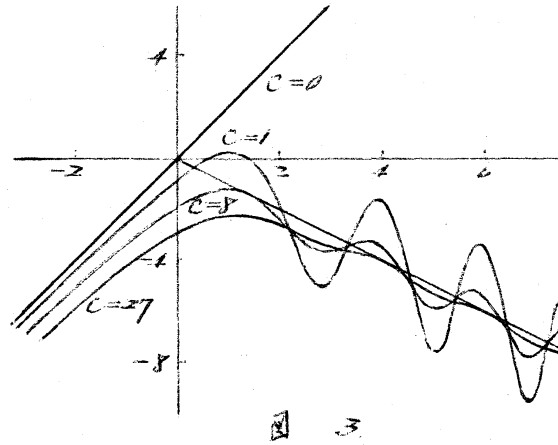


図 3

2. 緩和効果のある気体

現象は多くの点で例1と対照的であり、散逸性圧縮性流体
と呼ばれる方が適当であるが、解析は例1と同様に進められる。

連続の式、運動量の式、エネルギーの式

$$\rho u A = \text{const.}, \quad \rho u \frac{du}{dz} = -\frac{dp}{dz}, \quad \frac{dh}{dz} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = 0 \quad (3-13)$$

その他に緩和速度の式 $u \frac{dC}{dz} = \frac{1}{\tau} \omega(p, p, C) \quad (3-14)$

が加えられる。エントロピーは p, p, C の関数と考えよう。

緩和量 C は内部振動エネルギー、解難度等である。

一次元線形振動は §2-1. と同じを繰り返す

$$\Gamma(1-M_f^2) \frac{du}{dz} + (1-M_e^2)u = \Gamma \frac{dA}{dz} + A' \quad (3-15)$$

と与える。⁴⁾ 但し $\Gamma = \frac{\tau u}{-\omega_c L} / (1 - \frac{h_c \omega_c}{h_p \omega_c})$, $M_f^2 = u^2 (h_p - \frac{1}{p}) / (c - h_p)$, $M_e^2 = u^2 /$
 $(h_p - \frac{1}{p} + h_c \frac{\omega_c}{\omega_c}) / (c - h_p + h_c \frac{\omega_c}{\omega_c})$ は x の x'' の無次元緩和距離、束縛及び
平衡 Mach 数の自乗を表す (添字は偏微分を表す)。(3-15) は
形式的に外力の下における振動の式で、解は

$$u' = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_f^2} \int_{-\infty}^x \left(\frac{dA'}{dz} + \frac{A'}{F} \right) e^{-\frac{\alpha_e^2}{\alpha_f^2} \frac{x-z}{F}} dz & (\frac{\alpha_e^2}{\alpha_f^2} > 0) \\ -\frac{1}{\alpha_f^2} \int_x^{\infty} \left(\frac{dA'}{dz} + \frac{A'}{F} \right) e^{-\frac{\alpha_e^2}{\alpha_f^2} \frac{x-z}{F}} dz & (\frac{\alpha_e^2}{\alpha_f^2} < 0) \end{cases} \quad (3-16)$$

のよりに表わされる。但し $\alpha_f^2 = 1 - M_f^2$, $\alpha_e^2 = 1 - M_e^2$. (3-16) は M_e^2 が 1 に近くなると一様に成り立たない。このとき無視した高次項は拡散層と衝撃波層に修正する。

一次元非線形振動付

$$\frac{\Gamma(1-M_f^2)}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{du}{dz} + \frac{1-M_e^2}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} u - K u^2 = A(x) \quad (3-17)$$

と与える。但し $\Gamma(1-M_f^2)$, $(1-M_e^2)$ は共に $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ と仮定してゐる。これは基準点における ω の階導関数を含む複雑な表式のパラメータであるが、1 に近い数と見ておけばよい。右辺と零とした式は Burgers 波の式であり、1 づつ断面積の変化によつての下流に衝撃波層が生じることと示唆する。実際に $A = \text{sech}^2(kx)$ についで数値的に求めた解曲線は図4のよくなる。流量の増すにつれて (1) → (5) のように移行する。スロットに関して対稱な流れからスロットの下流に衝撃波層を伴う流れへの連続的な移行も、スロットに関して反対称な閉塞流の存在が分る。

