

準マトロイドについて

早大 理工 井上 正之 (Masayuki Inoue)

小野沢 晃 (Akira Onozawa)

1. はじめに

1935年に Whitney が線形独立・従属の概念の抽象化として最初に考え出した“マトロイド”なる概念は、1970年の Edmonds のポリマトロイドを経て、1980年以降の畠澤による超空間論へ一般化され、現在に至っている。^[1]

準マトロイドは、1980年に畠澤によって初めて提起された概念で、^[2] マトロイドとポリマトロイドの中間に属するものとして位置づけられる。準マトロイドは、“端点定理”^[2] からわかるように、超空間論における最も基本的な構成要素であり、その研究は重要な課題の一つである。

現在までに、いくつかの研究が行われ、準マトロイドの組合せ的性質などが少しずつ明らかになってきているが、研究の余地はまだ多い。^{[3]~[5]}

本報告では、準マトロイドの性質について述べる。

2. 準備 [2].

非空な有限集合 E に対し、そのべき集合 2^E 上で定義される実数値関数

$$\phi : 2^E \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

を考える。まず、 ϕ の (1 階) 微分を、

$$\frac{\partial \phi}{\partial i}(S) = \phi(S \cup \{i\}) - \phi(S) \quad (i \in E, S \subseteq E - \{i\}) \quad (2.2)$$

によって定義する。2 階以上の微分は帰納的に、

$$\frac{\partial \phi}{\partial I}(S) = \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial (I - \{i\})}(S) \right) = \frac{\partial \cdots \partial \phi}{\partial i_0 \cdots \partial i_p}(S) \quad (I = \{i_0, i_1, \dots, i_p\} \subseteq E - S) \quad (2.3)$$

として定義できる。簡単のため、 $\phi_I(S) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial I}(S)$ と表し、特に 2 階微分の場合、 $I = \{i, j\}$ として、

$$\phi_{ij}(S) = \phi(S \cup \{i, j\}) - \phi(S \cup \{i\}) - \phi(S \cup \{j\}) + \phi(S) \quad (S \subseteq E - \{i, j\}) \quad (2.4)$$

と書ける。この時、

$$\lceil \phi_{ij}(S) \geq 0 \quad (\forall \{i, j\} \subseteq E, i \neq j, \forall S \subseteq E - \{i, j\}) \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow \phi(X) + \phi(Y) \leq \phi(X \cup Y) + \phi(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq E) \quad (2.6) \rceil$$

である。(2.5) 又は (2.6) を満たす ϕ は、優モジューラ関数と呼ばれる。

さらに、集合関数 ϕ に対し、その Möbius の反転関数 τ は、

$$\tau(T) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T-S|} \phi(S) \quad (T \subseteq E) \quad (2.7)$$

のように表わせ、

$$\zeta(S) = \sum_{T \subseteq S} \tau(T) \quad (2.8)$$

なる関係があることが良く知られている。ここで、次の様な集合関数 μ^T を導入する。

$$\mu^T(S) = \begin{cases} 1 & (T \subseteq S \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} T \subseteq E, S \subseteq E \\ T \text{ は固定} \end{array} \right) \quad (2.9)$$

これは優モジュラー関数であり、単位優モジュラー関数と呼ばれる。これを用いると、(2.8)式は、

$$\zeta(S) = \sum_{T \subseteq E} \tau(T) \mu^T(S) \quad (2.10)$$

と書ける。

3. 準マトロイド

E を有限集合とする時、 2^E 上の集合関数 $\zeta: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ が優モジュラー関数であるならば、 E と ζ の対を、 $\mathcal{M} = (E, \zeta)$ と表わし、これをハイパーマトロイドと呼ぶ。また、 ζ は不足度関数と呼ばれる。ハイパーマトロイド $\mathcal{M}$ において、その不足度関数 ζ が、

$$\zeta(\emptyset) = 0, \quad (3.1)$$

$$\zeta(\{i\}) \geq 0 \quad (\forall i \in E) \quad (3.2)$$

を満たすならば、 $\mathcal{M}$ はポリマトロイドとなる。特に、ポリマトロイド $\mathcal{M}$ の不足度関数 ζ が常に整数値をとるならば、 $\mathcal{M}$ は整ポリマトロイドと呼ばれる。次に、整

