

Wildly ramified elliptic surfaces

南パリ大学 M. Raynaud

(桂 利行 記)

k を標数 p ($p \geq 0$) の代数的閉体, C を k 上定義された完備な非特異代数曲線とする。 C の有理函数体を K と書く。

我々は, k 上定義された相対的極小楕円曲面 $f: X \rightarrow C$ を考える。その generic fiber を X_K と書く。

楕円曲線 X_K は, かならずしも K 上の有理点を含むとはかぎらないが, そのヤコビ多様体 E_K を考えれば, それは 1 次元アーベル多様体であり, 原点 O_K を含む。 X_K は, group scheme E_K に付随した principal homogeneous space である。楕円曲線 E_K は, 有理点 O_K を拡張した section σ を持つ楕円曲面 $g: \bar{E} \rightarrow C$ の generic fiber になっている。

楕円曲面 $g: \bar{E} \rightarrow C$ は, $f: X \rightarrow C$ に付随したヤコビ楕円曲面である。 $\bar{E}$ を, C 上 smooth な $\bar{E}$ の最大の open subscheme とする。 $\bar{E}$ は, section σ を持つ, C -group scheme である。 $\bar{E}$ の neutral component を $\bar{E}^0$ と書く。 $\bar{E}^0$ の fiber

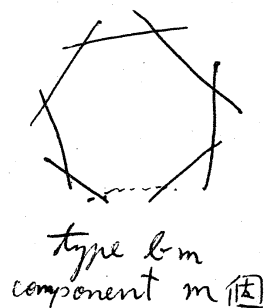
とは交わらない g の fiber の components をすべてつづせば、局所的には Weierstrass equation によってあらわされる平面3次曲線の族を得る。本稿の目的は、 X と $\bar{E}$ の global invariants を比較することである。

U を、 $X|U$ が étale topology で section を持つような C の最大の open subscheme とする。 $\Sigma = C - U$ とおく。 Σ は、 X_K が ramified であるような有限個の place の集合全体である。 C の点 s に対し、place s での local ring $\mathcal{O}_{C,s}$ (函数体数体 K) の completion を $\mathcal{O}_s$ (resp. K_s) と書く。 X_K の $H^1(\text{Gal}/K_s, E_{K_s})$ への像が 0 でない場合にかぎり s は Σ に含まれる。 その位数を d_s と書けば、 d_s は、fiber $X(s) = f^{-1}(s)$ の components の重複度の最大公約数に等しい。

例 2) E が点 s で good reduction を持つならば、 $X(s)_{\text{red}}$ は、 $E(s)$ に isogenous な楕円曲線である。

例 3) E が点 s で multiplicative type の reduction を持ち、 E の j -invariant が s で位数 m の極を持つならば、 $\bar{E}(s)$ は type b_m の singular fiber であり、 $X(s)$ は、すべての components が重複度 d_s の同じ type b_m の multiple fiber である。

(証明は、M. Raynaud [4] を参照)



例 C) E が additive type の reduction を持てば, $d_s = 1$ であるか, 又は $p > 0$ で d_s は p の倍数である (cf. M. Raynaud [3]). 後に, $\bar{E}(s)$ と $X(s)$ の component 数は等しいことを示す。

問題. $X(s)$ と $\bar{E}(s)$ は 重複度を除いて, 同じ type か?

§1. X と $\bar{E}$ の不変量の比較.

一般に, 曲面 S の structure sheaf の Euler-Poincaré 数を $\chi(\mathcal{O}_S)$ と書く。Second Chern number を $C_2(S)$ と書く。

定理 1. $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{\bar{E}})$ が成立する。

証明は後まわしにしていくつかの系を述べる。

系 1. $C_2(X) = C_2(\bar{E})$ が成立する。

証明. Noether の公式から, $12\chi(\mathcal{O}_X) = C_1^2(X) + C_2(X)$ 。

また, 楕円曲面に対しては $C_1^2 = 0$ だから, 定理 1 より結果を得る。q. e. d.

