

Some p -adic properties of Siegel-Eisenstein series

近畿大学・総合理工学研究科 菊田 俊幸 (Toshiyuki Kikuta)

Graduate School of Science and Engineering Kinki University

近畿大学・理工学部 長岡 昇勇 (Shoyu Nagaoka)

School of Science and Engineering Kinki University

緒言

一連の論文 [8], [5], [9] において, Serre の p 進 Eisenstein 級数の概念が, 多変数の modular 形式の場合にどのように一般化され, それがどのような性質をもつかを見てきた. その性質の一つに p 進 Siegel-Eisenstein 級数と genus theta 級数の対応がある ([8]). これは, ある種の p 進 Siegel-Eisenstein 級数が level p の genus theta 級数と一致するという「奇妙な」現象である. これにより, ある種の p 進 Siegel-Eisenstein 級数が「通常の」modular 形式になるということが示される. [8] で扱われた場合は, いわゆる「Neben 型」の場合で, この論説では, この現象が「Haupt 型」でも起きることを報告したい. すなわち, discriminant p^2 , level p の quaternary quadratic form に対応する genus theta 級数にちょうど一致するような p 進 Eisenstein 級数が構成されること紹介する.

1 定義と記号

1.1 Siegel modular 形式 $\mathbb{H}_n$ を通常のように, n 次 Siegel 上半空間とすると, n 次 Siegel modular 群 $\Gamma^{(n)} := Sp_n(\mathbb{R}) \cap M_{2n}(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{H}_n$ に不連続的に作用する. $\Gamma^{(n)}$ の合同部分群 Γ' に対して, $M_k(\Gamma')$ で対応する weight が k の Siegel modular 形式のなす空間を表すことにする. 以下で主に扱うのは $\Gamma' = \Gamma^{(n)}$ または $\Gamma_0^{(n)}(N)$ の場合である. ここで

$$\Gamma_0^{(n)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma^{(n)} \mid C \equiv O_n \pmod{N} \right\}$$

である. いずれの場合も $M_k(\Gamma')$ の元 F は次の形の Fourier 展開をもつ:

$$F(Z) = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} a_F(T) \exp[2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(TZ)]$$

ここで Λ_n は

$$\Lambda_n = \mathrm{Sym}_n^*(\mathbb{Z}) := \{T = (t_{ij}) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Q}) \mid t_{ii}, 2t_{ij} \in \mathbb{Z}\}$$

で定義される, いわゆる半整数行列のなす lattice である.

$Z = (z_{ij}) \in \mathbb{H}_n$ に対して, $q_{ij} := \exp(2\pi\sqrt{-1}z_{ij})$ とおくと

$$q^T := \exp[2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(TZ)] = \prod_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij}^{2t_{ij}} \prod_{i=1}^n q_i^{t_{ii}}$$

と書ける. ここで, $q_i = q_{ii}$, $t_i = t_{ii}$ ($i = 1, \dots, n$) である. この記法を使えば, 「一般化された q 展開」

$$F = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} a_F(T) q^T = \sum_{t_i} \left(\sum_{t_{ij}} a_F(T) \prod_{i < j} q_{ij}^{2t_{ij}} \right) \prod_{i=1}^n q_i^{t_i} \\ \in \mathbb{C}[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][q_1, \dots, q_n]$$

が得られる. すなわち, Siegel modular 形式は, 形式的べき級数環 $\mathbb{C}[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][q_1, \dots, q_n]$ の元とみなすことができるわけである.

$\mathbb{C}$ の部分環 R に対して, $M_k(\Gamma')_R$ を

$$M_k(\Gamma')_R := \{F = \sum a_F(T) q^T \in M_k(\Gamma') \mid \forall a_F(T) \in R\}$$

で定義する. もちろん, これは $R[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][q_1, \dots, q_n]$ の R -部分加群と見做すことができる.

1.2 Siegel-Eisenstein 級数 Siegel modular 群 $\Gamma^{(n)}$ の部分群 $\Gamma_\infty^{(n)}$ を

$$\Gamma_\infty^{(n)} := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma^{(n)} \mid C = O_n \right\}$$

で定義する. $k > n+1$ となる偶数 k に対して, 級数

$$E_k^{(n)}(Z) := \sum_{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty^{(n)} \setminus \Gamma^{(n)}} \det(CZ + D)^{-k}, \quad Z \in \mathbb{H}_n$$

を考えると, これは $M_k(\Gamma^{(n)})$ の元を定義し, $\Gamma^{(n)}$ に対する weight が k の Siegel-Eisenstein 級数と呼ばれる. Siegel によって示されたように

$$E_k^{(n)}(Z) \in M_k(\Gamma^{(n)})_{\mathbb{Q}}$$

である.