ポリマトロイド $\mathcal{M} = (E, \mathcal{G})$ において、

$$\mathcal{G}_{ij}(S) = 1, 0 \quad (\forall \{i, j\} \subseteq E, i \neq j, \forall S \subseteq E - \{i, j\}) \quad (3.3)$$

が成立する時、 $\mathcal{M}$ は準マトロイドと呼ばれる。さらに、準マトロイド $\mathcal{M}$ の不足度関数 $\mathcal{G}$ が、

$$\mathcal{G}_i(S) = 1, 0 \quad (\forall i \in E, S \subseteq E - \{i\}) \quad (3.4)$$

を満たす時、 $\mathcal{M}$ はマトロイドとなる。

以上に述べたことから、準マトロイドがマトロイドとポリマトロイドとの中間に属する概念であることがわかる。

そして、準マトロイドについて次の重要な定理が成立する。

定理 3.1 (端点定理) ^[2]

「i) 任意のポリマトロイドの不足度関数は、初等的準マトロイドの不足度関数の非負一次結合で表わせる。

ii) 任意のハイパーマトロイドの不足度関数は、初等的準マトロイドの不足度関数の一次結合で表わせる。」

この定理により、準マトロイドが、超空間論において最も基本的な構成要素となっていることがわかる。

4. 集合の被覆について。

まず、有限集合 E の“被覆 (Covering)” の定義を行う。

定義 4.1 ^[7]

「有限集合 E の部分集合をいくつか含む族を π とする。

ここで、 π に属するすべての集合の和集合が、もとの全

体集合 E に等しい時、 π を集合 E の被覆という。』

集合 E の被覆 π の元を、ブロックと呼ぶ。

$$\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_b\} \quad (\emptyset \neq B_i \subseteq E, i=1, 2, \dots, b) \quad (4.1)$$

とすれば、

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_b = E \quad (4.2)$$

である。集合 E を被覆する方法はさまざまであって、以下に、その例を示す。

定義 4.2. ⁽⁷⁾

『集合 E の被覆 π が、次の条件 (i), (ii) を満足するとき、 π を集合 E の n -分割である、という。

(i) π のすべての要素は、少くとも、 E の n 個の要素を含む。

(ii) E のすべての n 元部分集合 (E の部分集合で、その要素数がちょうど n であるもの) は、 π の唯一つの要素に含まれる。』

n -分割の例としては、次に示す射影幾何がある。(この場合、 $n=2$ 、すなわち 2-分割となっている。)

定義 4.3.

『非空有限集合 P の部分集合族 $\mathcal{L}$ が、次の (i) ~ (iii) を満足するとき、対 $(P, \mathcal{L})$ は射影幾何と呼ばれる。

また、 P の元を点、 $\mathcal{L}$ の元を直線とそれぞれ呼ぶ。

(i) $x \neq y, x, y \in P$ ならば、 $x, y \in L \in \mathcal{L}$ となるような $\mathcal{L}$ の元が唯一つ存在する。(このような L を、 $x \vee y$ とあらわす。)

(ii) $L \in \mathcal{L} \Rightarrow |L| \geq 3$.

(iii) $x \neq y \vee z, x^* \in y \vee z, y^* \in z \vee x$

$\Rightarrow \exists z^* \in x \vee y : z^* \in x^* \vee y^*$ 」

この場合、 P が E に、 $\mathcal{L}$ の元 (直線) が π のブロックにそれぞれ対応している。

次に示す BIBD も、集合の被覆と見なせる。

定義 4.4.