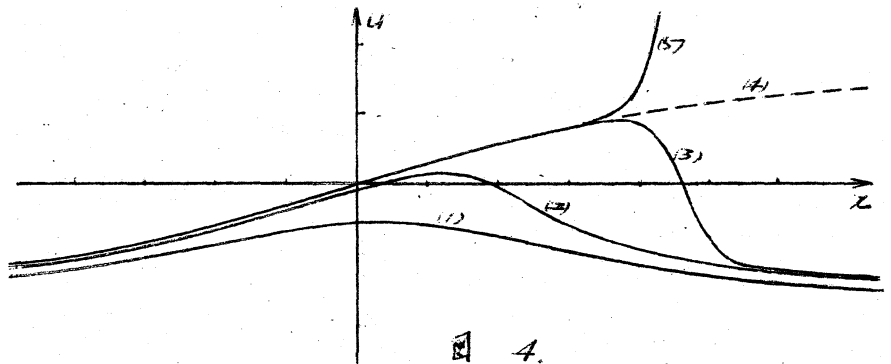


図 4.

二次元線形振動とりの解は例1と同じ系統で同じ形式に得られるが、この場合解と陽に表わすことはむずかしい。

二次元非線形振動は §2-4 と同じ系統で

$$\frac{\Gamma(1-M_F^2)}{G^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1-M_G^2}{G^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - K \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3.15)$$

と与える。これは角の $T-T$ の相似変換によって3階の常微分方程式に帰着できる。結果は Sichel が維粘性を考慮した気体について与えたものと同一である。⁵⁾

§4 その他の例

1. 気泡-液体混合物

もっと複雑な分散性圧縮性流体の一例としてこの例を考えよう。この例は気泡-液体混合物の Wijngaarden のモデルである。⁶⁾ このモデルでは気泡が球形で、基準状態ではすべてが同じ大きさを持ち、均質に分布していると仮定される。そして気相に関する流体力学の式は無限液体中の単一気泡の運動の式で置きかえられる。

$$(1-B)UA = G, \quad (1-B)U \frac{dU}{dR} = -\frac{dP}{dR}, \quad (4-1)$$

$$R_g BVA = bG, \quad R_g R^3 = 1, \quad (4-2)$$

$$R_g - P = \delta \left\{ RV \frac{d}{dR} \left(V \frac{dR}{dR} \right) + \frac{3}{2} \left(V \frac{dR}{dR} \right)^2 \right\} + \frac{4}{R_g} \frac{V}{R} \frac{dR}{dR}, \quad (4-3)$$

$$V \frac{d}{dR} \left\{ \frac{1}{2} R^3 (V-U) \right\} = -R^3 \frac{dP}{dR} - \frac{q}{R_g} R (V-U). \quad (4-4)$$

(4-1) は混合物の連続の式と運動量の式、(4-2) は気相の連続の

式と等温変化の式、(4-3)と(4-4)は単一気泡の膨脹・収縮運動と相対並進運動の式である。(B: ボイド率, R: 気泡半径, U: 混合体の流速, V: 気泡の流速, P: 混合体の圧力, P_g: 気泡の圧力, G: 流量, b = B₀/(1-B₀), S: 気泡とノズルの断面積比, Re: ノズルに関する Reynolds 数)

この場合分散性ばかり複雑であるが、一次元流れの取扱が許される。一次元線形振動は

$$\left\{ \frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{4}{\sigma\tau} \frac{d}{d\tau} + \frac{3}{\tau^2} (1-m^2) \right\} \frac{dU}{d\tau} + \frac{18}{\sigma\tau} \frac{m^2}{n^2} \left\{ \frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{4}{\sigma\tau} \frac{d}{d\tau} + \frac{3}{\tau^2} (1-n^2) \right\} U \\ = \frac{m^2}{bG^2} \left\{ \frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{4}{\sigma\tau} \frac{d}{d\tau} + \frac{3}{\tau^2} \right\} \left(\frac{dA}{d\tau} + \frac{18}{\sigma\tau} A \right) \quad (4-5)$$

と与える。但し $\sigma = S^{\frac{1}{2}} R_e$, $\tau = S^{\frac{1}{2}} U$, $U = (1+b)G$, $m^2 = U^2 / (\frac{U}{bG} + \frac{U}{G} + 2)$, $n^2 = U^2 / (\frac{U}{bG} + \frac{U}{G})$.

