

多価函数の積分における 漸化公式と連分展開の 一般化 萩原(敬義)青本和彦

§1. 我々は 次のような型の 積分 を 対象と

ある.

$$(1) \hat{\varphi}(\lambda, \lambda_m) = \int \prod_{j=1}^m P_j(\alpha)^{\lambda_j} d\alpha_1 \cdots d\alpha_\ell \quad \text{或いは}$$

$$(2) \hat{\varphi}(\lambda, \lambda_m) = \int \prod_{j=1}^m P_j(\alpha)^{\lambda_j} \cdot e^{\langle \alpha, \zeta \rangle} d\alpha_1 \cdots d\alpha_\ell$$

但し $P_j(\alpha)$ は 多項式, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbb{C}^\ell$. これらの積分が 対応する モノロミー によって 決まる 局所系を 係数 とする. 有理 コホモロジー と その 双対である ホモロジー との 対 と 考えてよい といふのが Deligne-Grothendieck の 比較定理 であるが この コホモロジー の 有限次元性 から (Deligne によって 証明 されている) 2つの 重要な 帰結 が 出て 来る. その 1つは $P_j(\alpha)$

がパラメーター $t_1, \dots, t_n$ を含む時 上記積分は $(t_1, \dots, t_n)$ について 最大過剰決定系の線型微分方程式 (Goursat-Mannin connection) を持つという事 さらにもう一つはこれから述べようとするのだが 積分を $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ の函数 (整函数) と思う時 漸化公式を持っているという事である。

例. (ガンマ函数)

$$(3) \quad \hat{\varphi}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$$

いま $Y(t) = e^{-t} \cdot t^x$ とおく. $\omega = Y^{-1} dY = \left(\frac{x}{t} - 1\right) dt$
 $\{0, \infty\} = S \subset \mathbb{P}^1$ とする. この時

$\Omega^p(*S)$ S での p -pole を持つ p -次 有理型式の空間とすれば 複体 $\nabla_\omega = d + \omega$

$$\nabla_\omega: 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \Omega^0(*S) \rightarrow \Omega^1(*S) \rightarrow 0$$

の 1-コホモロジー $H^1(\mathbb{P}^1 - S)$ は 1次元で

その base として $\varphi = \frac{dt}{t}$ をとる. さて

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{dt}{t^2} \sim \frac{1}{x-1} \frac{dt}{t} = \frac{\varphi}{x-1}$$

$$\text{よって } \int_{\gamma} \frac{1}{x-1} \varphi(t) \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{x-1} \varphi(t) dt = \frac{\hat{\varphi}(x)}{x-1}$$

$$(4) \quad \text{i.e. } \hat{\varphi}(x) = (x-1) \hat{\varphi}(x-1)$$

一般に $X = P^l - S$ (divisor) とし
 $\pi_1(X)$ のスカラー表現 (簡単のために) ρ が
 与えられているとある

$$(5) \quad \rho: \pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{C}^* ;$$

対応する connection $Y(x)$ は

$$(6) \quad Y(x) = \prod P_j(x)^{\lambda_j} \quad \text{或いは又}$$

$$(7) \quad Y(x) = \prod P_j(x)^{\lambda_j} e^{\langle x, S \rangle}$$

とある。この時 connection form ω は

$$\omega = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{dP_j}{P_j} \quad \text{或いは} \quad \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j dP_j}{P_j} + \langle dx, S \rangle$$

で与えられる。(5) によって生ずる 局所系を V_ρ
 とおく。その dual を V_ρ^* とおく。 V_ρ を係数
 とし, (6), (7) によって得られる 有理コホモロジー H^p
 の次元は 有限次元である (Deligne)。故から
 ($p=l$) の場合

$$(8) \quad \hat{\varphi}(\lambda_1 + n_1, \dots, \lambda_j + n_j, \dots), \quad \hat{\varphi}(\lambda_1 + m_1, \dots, \lambda_j + m_j, \dots)$$

($n_1, n_2, \dots \in \mathbb{Z}$) は 高々 有限箇の

$\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_r$ (或いは $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_s$) の
1次結合で表わされる:

$$(9) \quad \hat{\varphi}(\lambda_1 + n_1, \lambda_2 + n_2, \dots) = \sum_{u=1}^r c_{n_1, n_2, \dots, n_m}^u(\lambda) \hat{\varphi}_u$$

或いは

$$(10) \quad \hat{\psi}(\lambda_1 + n_1, \lambda_2 + n_2, \dots) = \sum_{u=1}^s c_{n_1, n_2, \dots, n_m}^u(\lambda) \hat{\varphi}_u$$

命題 1. $c_{n_1, n_2, \dots}^u(\lambda)$ は $\lambda, 5$ 及び $P_j(x)$
の係数に関して有理式である.