系 2. C の点 s に対して, $X(s)$ と $\bar{E}(s)$ の component の数は等しい。

証明. l を p 及び, f, g の fiber の重複度とは互いに素な素数とする。 C_2 を, $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ を係数にする étale cohomology を使って計算すれば,

$$(1.) C_2(X) = \chi_X(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = \chi_C(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) - \chi_C(R^1 f_* (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})) + \chi_C(R^2 f_* (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}))$$

ただし, χ_X, χ_C はそれぞれ曲面 X , 曲線 C の, 与えられ

た sheaf に係数を持つ étale cohomology の Euler-Poincaré number である。X の C 上の relative Picard functor における ℓ 倍写像の kernel を ${}_{\ell}\underline{\text{Pic}}_{X/C}$ と書けば,

$$(1.2) \quad R^1 f_* (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong \underline{\text{Hom}}(\mu_{\ell}, {}_{\ell}\underline{\text{Pic}}_{X/C})$$

が成立する。ただし, μ_{ℓ} は multiplicative group G_m の ℓ 倍写像の kernel である (cf. M. Raynaud [2])。また,

$$(1.3) \quad {}_{\ell}\underline{\text{Pic}}_{X/C} \simeq {}_{\ell}\underline{\text{Pic}}_{\mathbb{P}^1/C} \simeq {}_{\ell}E^0$$

だから,

$$(1.4) \quad R^1 f_* (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \simeq R^1 g_* (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

を得る。X(s) の component 数 (resp. $\bar{E}(s)$ の component 数) を α_s (resp. β_s) とすれば, $R^2 f_* (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ (resp. $R^2 g_* (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$) は, $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ の, 点 s で rank $\alpha_s - 1$ (resp. $\beta_s - 1$) の finite support の sheaf による拡大である。系 1, 及び (1.1), (1.4) より $\chi_C(R^2 f_* (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})) = \chi_C(R^2 g_* (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$ だから,

$$(1.5) \quad \sum_{s \in C} (\alpha_s - 1) = \sum_{s \in C} (\beta_s - 1)$$

を得る。ところで, additive type の reduction がただ一つならば, 先の例 (a), 例 (b) から, (1.5) を使って系 2 を得る。

もし, additive type の reduction がいくつか存在するならば, 点 s をそのうちの 1 つとして, s で étale, その他の点で semi-stable reduction になるような曲線 C' と正則写像 $h: C' \rightarrow C$ をとれば, C' 上で考えて, 例 (a), 例 (b) 及び (1.5)

から、求める結果を得る。 g. e. d.

系3. X と $\bar{E}$ の Picard 数は等しい。

証明. $\rho(E_k) = \begin{cases} 0 & (E_k \text{ が constant のとき}) \\ E_k \text{ の rank} & (\text{その他}) \end{cases}$

と定義すれば,

$$(1.6) \quad \rho(X) = \rho(E_k) + \sum_{\lambda \in C} (\alpha_\lambda - 1) + 2$$

$$(1.7) \quad \rho(\bar{E}) = \rho(E_k) + \sum_{\lambda \in C} (\beta_\lambda - 1) + 2$$

だから、系2を使って 系3を得る。 g. e. d.

§2. Wild ramification

$\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(R^1 f_* (\mathcal{O}_X))$ を計算するために, sheaf $R^1 f_* (\mathcal{O}_X)$ を研究する。 $\beta = \underline{\text{Pic}}_{X/C}$ を X/C の relative Picard functor とする。 β は群に値を持つ formally smooth functor で, 点 $\lambda \in C$ での β の fiber は, 次元 $H^1(X(\lambda), \mathcal{O}_{X(\lambda)})$ の smooth group scheme である。 $R^1 f_* (\mathcal{O}_X)$ は, β の Lie algebra である。 また, $\underline{\text{Pic}}_{\bar{E}/C}$ は group scheme により, その neutral component は, 標準的に, E の neutral component E^0 に同型である。 $\underline{\text{Pic}}_{\bar{E}/C}$ は, $\bar{E}(\lambda)$ が irreducible ではないような place λ で分離的ではないが, unit section の closure による $\underline{\text{Pic}}_{\bar{E}/C}$ の商は, $\mathbb{Z}_C$ の E による拡大である (cf. M. Raynaud [2])。 また, U 上では, β の neutral component β^0 は, E の neutral component E^0

に標準的に同型で, $R^1 f_* (\mathcal{O}_X) |_U$ は line bundle である。

λ を C の closed point とする。

定義. $R^1 f_* (\mathcal{O}_X)$ が $\text{Spec } \mathcal{O}_\lambda$ 上 free であるならば, X は点 λ で tamely ramified であるという。それ以外の時には, X は, 点 λ で wildly ramified であるという。

$R^1 f_* (\mathcal{O}_X)$ は, C 上の base change と可換であり, f の fiber の Euler Poincaré number は一定であるから, 次の3条件の同値を得る。