1.3 genus theta 級数 $0 < S \in \Lambda_m$ に対して

$$\theta^{(n)}(S; Z) = \sum_{X \in M_{m,n}(\mathbb{Z})} \exp[2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(S[X]Z)], \quad Z \in \mathbb{H}_n$$

と定義する. ここで $S[X] := {}^t X S X$ である.

$\{S_1, \dots, S_h\}$ を S を含む genus の unimodular 同値類の完全代表系とする. S に付随する genus theta 級数とは

$$\mathrm{genus}\theta^{(n)}(S)(Z) := \left(\sum_{i=1}^h \frac{\theta^{(n)}(S_i; Z)}{E(S_i)} \right) / \left(\sum_{i=1}^h \frac{1}{E(S_i)} \right)$$

で定義されるものである. ここで $E(S_i)$ は S_i の単数群の位数である.

1.4 p 進 Siegel-Eisenstein 級数

Serre [10] に倣って, Siegel modular 群に対する p 進 Eisenstein 級数を定義する.

$\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ を偶数の増大列とする. Siegel-Eisenstein 級数の列

$$\{E_{k_m}^{(n)}\} \subset \mathbb{Q}[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][q_1, \dots, q_n]$$

が p 進的に $\mathbb{Q}_p[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][q_1, \dots, q_n]$ の元に収束するものとする. このとき, その極限 $\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m}^{(n)}$ を Serre に倣って p 進 Siegel-Eisenstein 級数と呼ぶことにする.

2 主結果

ここでは, p を奇素数とする. $S^{(p)}$ を正定値, 整係数 4 元 2 次形式で, discriminant p^2 , level p なるものとする. すなわち, $S^{(p)} \in \Lambda_4 = \text{Sym}_4^*(\mathbb{Z})$ は次の条件を満たすものである:

$$\det(2S^{(p)}) = p^2, \quad p \cdot (2S^{(p)})^{-1} \in \text{Sym}_4(\mathbb{Z}).$$

主結果は次の通りである:

定理 p を奇素数として, 上記の $S^{(p)}$ を固定する. 自然数列 $\{k_m\}$ を

$$k_m = k_m(p) := 2 + (p-1)p^{m-1},$$

で定義すると, Siegel-Eisenstein 級数の列 $\{E_{k_m}^{(2)}\}$ は, p 進 Siegel-Eisenstein 級数を定義する. さらに等式

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m}^{(2)} = \text{genus} \Theta^{(2)}(S^{(p)})$$

が成立する. とくに, この p 進 Siegel-Eisenstein 級数

$$F_2(p) := \lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m}^{(2)}$$

は, level p , weight 2 の Haupt 型の Siegel modular 形式になっている.

我々の構成した weight が 2 の Siegel modular 形式は, 興味深い性質をもつ. そのひとつが通常の Siegel-Eisenstein 級数との合同関係である. これについて簡単に説明する. Serre は [10] において, 一変数の場合に次の事実を証明した:

Serre の定理. p を奇素数とする. このとき任意の $M_2(\Gamma_0^{(1)}(p))_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ の任意の modular 形式 f に対して $M_{p+1}(\Gamma^{(1)})_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ のある modular 形式 g が存在して

$$f \equiv g \pmod{p}$$

となる. ここで $\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$.

この statement は一般の次数で成立することが予想されている:

予想 p を十分大なる素数とする. $M_2(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ の任意の Siegel modular 形式 F に対して, $M_{p+1}(\Gamma^{(n)})_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ の Siegel modular 形式 G で, 合同式

$$F \equiv G \pmod{p}$$

を満たすものが存在するであろう.