命題 2. H^l の base $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ (或は
(予想) $\psi_1, \dots, \psi_s$ を適当にとれば)

$$(11) \quad \hat{\varphi}_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) = \\ = \sum c_{j,i}^{(k)}(\lambda) \hat{\varphi}_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$(12) \text{ 或は } \hat{\psi}_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) = \\ = \sum c_{j,i}^{(k)}(\lambda) \hat{\psi}_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

とある時 $C_{i,j}^{(k)}(\lambda)$ は λ の有理式として
 高々 $l \cdot d$ である。但し $d = \max_j \deg P_j$.

さて $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n \supset \mathbb{Z}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の格子実群
 G とする時 上記 $C_{i,j}^{(k)}(\lambda)$ は

$$H^1(G; GL(r, \mathbb{C}(\lambda)))$$

$$\text{或いは } H^1(G; GL(s, \mathbb{C}(\lambda)))$$

の元を決める。すなわち e_i を単位ベクトル

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\text{番}}{1}, 0, \dots, 0) \in G$$

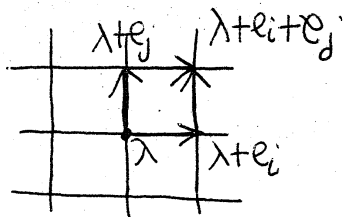
として 対応

$$(13) \quad e_i \longrightarrow C^{(i)}(\lambda) \quad \left(\begin{array}{l} r \times r \text{ または } s \times s \\ \text{の行列} \end{array} \right)$$

は つじつまの条件

$$(14) \quad C^{(i)}(\lambda + e_j) \cdot C^{(j)}(\lambda) = C^{(j)}(\lambda + e_i) \cdot C^{(i)}(\lambda)$$

$(i, j \in m)$ をみたす。



今次の仮定をおく:

- (15) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C^{(i)}(\lambda)$ は存在して しかも "ほとんど"
方向指定

致る方向において non-singular. この時
命題 3. $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ の unimodular 変換

$$(16) \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^m u_{ij} \mu_j$$

$$u_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad U = (u_{ij}) \in SL(m, \mathbb{Z})$$

が存在して

$$(17) \quad \left(\hat{\varphi}_i(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{C}^{(1)}(\mu_1 - 1, \mu_2, \dots) \tilde{C}^{(2)}(\mu_1 - 2, \mu_2, \dots) \dots$$

$$\dots \tilde{C}^{(n)}(\mu_1 - n, \mu_2, \dots) \cdot \tilde{T}(\mu_1 - n, \mu_2, \dots)$$

但し $\tilde{C}^{(i)}$ は座標 $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ についての e_i に対応する行列. $\tilde{T}$ は次の通り.

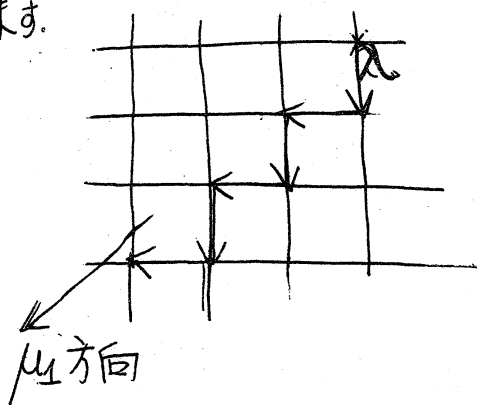
$$(18) \quad \tilde{T}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) = \left(\tilde{T}(\mu_2, \dots, \mu_m) + \frac{\tilde{T}^{(1)}(\mu_2, \dots, \mu_m)}{\mu_1} + \dots \right) A_1^{A_1} A_0^{\mu_1},$$

(A_0, A_1 は $\mu_1, \mu_2, \dots$ に

無関係) の形で与えられ

$$(19) \quad \tilde{T}(\cdots \mu + e_i) = \tilde{C}^{(i)}(\mu) \tilde{T}(\mu)$$

をみたす。これは 次のような図の方向に 極限をとることを意味す。



上の事実は G.D. Birkhoff の 1変数の古典的定理をちよと変更してみたにすぎない。逆に上記の形で 無限乗積をつくれれば それは

$$(20) \quad \hat{\varphi}(\lambda + e_i) = C^{(i)}(\lambda) \hat{\varphi}(\lambda)$$

をみたす。

このようにして 無限乗積の一般化が得られる。ここで得られた $\hat{\varphi}$ が (1), (2) のものと同ーであるかどうかは漸近展開を調べてみなければ判定出来ない。

§2. しかし 実際の計算をやるのは一般には 複雑なようにみえる。次に(1)で $P_j(x)$ が線型 且つ $\ell=2$ の時に ためすことにする。

命題4. $l=2$, $S=(\text{直線の集まり})$

とある. この時 $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ が一般ならば H^0 , H^1 は消えて H^2 のみ残る. H^2 は次の形をした 2-form で張られる

$$(21) \quad \mathcal{G}_{jk} = \frac{dP_j}{P_j} \wedge \frac{dP_k}{P_k} \quad 1 \leq j, k \leq m$$

特に $S = (\text{完全交差の直線の集まり})$ とすれば H^2 は $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ 次元.