- 1) X は 点 λ で tamely ramified である。
- 2) $H^1(X(\lambda), \mathcal{O}_{X(\lambda)})$ は 1次元である。
- 3) $H^0(X(\lambda), \mathcal{O}_{X(\lambda)})$ は constants となる。

点 λ での ramification を研究するために, C を $\text{Spec}(\mathcal{O}_\lambda)$ でおきかえ, さらに, 完備な valuation ring $R = k[[t]]$ におきかえる。 $k[[t]]$ の商体を K と書く。標数 0 では, 次のように wild ramification はおこらない。

命題 1. $f: X \rightarrow \text{Spec } R$ を proper で flat な正則写像とし, X が normal で $H^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K}) = K$ とする。
もし, $\text{char. } k = 0$ ならば, $H^0(X(k), \mathcal{O}_{X(k)}) = k$ となる。

証明. closed fiber $\bar{X}$ の irreducible components の重複度の最小公倍数を n とする。 $u^n = t$ とおき, R の degree n の ramified extension を $R' = k[[u]]$ とおく。 $X \times_R R'$ の

normalization を X' とすれば, n のとり方から, X' の R' 上の closed fiber は reduced である。従って, $H^0(X'(k), \mathcal{O}_{X'(k)}) = k$ 。
 また, 拡大 R'/R は, Galois 拡大で, Galois 群 $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 。

X は normal だから, $X'/G \cong X$ 。標数は 0 だから, invariant をとる操作と, base change は可換である。故に, $X/tX = (X'/tX')^G = (X'/u^n X')^G$ 。故に, $H^0(\mathcal{O}_X/t\mathcal{O}_X) = (H^0(\mathcal{O}_{X'}/u^n \mathcal{O}_{X'}))^G = [R'/u^n R']^G = k$ 。 g.e.d.

tame な場合に Picard functor β を研究することはたやすい。実際, M. Artin の結果を使えば, β は smooth algebraic space になる。neutral component β^0 の unit section は, locally closed だから, β^0 におけるその closure H は, R 上 étale な群の algebraic space である (closed fiber $H(s)$ は位数 d_s の巡回群である)。そのとき, β^0/H は smooth group scheme になり, Néron model の普遍性によって, canonical isomorphism $\beta_K^0 \rightarrow E_K$ は, morphism $u: \beta^0/H \rightarrow E$ に拡張される。 u は closed fiber で surjective だから, u は flat epimorphism である (cf. Pg). $\ker u$ は R 上 flat で, その generic fiber は unit group になるから, $\ker u = 0$ だろう。従って, u は isomorphism である。 H は R 上 étale だったから $\text{Lie } \beta^0 \cong \text{Lie } (\beta^0/H) \cong \text{Lie } E$ だろう。

命題2. $U \subset V$ を, X がその上で tame であるような C の最大の開集合とする。そのとき, 次のような canonical isomorphism が存在する,

$$(2.1) \quad R'f_*(\mathcal{O}_X)|_V \xrightarrow{\sim} R'g_*(\mathcal{O}_E)|_V = \text{Lie } E|_V.$$

さて, wild な場合を考える。

定理2. 1) generic fiber 上の canonical morphism を拡張するような group functor の canonical isomorphism

$$u: \beta^0 \longrightarrow E^0$$

が存在する。

2) u の原点での tangent map

$$(2.2) \quad \text{Lie } u: \text{Lie } \beta \longrightarrow \text{Lie } E$$

$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \parallel$$

$$\text{を} \text{考} \text{え} \text{る} . \quad H^1(X, \mathcal{O}_X) \quad H^1(E, \mathcal{O}_E)$$

そのとき, a) $\text{Lie } u$ の kernel は, $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の torsion part.

b) $\text{Ker}(\text{Lie } u)$ と $\text{Coker}(\text{Lie } u)$ は, 同じ長さを持つ。

注意. 2) から, global な場合に, $\chi(R'f_*(\mathcal{O}_X)) = \chi(R'g_*(\mathcal{O}_E))$ を得, 従って $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_E)$ を得る。

定理2の証明のスケッチ

X が wildly ramified のときには, β は, algebraic space としてさえ representable ではない。しかし, rigidificator を使って (cf. M. Raynaud [2]), 次のような group functor の exact sequence がある。

$$(*) \quad A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{f} \beta \longrightarrow 0,$$

