

# 抽象バーンサイド環—Abstract Burnside rings

近畿大学・理工学部 小田文仁 (Fumihito Oda)

Faculty of Science and Engineering, Kindai University

odaf@math.kindai.ac.jp

## 1 Introduction

本稿は、吉田知行氏 (北海道大学)、竹ヶ原裕元氏 (室蘭工業大学) との共同研究 [YOT18] に基づいている。  $G$  を有限群とする。有限  $G$ -集合の圏  $\mathbf{set}^G$  の直和と直積に関する Grothendieck 環を **Burnside 環** といい  $\Omega(G)$  と書く。圏  $\mathbf{set}^G$  を異なる圏に取り替えて、その圏から抽象バーンサイド環を構成する際のモデルとなるものが古典的な Burnside 環  $\Omega(G)$  である。

$G$  の部分群の共役類全体の集合を  $C(G) = \{(H) \mid H \leq G\}$ ,  $WH = N_G(H)/H$  とする。有理整数環  $\mathbb{Z}$  の直積環

$$\tilde{\Omega}(G) = \prod_{(H) \in C(G)} \mathbb{Z}$$

を  $G$  の **ghost 環**, 位数  $|WH|$  ( $H \leq G$ ) の巡回群の直積群

$$\text{Obs}(G) = \prod_{(H) \in C(G)} (\mathbb{Z}/|WH|\mathbb{Z})$$

を  $G$  の **obstraction 群** と呼ぶ。このとき、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow \Omega(G) \xrightarrow{\varphi} \tilde{\Omega}(G) \xrightarrow{\psi} \text{Obs}(G) \longrightarrow 0,$$

ただし、**Burnside 準同型**  $\varphi$  は、

$$\varphi = (\varphi_H) : \Omega(G) \longrightarrow \tilde{\Omega}(G); [X] \mapsto (|X^H|)_{(H)},$$

$\psi$  は、 $G$  の ghost 環の任意の元  $\theta = (\theta(K))_{(K)}$  に対し、

$$\psi_H(\theta) = \sum_{gH \in WH} \theta(\langle g \rangle H) \bmod |WH|$$

で定義されるものとする、が存在する。特に、上の完全列は、 $\Omega(G)$  が Burnside 準同型を通して ghost 環の部分環と同型であることを示している。本稿では、ある条件を満たす圏  $\mathbf{I}$  から構成される  $\mathbb{Z}$ -加群  $\mathbb{Z}\mathbf{I}$  に、上のような完全列が存在するような環構造を与えることで  $\Omega(G)$  の一般化を目指した理論の一端の概要を述べる。

圏  $\mathbf{I}$  は、射の集合が有限であるとき **有限圏** という。  $\mathbf{I}$  は、ある有限圏と圏同値である (このとき、 $\mathbf{I}$  を **本質的有限圏** という) とする。  $[X]$  を  $X \in \mathbf{I}$  の同型類、  $\mathbf{I}(\mathbf{I}, X) :=$

$\text{Hom}_{\mathbf{I}}(I, X)$ , 有限集合  $S$  の基数を  $|S|$ ,  $[\mathbf{I}] := \{[I] \mid I \in \mathbf{I} : \text{irreducible}\}$ ,  $\mathbb{Z}\mathbf{I} := \mathbb{Z}[\mathbf{I}]$ ,  $\mathbb{Z}^{\mathbf{I}} := \prod_{[I] \in [\mathbf{I}]} \mathbb{Z}$  とする.

$\mathbb{Z}$ -加群  $\mathbb{Z}\mathbf{I}$  は,  $\varphi_I([X]) = |\mathbf{I}(I, X)|$  で与えられる写像 ( $\mathbf{I}$  の Burnside 準同型という)  $\varphi = (\varphi_I) : \mathbb{Z}\mathbf{I} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbf{I}}$  が単射環準同型であるような環構造が与えられるとき **abstract Burnside 環 (ABR)** と呼ぶ. 本稿の主題は以下の問の十分条件を与えることである.

**問題.**  $\mathbb{Z}$ -加群  $\mathbb{Z}\mathbf{I}$  が ABR となるような本質的有限圏  $\mathbf{I}$  の圏論的条件を求めよ.

以下, その条件を与えるための準備をする.