その base は ∞ 遠直線を S が含むとした時

$$\mathcal{G}_{jk} \quad \begin{array}{l} 1 \leq j \leq m-2 \\ 1 \leq k \leq m-2 \end{array}$$

が base となる. ところで

$$(22) \quad \hat{\mathcal{G}}_{jk}(\lambda) = \int \prod_{j=1}^m P_j^{\lambda_j}(\alpha) \cdot \mathcal{G}_{jk}(\alpha) d\alpha_1 d\alpha_2$$

とあくと

$$(23) \quad \hat{\mathcal{G}}_{jk}(\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, \dots) = \quad j \neq k, k \neq l, j \neq k$$

$$= \frac{1}{(a_{j2} + a_{k2}) \cdot [P_j, P_k, P_l]} (\hat{\mathcal{G}}_{lj}(\lambda) + \hat{\mathcal{G}}_{jk}(\lambda) + \hat{\mathcal{G}}_{kl}(\lambda))$$

$$\begin{aligned}
& \hat{\varphi}_{(j^k)}^1(\dots, \lambda_j^{-1}, \dots) = \\
&= \frac{1}{(1-\lambda_j)(a_{k2}-a_{j2})} \left[\sum_{n \neq k, j} \frac{\lambda_n}{\beta_{(kj)} - \beta_{(nk)}} \hat{\varphi}_{(kj)}^1(n) + \right. \\
&+ \sum_{\substack{n \neq k, j \\ n \leq m-2}} (\hat{\varphi}_{jn} + \hat{\varphi}_{nk}) \cdot \frac{\lambda_n}{\beta_{(kj)} - \beta_{(nk)}} + \\
&+ \left. \sum_{l \leq m-2} (\hat{\varphi}_{lk} - \varphi_{lj}) \frac{\lambda_l}{\beta_{(kj)} - \beta_{(lk)}} \right]
\end{aligned}$$

但し $j \neq k$, $j, k \leq m-2$ として

$$\beta_{(ij)} = -\frac{a_{i3} - a_{j3}}{a_{i2} - a_{j2}}, \quad [P_j P_k P_l] = \begin{vmatrix} 1 & a_{j2} & a_{j3} \\ 1 & a_{k2} & a_{k3} \\ 1 & a_{l2} & a_{l3} \end{vmatrix}$$

$$P_2(x) = x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

とあった。この例は先の命題3が適用可能である。

問題 1. $X = \mathbb{P}^l - \{\text{超平面の集合}\}$ の

場合 $H^p(X)$ は

($l \geq 3$)

$$\frac{dP_{i_1}}{P_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dP_{i_p}}{P_{i_p}}$$

で張られるか？ *

問題2. その時の $(\mathcal{L}^i(\lambda))$ の一般形は？

問題3. $P_j(x)$ が一般の多項式の時

H^p の base としてどんなものを取ったらよいか？

(最後の問題に対しては皆目見当がつかない)

問題4. (Mellin の 代数函数) $\rightarrow$ (超幾何函数)
 $\rightarrow$ (積分表示) によって 連分展開の
 式が得られる？ 数論への応用？

文献

- 1) O. Perron 連分数論 I, II
- 2) 青本和彦 多価函数の積分における
松島・村上型定理 (数理研報告)
- 3) G.D. Birkhoff ~~Collected~~ Collected
Mathematical Papers Vol. 1.
- 4) P. Deligne Les eq. diff. à points
réguliers singuliers. (Springer, Lec. Note)
- 5) ——— Théorie de Hodge
(Mimeographed)

* この事実も本当であることが証明される。そのためには
 多変数函数の部分分数展開が必要である。正規交叉の時
 は超コホモロジーの一般論から直ちに出来ることが浪川氏
 によって注意された。

6) 佐藤 幹夫 超幾何函数の特徴づけ
(東大での講義録)

7) G. Belardinelli Fonctions hyper-
géométriques de plusieurs variables
et Résolution analytique des équations
algébriques générales, Gauthier-Villars