ここで, A, B は smooth group schemes で, generic fiber での morphism i_K は injective であると仮定できる。 X が tamely ramified ならば, i は immersion で, f は algebraic space B/A によって represent される。しかし, X が wildly ramified であるときは, i は immersion ではなく, また monomorphism でさえない。実際, i の closed fiber の kernel は, 正の次元を持つ。しかし, E_K の Néron model をみたす普遍性によって, morphism の拡張 $v: B^\circ \longrightarrow E^\circ$ があり, $v \circ i$ は A 上 零写像となる。従って, v は,

$$(2.3) \quad u: \beta^\circ \longrightarrow E^\circ$$

を引き起こす。

注意. β, E は Néron の性質をみたす。すなわち, generic fiber 上のいかなる有理点も integral point として拡張できる。このことと Hensel の補題を使えば, u は closed fiber で surjective になる。従って, 上記 v は flat epimorphism になる。この性質から, $E^\circ(S)$ が elliptic curve (resp. multiplicative group G_m) ならば, $\beta^\circ(S)$ も elliptic curve (resp. G_m) を含む。これは, 最初にのべた例 a), b) の一つの証明である。

(*) から, 次のような short exact sequence とうる。

$$(**) \quad 0 \longrightarrow \text{Lie } A \longrightarrow \text{Lie } B \longrightarrow \text{Lie } \beta \longrightarrow 0$$

$$\qquad\qquad\qquad \qquad\qquad\qquad \qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\qquad\qquad\qquad \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

あとは、定理2の後半の主張を可せばよい。

一般に、 $a: G \longrightarrow H$ を smooth group schemes の、fiber が連結であるような R -morphism とする。 $N = \text{Ker } a$ とおき、 a の generic fiber a_K が smooth であるとする。 a の smoothness からの欠損をはかる invariants を導入する。

i) $\alpha: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ を a に付随した Lie algebra 上の写像とする。 a_K は smooth だから α_K は surjective である。故に $\text{Coker } \alpha$ は長さ有限であり、 a が smooth であることと、 $\text{Coker } \alpha$ が零であることは同値である。

ii) a が smooth でなければ、 N は smooth ではなく、また flat でさえない。しかし、smooth な group scheme $\tilde{N}$ と morphism $b: \tilde{N} \longrightarrow N$ で、任意の smooth group scheme M と任意の morphism $c: M \longrightarrow N$ に対して、morphism $d: M \longrightarrow \tilde{N}$ で $b \circ d = c$ となるものがあるようなものが存在する。generic には、 $\tilde{N}_K \cong N_K$ が成立する。 $\tilde{\eta}$, $\eta = \text{Ker } \alpha$ をそれぞれ $\tilde{N}$, N の Lie algebra とすれば、 $\tilde{\eta}/\eta$ は長さ有限である。

iii) もし、 a が smooth ならば、 $G(R) \longrightarrow H(R)$ は surjective である。 a が smooth でないならば 次のように

して, $G(R) \rightarrow H(R)$ の surjectivity からの欠損をほかにすることができ。任意の n に対して $R_n = k[[t]]/(t^n)$ とおく。 R_n から k への Weil restriction を使って, k -algebraic group scheme $G(n), H(n)$ で

$$(2.4) \quad G(n)(k) \simeq G(R_n), \quad H(n)(k) \simeq H(R_n)$$

となるものと, morphism $\alpha(n): G(n) \rightarrow H(n)$ が存在する。 α_n は smooth だから, inverse system $H(n)/\text{Im } G(n)$ は, 十分大きな n に対して stationary である。そこで,

$$(2.5) \quad \dim H(R)/\alpha G(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \dim H(n)/\alpha(n) G(n)$$

と定義する。

定理3. 上記の記号を用いて,

$$(2.6) \quad \text{length}(\text{Coker } \alpha) = \text{length}(\mathcal{N}/\bar{\mathcal{N}}) + \dim H(R)/\alpha G(R)$$

証明. N が flat である場合のみを示す。このとき, exact sequence

$$(2.7) \quad 0 \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{\alpha} H \rightarrow 0$$

の reduction mod t^n を考えて

$$(2.8) \quad 0 \rightarrow N_n \rightarrow G_n \rightarrow H_n \rightarrow 0$$

を得る。Mazur & Roberts [1] prop. 3.5 を使って

$$(2.9) \quad N(R_{2n}) \rightarrow N(R_n) \rightarrow \text{Coker}(\alpha/t^n \alpha) \rightarrow 0$$