上記「予想」の F として、我々の構成した $F_2(p)$ をとってみる。このとき、次の結果が成立する：

我々の定理の系 p を奇素数として、 $F_2(p)$ を上記定理で構成した Siegel modular 形式とする。すると次の合同式が成立する：

$$F_2(p) \equiv E_{p+1}^{(2)} \pmod{p}.$$

これは、我々の構成した $F_2(p)$ に対して、「予想」が成立していることを示している。

3 主結果の証明の粗筋

主結果の等式

$$F_2(p) := \lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m}^{(2)} = \text{genus}\Theta^{(2)}(S^{(p)})$$

の証明の粗筋を述べる。目標は、 $F_2(p)$ と $\text{genus}\Theta^{(2)}(S^{(p)})$ の q -展開の係数を比較し、その一致を示すことにある。これを詳しく述べる。

$$E_{k_m}^{(2)} = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_2} a_{k_m}(T) q^T$$

を $F_2(p)$ を定義する Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 展開とする。まず、有理数列 $\{a_{k_m}(T)\}$ が任意の $T \in \Lambda_2$ について、 p 進的に $\mathbb{Q}$ の元に収束すること、すなわち

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} a_{k_m}(T) =: \tilde{a}(T) \in \mathbb{Q}$$

を示す。これは、2 次の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式が得られているので、実行可能である。一方、genus theta 級数 $\text{genus}\Theta^{(2)}(S^{(p)})$ の Fourier 展開

$$\text{genus}\Theta(S^{(p)}) = \text{genus}\Theta^{(2)}(S^{(p)}) = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_2} b(T) q^T$$

であるが、よく知られているように「Siegel 公式」により、Fourier 係数 $b(T)$ の計算は、局所密度の計算に帰着する。その局所密度の具体的計算は、Yang [12] の明示公式を用いることにより実行される。以上を総合して、最終的に

$$\tilde{a}(T) = b(T)$$

を示すことが目標となる。

3.1 $\tilde{a}(T)$ の明示公式

2 次の Siegel-Eisenstein 級数 $E_{k_m}^{(2)}$ の Fourier 係数 $a_{k_m}(T)$ は、既知の公式により次のように計算される。

(i) $T \in \Lambda_2$ の rank が 2 のとき：

$$a_{k_m}(T) = \frac{-4k_m \cdot B_{k_m-1, \chi_D(T)}}{B_{k_m} \cdot B_{2k_m-2}} \cdot F_{k_m}(T),$$

$$F_{k_m}(T) = \sum_{0 < d | \epsilon(T)} d^{k_m-1} \sum_{0 < f | \frac{f(T)}{d}} \mu(f) \cdot \chi_D(T)(f) \cdot f^{k_m-2} \cdot \sigma_{2k_m-3} \left(\frac{f(T)}{fd} \right)$$

で与えられる。

記号の説明: B_k は k 番目の Bernoulli 数, 同じく $B_{k,\chi}$ は指標 χ の k 番目の一般 Bernoulli 数, μ は Möbius 関数である. また $0 < T \in \Lambda_2$ に対して,

$$-\det(2T) = D(T) \cdot f(T)^2$$

と表す. ここで $D(T)$ は虚 2 次体

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-\det(2T)})$$

の判別式で $f(T)$ は自然数にとっておく. さらに $\chi_{D(T)}$ をこの体の Kronecker 指標とする. また $O_2 \neq T \in \Lambda_2$ に対して

$$\varepsilon(T) := \max\{l \in \mathbb{N} \mid l^{-1}T \in \Lambda_2\}$$

とおく. また, 通常のように $\sigma_k(n) := \sum_{0 < d \mid n} d^k$ と定義しておく.

(ii) $T \in \Lambda_2$ の rank が 1 のとき: このとき Fourier 係数 $a_{k_m}(T)$ は

$$a_{k_m}(T) = \frac{-2k_m}{B_{k_m}} \sigma_{k_m-1}(\varepsilon(T))$$

で与えられる.

(iii) $a_{k_m}(O_2) = 1$.

以上が T の rank 分けに応じた $a_{k_m}(T)$ の明示公式である. 2 次の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式は様々な形で表現されているが (eg. cf. [3], [6]), 上記のものは, Eichler-Zagier [1] によるものである. 次に, 上記の式の p 進極限を考える. この「 p 進極限をとる」計算でポイントとなるのが, Bernoulli 数, 一般 Bernoulli 数に関する Kummer 合同式である. ここで用いる公式は Fresnel[2] によるものである. これらを総合して次の結果を得る.

命題 1 T を Λ_2 の半正定値な元とする.