(4-5)の特性方程式の判別式 D は m^2 , n^2 だけの関数である。 $\sigma \rightarrow 0$ のときは $D < 0$ であるが、 $\sigma \rightarrow \infty$ のときは $m^2 \leq 1$ になって $D \geq 0$ となる。さらに σ , τ のいろいろな極限では三つの基本解の中の一つが支配的となる。例えば次のような場合がある。

(1) $\sigma \rightarrow \infty$, $\tau \neq 0$, $D > 0$

$$U' = \frac{1}{bG^2} \frac{m^2}{\mu} \int_{-\infty}^{\tau} \left(\frac{dA}{d\tau} + \frac{3}{\tau^2} A \right) \sin\{\mu(\tau-\tau')\} d\tau', \quad \mu^2 = \frac{3}{\tau^2} (1-m^2) \quad (4-6)$$

(2) $\sigma \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$, $D > 0$

$$U' = \frac{1}{bG^2} \frac{m^2}{1-m^2} \int_{-\infty}^{\tau} \left(\frac{dA}{d\tau} + \frac{18}{\sigma\tau} A \right) \exp\left\{ -\frac{18}{\sigma\tau} \frac{m^2(1-n^2)}{n^2(1-m^2)} (\tau-\tau') \right\} d\tau' \quad (4-7)$$

(3) $\sigma \rightarrow 0$, $\tau \sim \sigma$, $D < 0$

$$U' = \frac{1}{bG^2} n^2 \int_{-\infty}^{\tau} \left(\frac{dA}{d\tau} + \frac{3\sigma}{4\tau} A \right) \exp\left\{ -\frac{3\sigma}{4\tau} (1-n^2)(\tau-\tau') \right\} d\tau' \quad (4-8)$$

(1) は §3-1 の結果と, (2), (3) は §3-2 の結果と形式的に一致している。

今 $\sigma = O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$, $\tau = O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ の場合に Γ 上の一次元非線形振動を求めると

$$\frac{\tau^2}{3\epsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{1-m^2}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{du}{dx} - \bar{K} \frac{d}{dx} u^2 - C u' = \frac{1}{6q^2} \frac{dA}{dx} \quad (4-7)$$

を得る。但し $\bar{K} = (1 + O(\epsilon^{\frac{1}{2}})) q^2$, $C = 36/5 \tau \epsilon^{\frac{1}{2}} \sigma^2$ 。

$C \rightarrow 0$ ($R_2 \rightarrow \infty$) の極限では一度積分でき、§3-1 と形式的に同じ分散性遷音速の式を得る。一般に $C \neq 0$ のときは三階の非線形方程式となるが、散逸効果は最低階の項に現われ、左辺は K -dV-Burgers 型にならない。スロート下流には振動する衝撃波よりもむしろうねる流いが予想される。

2 CGL プラズマ

強い磁場中のプラズマに関する Chew-Goldberger-Low の流体モデルにイオンの有限な gyroradius の効果を含めし修正したモデルを考える⁸⁾。この場合現象は本質的に二次元的で、一次元流を仮定することはできない。さらに今までの例と異なり、波数の大きい波が波数の小さい波より速く進むという分散関係を持っている。

磁場が z 方向の成分だけを持ち、流いが x - y 面内にある二次元流を考える。必要な式はプラズマに対する連続の式、運動量の式 (2 成分) エネルギー式と Maxwell の式の 1 つである。

$$\frac{\partial}{\partial x}(PU) + \frac{\partial}{\partial y}(PV) = 0, \quad PU \frac{\partial U}{\partial x} + PV \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(P_1 + \frac{B^2}{2U}) = \frac{P_{L1}}{2Q_1} \Delta U$$

$$PU \frac{\partial V}{\partial x} + PV \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(P_1 + \frac{B^2}{2U}) = -\frac{P_{L1}}{2Q_1} \Delta U \quad (4-10)$$

$$U \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y} + 2P_1(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(BU) + \frac{\partial}{\partial y}(BV) = 0$$

添字 1 はイオンに関する量を，1 は磁場に垂直な成分を表す。 Q_1 はイオンの旋回周期数である。

二次元非線形振動は §2-4 と同じ系統で

$$-\frac{1}{R_0 G^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1-M^2}{G^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - (\frac{3}{2} + \frac{1}{42}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0 \quad (4-11)$$

と与える。但し $R_0 = 2PU L Q_1 / P_{L1}$, $M^2 = PU^2 / (2P_1 + \frac{B^2}{\mu})$, $A^2 = PU^2 / \frac{B^2}{\mu}$ 。

壁の条件は $\eta = \pm G^{\frac{1}{2}}$ で $\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{1}{R_0 G^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \mp \frac{d^2 f}{d\xi^2}$ と与えられる。

(4-11) は分散項の符号を除き (3-10) と形式的に同じである。

T - T の相似変換でたとえ分散項の符号が違っても有効であり，(4-11) を常微分方程式に帰着できる。実際に (4-11) は変換

$$(\frac{3}{2} + \frac{1}{42}) U = W(\xi) + Z\eta^2, \quad Z = \xi + \eta^2 \quad \text{と 1 回の積分によつて}$$

$$-\frac{1}{R_0 G^2} \frac{d^2 W}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} \tilde{W}^2 + 2\tilde{W} + 4Z = 0 \quad (4-12)$$