なる exact sequence を得る。さらに, inverse system $N(R_n)$

は, N_k が smooth であることから, uniform Mittag-Leffler condition をみたす (Bourbaki, Algèbre commutative, chap. III,

Hensel の補題 参照)。 $\text{Im}\{\mathcal{N}(R_{m+n'}) \rightarrow \mathcal{N}(R_n)\}$ は $n' \geq n$ に対して一定である。(2.9) に於て, $n > m$ にて, て,

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \text{Im}\{\mathcal{N}(R_{2n}) \rightarrow \mathcal{N}(R_n)\} &= \text{Im}\{\mathcal{N}(R) \rightarrow \mathcal{N}(R_n)\} \\ &= \text{Im}\{\tilde{\mathcal{N}}(R) \rightarrow \mathcal{N}(R_n)\} = \text{Im}\{\tilde{\mathcal{N}}(R_n) \rightarrow \mathcal{N}(R_n)\} \end{aligned}$$

を得る。従って, exact sequence

$$(2.11) \quad \tilde{\mathcal{N}}(R_n) \rightarrow \mathcal{N}(R_n) \rightarrow \text{Coker}(\alpha/t^n\alpha) \rightarrow 0 \text{ 得る。}$$

$F_n = \text{Ker}\{\tilde{\mathcal{N}}(R_n) \rightarrow \mathcal{N}(R_n)\}$ とおく。 exact sequence

$$(2.12) \quad 0 \rightarrow \mathcal{N}(R_n) \rightarrow G(R_n) \xrightarrow{a_n} H(R_n)$$

を用いて

$$(2.13) \quad \dim G(R_n) = \dim H(R_n) + \dim \mathcal{N}(R_n) - \dim \text{Coker } a_n.$$

(2.11) から,

$$(2.14) \quad \dim \mathcal{N}(R_n) - \dim \tilde{\mathcal{N}}(R_n) = \dim \text{coker}(\alpha/t^n\alpha) - \dim F_n.$$

また, $\dim G(R_n) = \dim H(R_n) + \dim \tilde{\mathcal{N}}(R_n)$ となるから, (2.13)(2.14)より

$$(2.15) \quad \dim \text{Coker}(\alpha/t^n\alpha) = \dim F_n + \dim \text{Coker } a_n.$$

を得る。 n を $2n$ に置きかえれば,

$$(2.16) \quad \dim \text{Coker}(\alpha/t^{2n}\alpha) = \dim F_{2n} + \dim \text{Coker } a_{2n}$$

となる。しかし, 十分大きな n に対して,

$$(2.17) \quad F_{2n} = \text{Ker}\{\tilde{\mathcal{N}}(R_{2n}) \rightarrow \mathcal{N}(R_{2n})\} = \text{Ker}\{\tilde{\mathcal{N}}(R_{2n}) \rightarrow G(R_{2n})\}$$

は, $\text{Ker}\{\tilde{\mathcal{N}}(R_{2n}) \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}(R_n)\}$ に含まれる。

後者は $\tilde{\eta}/t^n\tilde{\eta}$ だから, $F_{2n} = \text{Ker}(\tilde{\eta}/t^n\tilde{\eta} \rightarrow G/t^nG)$

となる。故に, 十分大きな n に対して,

$$(2.18) \quad \dim F_n = \text{length Coker} \{ \tilde{\eta} \longrightarrow \eta \}$$

となる。故に、十分大きな n を考えて、(2.16) から (2.6) をうる。 *q. e. d.*

定理2の証明つづき。 次のダイアグラムを考える。

$$(2.19) \quad \begin{array}{ccc} B^0 & \xrightarrow{u \circ j} & E^0 \\ & \searrow j & \nearrow u \\ & \beta^0 & \end{array}$$

これに、定理3を応用する。 $N = \ker(u \circ j)$ とおくと、これは R 上 flat である。また、

$$(2.20) \quad \text{Lie } N = \ker \{ \text{Lie } B^0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\text{Lie } u} \text{Lie } E^0 \}$$

である。 $\tilde{N}$ は $(*)$ の群 A であるから $\text{Lie } N / \text{Lie } A$ は、 $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の torsion である。また、 $\text{Coker} \{ \text{Lie } B \longrightarrow \text{Lie } E \}$ は、 $\text{Coker} \{ H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \text{Lie } E \}$ に等しく、 $B^0(R) \longrightarrow E^0(R)$ が surjective であることはすでに示したから、定理3によって、

$$(2.21) \quad \text{length Lie } N / \text{Lie } A = \text{length Coker} \{ H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \text{Lie } E \}$$