(1) rank(T) = 2 のとき

$$\begin{aligned} \tilde{a}(T) &= \frac{-288}{(1-p)^2} (1 - \chi_{D(T)}(p)) B_{1,\chi_{D(T)}} \cdot \tilde{F}(T), \\ \tilde{F}(T) &= \sum_{\substack{0 < d \mid \varepsilon(T) \\ (d,p)=1}} d \sum_{\substack{0 < f \mid \frac{f(T)}{d} \\ (f,p)=1}} \mu(f) \cdot \chi_{D(T)}(f) \cdot \sigma_1^* \left(\frac{f(T)}{fd} \right). \end{aligned}$$

2) rank(T) = 1 のとき

$$\tilde{a}(T) = \frac{24}{p-1} \sigma_1^*(\varepsilon(T)) = \frac{24}{p-1} \sum_{\substack{0 < d \mid \varepsilon(T) \\ (d,p)=1}} d.$$

(3) $\tilde{a}(O_2) = 1$.

3.2 $b(T)$ の明示公式

前述のように $b(T)$ は局所密度によって表示される. 具体的には次の様である:

$$b(T) = \prod_{q \leq \infty} \alpha_q(S^{(p)}, T) = \prod_{q: \text{prime}} \alpha_q(S^{(p)}, T) \cdot \alpha_\infty(S^{(p)}, T).$$

ここで, $\alpha_q(S^{(p)}, T)$ が局所密度と呼ばれるもので, 求めるべき $b(T)$ は, これらの無限積と $\alpha_\infty(S^{(p)}, T)$ の積で表せる. これが Siegel 公式の主張するところである. ここで, これらの定義を与えておく. 一般に $S \in \Lambda_m$ と $T \in \Lambda_n$ に対して, 有限素点に対応する $\alpha_q(S, T)$ (q : 素数) は

$$\alpha_q(S, T) = \lim_{a \rightarrow \infty} q^{a(n(n+1)/2 - mn)} A_{q^a}(S, T),$$

$$A_{q^a}(S, T) = \#\{X \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/q^a\mathbb{Z}) \mid S[X] \equiv T \pmod{q^a\Lambda_n}\}$$

で定義されるものである. また無限素点に対応する $\alpha_\infty(S, T)$ は

$$\alpha_\infty(S, T) = \det(S)^{-\frac{n}{2}} \det(T)^{\frac{m-n-1}{2}} \cdot \gamma_{mn},$$

$$\gamma_{mn} = \frac{\pi^{\frac{mn}{2}}}{2^{n(n-1)/2} \Gamma_n(\frac{m}{2})}, \quad \Gamma_n(s) = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \Gamma(s) \Gamma(s - (1/2)) \cdots \Gamma(s - ((n-1)/2))$$

によって定義される. これらの定義は Siegel ([11], §10, Beispiele), に見られるが, 無限素点に対応する式に現れる γ_{mn} は Siegel によるものと若干異なる. その差異は, $Sym_n(\mathbb{Z})$ の代わりに $Sym_n^*(\mathbb{Z})$ をとっていることに起因している.

以上により, 各局所密度が具体的に計算できれば良いわけであるが, 一般に局所密度を計算することは難しい場合が多い. ここでは, 表現される T の rank が高々 2 であるので, 前に述べたように, Yang[12] による公式が使える. 素点 q が p (我々が p 進極限を考えているその p) と異なる場合は, Kaufhold[3] による古典的な結果であることに注意しておく. 結果は次の通りである.

補題 1 T を Λ_2 の半正定値な元とする.

(1) $\text{rank}(T) = 2$ のとき

$$\alpha_q(S^{(p)}, T) = \begin{cases} \frac{(1 - q^{-2})^2}{1 - \chi_{D(T)}(q)q^{-1}} \sum_{l=0}^{\varepsilon_q} \left(\sum_{m=0}^{f_q-l} q^{-m} - \chi_{D(T)}(q)q^{-1} \sum_{m=0}^{f_q-l-1} q^{-m} \right) & \text{if } q \neq p, \\ \frac{1 - \chi_{D(T)}(p)}{1 - \chi_{D(T)}(p)p^{-1}} \cdot \frac{(p+1)^2}{p^{f_p+2}} & \text{if } q = p, \\ 2^3 \cdot \pi^3 \cdot p^{-2} \cdot |D(T)|^{1/2} \cdot f(T) & \text{if } q = \infty, \end{cases}$$

ここで $\varepsilon_q := \text{ord}_q(\varepsilon(T))$, $f_q := \text{ord}_q(f(T))$.