## 2 余核条件

一般の圏  $\mathbf{I}$  の対象  $I$  の自己同型群の任意の部分群  $S \leq \text{Aut}(I)$  に対し  $c_S : I \rightarrow I/S$  を  $S \subseteq \mathbf{I}(I, I)$  の余核 (coequalizer) という:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightleftharpoons[S]{1} & I \xrightarrow{c_S} I/S \\ & \searrow f & \downarrow f' \\ & & X. \end{array}$$

これは, 任意の  $\sigma \in S$  に対し  $c_S \circ \sigma = c_S$  が成り立ち, もし  $f : I \rightarrow X$  が任意の  $\sigma \in S$  に対し条件  $f \circ \sigma = f$  を満たすならば,  $f = f' \circ c_S$  を満たす  $f' : I/S \rightarrow X$  が一意的に存在することを示している. 特に,

$$|\mathbf{I}(I/S, X)| = |\mathbf{I}(I, X)^S|$$

をえる.

以下の条件を (C) とする.

**Condition(C)**  $\forall I \in \mathbf{I}, \forall \sigma \in \text{Aut}(I), \exists$  a coequalizer  $c_\sigma : I \rightarrow I/\sigma$  of the pair  $(1_I, \sigma)$ .

## 3 全射単射分解系

圏  $\mathbf{I}$  のすべての全射のクラスを  $\text{Epi}(\mathbf{I})$ , すべての単射のクラスを  $\text{Mon}(\mathbf{I})$ , すべての同型のクラスを  $\text{Iso}(\mathbf{I})$  とする.  $X \in \mathbf{I}$  のすべての自己同型の集合を  $\text{Aut}(X)$  とする.  $\mathbf{I}$  の射のクラスの対  $(\mathbf{E}, \mathbf{M})$  は以下の条件を満たすとき  $\mathbf{I}$  の分解系 (factorization system) という:

(F1) The classes  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{M}$  are both closed under composition.

(F2) Any isomorphism belongs to both of  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{M}$ .

(F3) Any  $f : X \rightarrow Y$  admits an  $(\mathbf{E}, \mathbf{M})$ -factorization

$$\begin{array}{ccc} & \text{Im}(f) & \\ e \nearrow & & \searrow m \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

where  $e \in \mathbf{E}$  and  $m \in \mathbf{M}$ .

(F4) The above factorization is unique, that is,  $f : X \xrightarrow{e'} \text{Im}(f)' \xrightarrow{m} Y$  is another  $(\mathbf{E}, \mathbf{M})$ -factorization, then there exists a unique isomorphism  $i : \text{Im}(f) \rightarrow \text{Im}(f)'$  such that the following diagram is commutative :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Im}(f) & & \\
 & \nearrow e & \downarrow i \cong & \nwarrow m & \\
 X & & & & Y \\
 & \searrow e' & \downarrow & \nearrow m' & \\
 & & \text{Im}(f)' & & 
 \end{array}$$

条件 (F4) により  $f$  の像 **image**  $\text{Im}(f)$  は同型を度外視して一意的に定まる. さらに, 以下が成り立つ:

$$\mathbf{E} \cap \mathbf{M} = \text{Iso}(\mathbf{I}).$$

**Definition 3.1.** 分解系  $(\mathbf{E}, \mathbf{M})$  は, 次の条件をみたすとき**全射単射分解系** (epi-mono factorization system) と呼ばれる :

(EM)  $\mathbf{E} \subset \text{Epi}(\mathbf{I})$  and  $\mathbf{M} \subset \text{Mon}(\mathbf{I})$ .

圏  $\mathbf{I}$  は分解系  $(\mathbf{E}, \mathbf{M})$  をもつとする.  $\mathbf{E}$  の対象  $X, Y$  の間のすべての射の集合を  $\mathbf{E}(X, Y)$ ,  $\mathbf{M}$  の対象  $X, Y$  の間のすべての射の集合を  $\mathbf{M}(X, Y)$  とする. 行列  $\mathbf{I}, \mathbf{E}, \mathbf{M}$  をそれぞれ以下のように定める:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} &:= (|\mathbf{I}(X, Y)|)_{X, Y \in [\mathbf{I}]}, \\
 \mathbf{E} &:= (|\mathbf{E}(X, Y)|)_{X, Y \in [\mathbf{I}]}, \\
 \mathbf{M} &:= (|\mathbf{M}(X, Y)|)_{X, Y \in [\mathbf{I}]}.
 \end{aligned}$$

さらに対角行列  $D$  を

$$D := (|\text{Aut}(X)|\delta(X, Y))_{X, Y \in [\mathbf{I}]}, \quad \delta(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{if } X \cong Y, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. 最後に 2 つの有理数行列  $Q, S$  を

$$\begin{aligned}
 Q &:= \mathbf{E}D^{-1} = (|\mathbf{E}(X, Y)|/|\text{Aut}(Y)|)_{X, Y \in [\mathbf{I}]}, \\
 S &:= D^{-1}\mathbf{M} = (|\mathbf{M}(X, Y)|/|\text{Aut}(X)|)_{X, Y \in [\mathbf{I}]}
 \end{aligned}$$

とする.