を得る。 *q. e. d.*

§3. Relative dualizing complex について。

$\omega_{X/C} = \omega_X \otimes f^*(\omega_C^{-1})$ を X の relative dualizing complex とする。 $\omega_{\bar{E}/C}$ を $\bar{E}$ の relative dualizing complex とする。 J を $g: \bar{E} \longrightarrow C$ の unit section を定義する invertible ideal, $\omega = J/J^2$ を C 上の invertible sheaf とすれば、canonical isomorphism $\omega_{\bar{E}/C} \simeq g^*(\omega)$ が存在する。我々は、 $\omega_{X/C}$

と $f^*(\omega)$ を比べる。 $\mathcal{L}$ を X の ramification をはかる一種の Differentie とし,

$$(3.1) \quad \omega_{X/C} = f^*(\omega) \otimes \mathcal{L}$$

とおく。 $\mathcal{L}$ を place s で local に調べる。 d_s を $X(s)$ の components の最大公約数とし, $\mathcal{J}$ を "reduced" fiber $(1/d_s)X(s)$ を定義する $\mathcal{O}_X$ の invertible ideal とする。 $t \in$ place s での parameter とすれば

$$(3.2) \quad \mathcal{J}^{d_s} \simeq t \mathcal{O}_X$$

である。 $\omega_{X/C}$ は generic fiber 上 trivial で, X が相対的に極小なことから, $X(s)$ の各々の component 上 degree 零である。従って, ある整数 m があって,

$$(3.3) \quad \omega_{X/C} \simeq \mathcal{J}^m$$

となる。従って, 一意的に定まる整数 l があって

$$(3.4) \quad \mathcal{L} = \mathcal{J}^{-l}, \quad \omega_{X/C} = f^*\omega \otimes \mathcal{J}^{-l}$$

とかける。故に,

$$(3.5) \quad f_*(\omega_{X/C}) = \omega \otimes \mathcal{O}_C(s)^{[l/d_s]},$$

を得る。ただし, $[l/d_s]$ は, l/d_s の整数部分である。写像

$$(3.6) \quad \text{Lie } u : R^1 f_* (\mathcal{O}_X) \longrightarrow R^1 g_* (\bar{E}) = \omega^\vee$$

の dual map

$$(3.7) \quad \omega \longrightarrow R^1 f_* (\mathcal{O}_X)^\vee$$

を考える。Grothendieck の duality theorem によって,

$$(3.8) \quad R^1 f_* (\mathcal{O}_X)^* = f_* (\omega_{X/C}) = \omega \otimes \mathcal{O}_C(s)^{[l/d_s]}$$

であるから,

$$(3.9) \quad \text{length}(\text{Coker } die \, u) = [l/d_s]$$

となる。定理2を使って 次の系を得る。

系4. $R^1 f_* (\mathcal{O}_X)$ の place s での torsion の長さは, $[l/d_s]$ に等しい。とくに, X が place s で wildly ramified であることと $l \geq d_s$ であることは同値である。

注意.1) もし, X の $H^1(\text{Gal}/k_s, \mathcal{O}_{X_s})$ における位数 d_s が p と互いに素であれば, X は s で tamely ramified である。ただし, d_s が p で割れる場合でも X が tamely ramified になることがある。

2) 定理2, 定理3 は, R が unequal characteristic かつ complete discrete valuation ring であっても成立する。その場合, 定理3の証明に於て, Weil restriction を Greenberg functor に置きかえる必要がある。

3) 以上の研究は, 標数2,3の場合, quasi-elliptic surface に対しても有効である。

References

- [1] B. Mazur & L. Roberts, Local Euler characteristic, Invent. Math., 9 (1970).
- [2] M. Raynaud, Spécialisation du foncteur de Picard, Publ.

I. H. E. S. 38 (1970).

- [3] M. Raynaud, Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, Séminaire Bourbaki 1964/65, no. 286.
- [4] M. Raynaud, Passage au quotient par une relation d'équivalence plate, Proc. of a Conference on Local Fields (Nuffic Summer School), Springer-Verlag, 1967.
- [5] M. Raynaud, Surfaces elliptiques et quasi-elliptiques, (Preprint).