『 E の部分集合族 $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$ が、次の条件を満足する時、 π は BIBD と呼ばれる。

(i) すべてのブロック B_i ($i=1, 2, \dots, b$) は、同一の要素数を持つ、すなわち、

$$|B_i| = k \quad (i=1, 2, \dots, b)$$

(ii) i を E の要素とする。すると、 i は、丁度 r 個のブロックに含まれる。

(iii) i, j を、互いに素な E の要素とする。すると、 $\{i, j\}$ は丁度 λ 個のブロックに含まれる。

このような BIBD を、 $D = D(b, v, r, k, \lambda)$ であらわし、($|E| = v$ とする) 5 個の整数 b, v, r, k, λ

を BIBD のパラメータと呼ぶ。』

上の定義において、 $\lambda=1$ ならば、BIBD は 2-分割になっている。

また、点集合 E 、枝集合 $\mathcal{U}$ を持つ単純無向グラフについても、枝によって点集合 E を被覆していると考えることができる。

5. 集合の被覆と準マトロイド

まず、集合の被覆と整ポリマトロイドとの関係について述べる。

$$\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_b\} \quad (\emptyset \neq B_i \subseteq E, i=1, 2, \dots, b) \quad (5.1)$$

なる集合 E の被覆 π を考える。 2^E 上の集合関数を ζ とすると、(2.10) 式から、

$$\zeta(S) = \sum_{T \subseteq E} \tau(T) \mu^T(S) \quad (S \subseteq E)$$

と書ける。ここで、

$$\tau(T) = \begin{cases} 1 & (T = \exists B_i \in \pi) \\ 0 & (T \neq \forall B_i \in \pi) \end{cases} \quad (5.2)$$

とすれば、

$$\zeta(S) = \sum_{B_i \in \pi} \mu^{B_i}(S) \quad (S \subseteq E) \quad (5.3)$$

となる。この時、次の定理が成り立つ。

定理 5.1

『 (5.1) 式に示したような集合 E の被覆 π に対して、

(5.3)式のように定義される関数は、整ポリマトロイドの不足度関数となる。』

証明. (5.3)式の関数 ϕ が、(2.5)、(3.1)、(3.2)の各式を満たしていること、及び、整数値関数であること、を示せばよい。これは、(5.1)式、単位優モジュー関数 μ^T の定義と性質、等を考慮すればあきらかに成立する。 $\square$

次に、集合の被覆が準マトロイドになるための条件を考える。(2.4)式の右辺に、(2.10)式を代入して計算すると、

$$\phi_{ij}(S) = \sum_{\{i,j\} \subseteq T \subseteq S \cup \{i,j\}} \tau(T) \quad (5.4)$$

を得る。従って、集合の被覆が準マトロイドになるためには、(3.3)式から、

$$\sum_{\{i,j\} \subseteq T \subseteq S \cup \{i,j\}} \tau(T) = 1, 0 \quad (\forall \{i,j\} \subseteq E, i \neq j, \forall S \subseteq E - \{i,j\}) \quad (5.5)$$

となれば良い。このためには、(5.2)式から、

$$\{i,j\} \subseteq T \subseteq S \cup \{i,j\} \quad (\forall \{i,j\} \subseteq E, i \neq j, \forall S \subseteq E - \{i,j\}) \quad (5.6)$$

を満足する集合 $T \subseteq E$ の中で、 $\tau(T) = 1$ となるものが高々1つしかないようにすれば良い。すなわち、(5.6)式を満足する集合 T で、集合 E の被覆 π のブロックになっているものが高々1つしか存在しなければ良い。ところで、(5.6)式を満たす集合 T は、 E の2元部分集合 $\{i,j\}$ を

つねに含んでいる。従って、 E のすべての2元部分集合が、それぞれ、 E の被覆 π のブロックのうち、高々1つのブロックにのみ含まれるようにしてやれば、(5.5)式が成立し、集合 E の被覆 π が、(5.3)式で定義される関数を不足度関数として持つ準マトロイドになることがわかる。

6. 準マトロイドのある1つのクラス.