**Proposition 3.2.** Assume that  $\mathbf{I}$  has a factorization system  $(\mathbf{E}, \mathbf{M})$ .

(1) The hom-set matrix  $\mathbf{I}$  factors as follows:

$$\mathbf{I} = \mathbf{E}D^{-1}\mathbf{M} = QDS$$

(2) If  $(\mathbf{E}, \mathbf{M})$  is an epi-mono factorization system, then  $Q$  (resp.  $S$ ) is permutation-similar to a unipotent lower (resp. upper) triangular integral matrix.

## 4 主定理

**Theorem 4.1.** [YOT18] Let  $\mathbf{I}$  be an essentially finite category. If  $\mathbf{I}$  satisfies (EM), (C), then

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbf{I} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}\mathbf{I} \xrightarrow{\psi} \text{Obs}(\mathbf{I}) \longrightarrow 0$$

is exact.

*Proof.* まず, 以下の4つを示す. (1)  $\varphi$  is injective, (2)  $|\text{Cok}(\varphi)| = |\text{Obs}(\mathbf{I})|$ , (3)  $\text{Im}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(\psi)$ , (4)  $\psi$  is surjective.

(1)  $\varphi$  is injective.

まず,  $\mathbf{I}$  が有限圏であるとする.  $\mathbf{I}$  の既約な対象間の射の個数からなる行列のサイズは有限である.

$$\mathbf{E}(X, X) = \mathbf{M}(X, X) = \text{Aut}(X)$$

が任意の  $X \in \mathbf{I}$  について成り立つから, LDU-分解をもちいて

$$\det(\Gamma) = \prod_{I \in \mathbf{I}} |\text{Aut}(X)| \neq 0 \text{ in } \mathbb{Z}$$

を得る.

一般の場合,

$$\mathbf{r} = \sum_{X \in \mathbf{I}} r_X [X] \in \ker \varphi$$

とおき,  $\mathbf{\Lambda}$  を  $r_X \neq 0$  を満たすすべての対象からなる  $\mathbf{I}$  の充満部分圏とする.  $r_X \neq 0$  をみたす同型類  $[X]$  は有限であるから圏  $\mathbf{\Lambda}$  は本質的有限圏である. このとき, [YOT18, Lemma 1.4] より  $\mathbf{\Lambda}$  と圏同値となる  $\mathbf{\Lambda}$  の本質的有限部分圏  $\overline{\mathbf{\Lambda}}$  が存在し  $(\overline{\mathbf{\Lambda}} \cap \mathbf{E}, \overline{\mathbf{\Lambda}} \cap \mathbf{M})$  を分解系としてもつことがわかる. 従って  $\mathbf{r} = 0$  を得る.

(2) は, Proposition 3.2 より従う.

(3)  $\text{Im}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(\psi)$ .

任意の対象  $X \in \mathbf{I}$  に対し, Cauchy-Frobenius の補題より  $\psi \circ \varphi([X])$  の第  $I$  成分について

$$\begin{aligned} \psi_I \circ \varphi([X]) &= \sum_{\sigma \in \text{Aut}(I)} \overline{\varphi_{I/\sigma}([X])} \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Aut}(I)} \overline{\Gamma(I/\sigma, X)} \\ &= |\text{Aut}(I)| \sum_{\sigma \in \text{Aut}(I)} \overline{|\Gamma(I, X)^{(\sigma)}|} \\ &\equiv 0 \quad (|\text{Aut}(I)|) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる.

(4)  $\psi$  is surjective.