に帰着する。但し $\tilde{W} = W - (1-M^2)/2G^2$, $\xi = Z + (1-M^2)/4G^2 - C_1$ 。

(4-12) で $\tilde{W}$ と ξ の符号を同時に反転すれば (3-12) を得る。これは今の場合の超音速解と亜音速解と流いの方向を逆にしてみれば，今の今の場合の亜音速解と超音速解に等しいことを意味する。レカレ §3-1 で超音速ノズル流いの解を数値的に見出すことができた。よって今の場合の亜音速ノズル流いの解も知られる。レカレ線形振動の結果を

数値計算で大きな誤差を生じる理由から見れば、臨界の近くで単調になるノズル流の解があってもよいと思われている。

3. Hall効果のある磁気流体

Aligned 流を考える。この場合1次元流の取扱が許される。さらにその分散性遷音速の式はT-T型の相似解を持つという特殊な事情がある。

Hall効果を含む磁気流体の流では磁気 Reynolds 数 R_m と Hall パラメータ Ω と共に無限大に近づけた極限で得られる分散性圧縮性流体は最初 Resler によつて議論された⁷⁾ の線形擾動の式は

$$\Delta \left\{ (1-M^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} + \frac{R_m^2}{\Omega^2} \frac{(1-A^2)^2}{A^4} \left\{ (1-M^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1-M^2 A^2}{1-A^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} = 0 \quad (2-13)$$

で与えられる。 M , A は Mach 数, Alfvén 数である。壁との条件は $y = \pm 1$ で $v = \mp \frac{df}{dx}$, $(1-M^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ ($y=0$) である。 u' は v が求まると $u' = -\frac{1}{1-M^2} \int_0^x \frac{\partial v}{\partial y} dx$ として得られる。

今これを2次元非線形擾動を求める。

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1-M^2}{G^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right\} + \frac{R_m^2}{\Omega^2} \frac{(1-A^2)^2}{A^4} \left\{ \frac{1-M^2}{G^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u^2 - \frac{A^2}{1-A^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right\} = 0 \quad (2-14)$$

と得る。この分散性遷音速の式はT-Tの相似変換によつて単微分方程式にならない。 M^2 が1に近くなると高階の分散項も同時に消え、これによる Taylor 型から Meyer 型への流の遷移はもっと

遠くへ行って複雑な過程をとると思われる。 A^2 が 1 に近き時にもかような相似解はない。

$R_m \sim A^2 \rightarrow 0$ の極限で得られる散逸分散性遷音速の式でも事情は似ている。

§5 あとがき

いろいろ分散性圧縮性流体の例を通して、普通の気体力学で知られている臨界に近づく流れの取扱ひの方がどのように拡張され、その結果がどうなるかを調べた。流れの特徴は線形擾動の解析解、一次元非線形擾動の数値解、二次元非線形擾動の相似解によって知るしかできない。普通の圧縮性流体で衝撃波を伴う流れの前面は分散波列（または衝撃波層）を伴う流れに変わる。しかし詳細は流体の持つ分散特性によってかなり多様である。

なお、流れの開塞は断面積の変わるノズルだけでなく問題でなく、断面積が一定のダクトでも局所的な加熱・冷却があったり、例えば MHD 発電・プラズマ加速で見られるように局所的な減速力・加速力が加えられるときにも生じる。かような場合に分散性がどのような効果と及ぼすかを調べることも面白いであろう。

参 考 文 献

- 1) H.W. Liepmann and A. Roshko: Elements of Gasdynamics (John Wiley, New York, 1957) Chap. 5, p. 127.
- 2) S. Tomotika and K. Tamada: Quart. appl. Math. 7 (1950) 381.
- 3) S. Tomotika and Z. Hasimoto: J. Math. Phys. 29 (1950) 105.
- 4) W.G. Vincenti and C.H. Kruger: Physical Gasdynamics (John Wiley, New York, 1965) Chap. 8, p. 293.
- 5) M. Sichel: J. Fluid Mech. 25 (1966) 769.
- 6) L. van Wijngaarden: Ann. Rev. Fluid Mech. 4 (1972) 369.
- 7) S. Morioka and G. Matsui: J. Phys. Soc. Japan 42 (1977) 2014.
- 8) S. Morioka and J.R. Spreiter: J. Plasma Phys. 4 (1970) 403.
- 9) E.L. Resler: Developments in Mechanics (Plenum Press, New York, 1961) Vol. 1, p. 503.