本節では、現在までに知られている準マトロイドの例がほとんど、ある1つのクラスに属していることを述べる。

E 上の準マトロイド $\mathcal{M}$ に対し、その不足関数 τ は、Möbiusの反転関数 τ を用いて、(2.10)式の形に書き、その2階微分が(5.5)式のように表わされる。 τ は、一般に正負いずれの値でもとりうるが、ここで

$$\tau(T) \geq 0 \quad (\forall T \subseteq E) \quad (6.1)$$

となっているものとする。この時、(5.5)式が成立していることから、 E のすべての2元部分集合 $\{i, j\}$ に対し、

$$\{i, j\} \subseteq T \subseteq E \quad (6.2)$$

を満足する集合 T の中で、 $\tau(T) = 1$ となるものが高々1つだけで、他はすべて $\tau(T) = 0$ となっていることがわかる。これは、 $\tau(T) = 1$ となる集合 T を被覆 π のブロックとみなせば、前節で述べた、被覆 π が準マトロイドになるための条件と同じことである。ところで、(6.1)式の成

立する準マトロイドにおいて $\tau(T)=1$ となるような集合 T のすべての和集合は、一般には全体集合 E と一致しない、すなわち集合 E の被覆にはならない。しかし、 $\tau(T)=1$ となる集合 T のすべての和集合を E_T とおくと、 $\tau(T)=1$ となる集合 T の族は E_T の被覆で、準マトロイドになる。また、全体集合 E の中で、 E_T に含まれない部分は、不足度関数 δ のモジュー成分に対応しており、準マトロイド $\mathcal{M}$ の本質的部分 (E_T に対応し、集合の被覆で表現できる部分) には全く影響を与えないことは、文献 [6] の優モジュー関数の分解定理からほぼ自明である。

以上の議論から、(6.1)式の成立する準マトロイドを、集合の被覆によって表現できる準マトロイドと呼び、その表現を、

$$\pi_T = \{T_i \mid \tau(T_i)=1, i=1, 2, \dots, l\} \quad (6.3)$$

$$E_T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_l \quad (T_i \in \pi_T, i=1, 2, \dots, l) \quad (6.4)$$

によって与えることにする。このように、集合の被覆として表現できる準マトロイドのクラスがあることがわかる。例えば、4節の定義4.2において、 $m=2$ 、すなわち2-分割を考えると、定義4.2の条件(ii)から、これが準マトロイドであり⁽¹⁾ しかも集合の被覆として表現できるクラスに属していることはあきらかである。従って、2

一分割の例である射影幾何、BIBD (但し、 $\lambda=1$)
なども、このクラスに属する準マトロイドである。また、
点集合 E 、枝集合 U を持つ単純無向グラフは、

$$\rho(S) = \sum_{i,j \in U} \mu^{i,j}(S) \quad (6.5)$$

を不足度関数に持つ準マトロイドで、グラフ的準マトロイドと呼ばれるが、^[4] これもやはり集合の被覆として表現できる準マトロイドである。このように、現在までに知られている準マトロイドのほとんどは、集合の被覆として表現できるクラスに属していることがわかる。

7. おわりに.

以上で、準マトロイドと集合の被覆という組合せ的構造との関連を中心に述べた。集合の被覆で表現できない準マトロイドについて調べるのが、今後に残された課題の一つである。

謝辞：日頃、筆者等が御指導・御鞭撻頂く本学堀内和夫教授・大石進一助教授に深く感謝致します。また、平生、有益な御助言を頂く新潟大学冨澤信明教授に感謝致します。

参考文献

[1] 冨澤：ヘドロニ空間の理論と応用；数解研講究録 471, PP. 183 ~ 229 (1982).

[2] 冨澤：超空間論(II) 区間の幾何学と高階優モジュー関

数；電子通信学会技術研究報告、CAS 80-73, pp. 31~40 (1980).

[3] 畠澤：超空間論(VI)準マトロイドとそのグラフ的表現について；同上，CAS 80-106, pp. 17~24 (1980).

[4] 畠澤：超空間論(XI)グラフ的準マトロイドとそのグラフの向き付けへの応用；同上，CAS 81-93, pp. 55~62 (1981).

[5] 柴崎、松藤、平山：準マトロイドの分類とテーブル；同上、CAS 82-1, pp. 1~8 (1982).

[6] 畠澤：超空間論(I) 優モジュラー関数と基の概念の一般化；同上、CAS 80-72, pp. 23~30 (1980).

[7] H.H. Crapo and G.C. Rota: On the Foundations of Combinatorial Theory, Combinatorial Geometries; M.I.T. Press, Cambridge, Mass. (1970).