線型写像  $\tilde{\psi}$  を

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} &= (\tilde{\psi}_I)_I : \mathbb{Z}^{\mathbf{F}} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathbf{F}}; \\ \tilde{\psi}_I &: \chi \mapsto \sum_{\sigma \in \text{Aut}(I)} \chi(I/\sigma)\end{aligned}$$

で定める.  $\text{pr} \circ \tilde{\psi} = \psi$ , ただし,  $\text{pr} : \mathbb{Z}^{\mathbf{F}} \rightarrow \text{Obs}(\mathbf{F})$  は,  $\chi \in \mathbb{Z}^{\mathbf{F}}$  に対し

$$\text{pr}(\chi) = \chi(I) \bmod |\text{Aut}(I)|$$

で定義されるから,  $\tilde{\psi}$  が surjective であることを示せば十分である.

$\mathbb{Z}^{\mathbf{F}}$  の標準基底に関する表現行列  $K$  は,

$$K(I, J) = \#\{\sigma \in \text{Aut}(I)_{(p)} \mid I/\sigma \cong J\}$$

で与えられる.  $c_\sigma : I \rightarrow I/\sigma$  が同型であることと  $\sigma$  が恒等写像であることが同値であることを注意する. 関係

$$[X] \leq_e [Y] \iff \mathbf{E}(Y, X) \neq \emptyset$$

により  $I/\cong$  に定義される順序関係の線形な拡張により, 行列  $K$  は, 整数を成分にもつ下三角べき単行列になる. 従って,  $K$  は可逆であり,  $\tilde{\psi}$  は surjective である.

あとは,  $\text{Cok}(\varphi) \cong \text{Obs}(\mathbf{F})$  を示せば十分である. 以下の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}\mathbf{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}\mathbf{F} & \xrightarrow{\psi} & \text{Obs}(\mathbf{F}) \longrightarrow 0. \\ & & & & \searrow c & \uparrow c' & \\ & & & & & \text{Cok}(\varphi) & \end{array}$$

(4) より  $\psi$  が surjective であるから,  $c'$  もそうである. さらに, (2) より  $|\text{Cok}(\varphi)| = |\text{Obs}(\mathbf{F})|$  であるから  $c'$  は同型である.  $\square$

**Theorem 4.2.** [YOT18] *Let  $\mathbf{F}$  be an essentially finite category. If  $\mathbf{F}$  satisfies (EM), (C), then  $\mathbb{Z}\mathbf{F}$  is an abstract Burnside ring.*

*Proof.* •  $\varphi([X]) \cdot \varphi([Y]) \in \varphi(\mathbb{Z}\mathbf{F})$

写像  $\varphi$  が単射であるから  $\varphi(\mathbb{Z}\mathbf{F})$  が  $\mathbb{Z}\mathbf{F}$  の部分環であることを示せば十分である.  $X, Y \in \mathbf{F}$  とする. Cauchy-Frobenius の補題より任意の  $I \in \mathbf{F}$  に対し,

$$\begin{aligned}\psi_I(\varphi([X]) \cdot \varphi([Y])) &= \sum_{\sigma \in \text{Aut}(I)} \overline{\varphi_{I/\sigma}([X]) \cdot \varphi_{I/\sigma}([Y])} \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Aut}(I)} \overline{|\mathbf{F}(I, X)^{\langle \sigma \rangle}| \cdot |\mathbf{F}(I, Y)^{\langle \sigma \rangle}|} \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Aut}(I)} \overline{|\mathbf{F}(I, X) \times \mathbf{F}(I, Y)^{\langle \sigma \rangle}|} \\ &= \overline{|\text{Aut}(I)| \cdot |\mathbf{F}(I, X) \times \mathbf{F}(I, Y)| / |\text{Aut}(I)|} = 0\end{aligned}$$

であるから  $\varphi([X]) \cdot \varphi([Y]) \in \text{Ker}(\psi) = \text{Im}(\varphi)$  を得る.

- $\varphi(\mathbb{Z}^F)$  に単位元が存在すること

単位元の存在を示すためには,  $1 = (1)_I \in \mathbb{Z}^F$  が  $\varphi$  の像に含まれることを示せば十分である.

$$\psi_I(1) = \sum_{g \in \text{Aut}(J)} 1 \bmod |\text{Aut}(J)| = 0$$

と Theorem 4.1 より以下が従う:

$$\mathbb{Z}^F \ni 1 = (1)_I \in \text{Ker}(\psi) = \text{Im}(\varphi).$$

□

## 参考文献

- [YOT18] Yoshida, T.; Oda, F.; Takegahara, Y.: *Axiomatic theory of Burnside rings. (I)*, J. Algebra **505** (2018), 339–382.