(2) $\text{rank}(T) = 1$ のとき

$$\alpha_q(S^{(p)}, T) = \begin{cases} (1 - q^{-2}) \sum_{l=0}^{\varepsilon_q} q^{-l} & \text{if } q \neq p, \\ \frac{1+p}{p^{1+\varepsilon_p}} & \text{if } q = p, \\ 2^2 p^{-1} \cdot \varepsilon(T) \pi^2 & \text{if } q = \infty. \end{cases}$$

以上が局所密度と $\alpha_\infty(S^{(p)}, T)$ の具体的な式である.

これらの積をとることにより, 目標の $b(T)$ の明示公式が得られる.

命題 2 T を Λ_2 の半正定値な元とする.

(1) $\text{rank}(T) = 2$ のとき

$$b(T) = \frac{-288}{(p-1)^2} (1 - \chi_{D(T)}(p)) B_{1, \chi_{D(T)}} \cdot f_*(T) \prod_{\substack{q: \text{ prime} \\ q \neq p}} G_q(T),$$

$$G_q(T) = \sum_{l=0}^{\varepsilon_q} \left(\sum_{m=0}^{f_q-l} q^{-m} - \chi_{D(T)}(q) q^{-1} \sum_{m=0}^{f_q-l-1} q^{-m} \right),$$

ここで $f_*(T) := f(T)/p^{f_p}$.

(2) $\text{rank}(T) = 1$ のとき

$$b(T) = \frac{24}{p-1} \sigma_1^*(\varepsilon(T)).$$

(3) $b(O_2) = 1$.

3.3 $\tilde{a}(T)$ と $b(T)$ の一致

命題 1 と命題 2 を比較すると, $\text{rank}(T) \leq 1$ なる T については, 目標の等式 $\tilde{a}(T) = b(T)$ が成立することは明らかである. $\text{rank}(T) = 2$ については, 次の補題の成立により, $\tilde{a}(T) = b(T)$ が示される.

補題 2 $\tilde{F}(T)$ と $G_q(T)$ をそれぞれ命題 1, (1) と命題 2, (1) で与えられたものとする. すなわち

$$\tilde{F}(T) = \sum_{\substack{0 < d | \varepsilon(T) \\ (d, p) = 1}} d \sum_{\substack{0 < f | \frac{f(T)}{d} \\ (f, p) = 1}} \mu(f) \cdot \chi_{D(T)}(f) \cdot \sigma_1^* \left(\frac{f(T)}{fd} \right),$$

$$G_q(T) = \sum_{l=0}^{\varepsilon_q} \left(\sum_{m=0}^{f_q-l} q^{-m} - \chi_{D(T)}(q) q^{-1} \sum_{m=0}^{f_q-l-1} q^{-m} \right)$$

とすると, 等式

$$\tilde{F}(T) = f_*(T) \prod_{q \neq p} G_q(T)$$

が成立する.

この等式は, 両辺の local factor が一致することを確認することにより証明される.

以上により, 半正定値な任意の $T \in \Lambda_2$ について

$$\tilde{a}(T) = b(T)$$

が示されたことになり, 主結果の証明が完結する.

4 注意

我々の主結果に関連して、いくつかの注意を与える。

一般化その1 我々は

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m}^{(2)} = \text{genus} \Theta^{(2)}(S^{(p)}).$$

を示したが、もちろん一般的な等式

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m}^{(n)} = \text{genus} \Theta^{(n)}(S^{(p)}).$$

の成立が期待される。実際、 $n = 3$ の場合、成立を裏付ける数値例が得られている。なお、この一般等式を示すには、 $n \leq 4$ の場合に証明すれば十分である（特異 modular 形式の理論）。

一般化その2 この論説では、 p 進極限をとる際の、数列 $\{k_m\}$ を

$$k_m = 2 + (p-1)p^{m-1}$$

として定義したが、これを

$$k_m = k + (p-1)p^{m-1}, \quad k : \text{even} \geq 2$$

と定義しなおし、

$$F_k^{(2)}(p) := \lim_{m \rightarrow \infty} E_{k+(p-1)p^{m-1}}^{(2)}$$

を考えると、この $F_k^{(2)}(p)$ が modular 形式なること、すなわち $F_k^{(2)}(p) \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(p))$ が示されている (cf. Mizuno[7])。

Neben 型の場合との比較 2 節において、Serre の定理の拡張である「予想」を述べ、我々の構成した modular 形式については予想が成立することを見たが、この予想の成立を支持するもう一つの例を紹介する。論文 [8] において、 $p > 3, p \equiv 3 \pmod{4}$ なる素数 p に対して

$$F_1(p) := \lim_{m \rightarrow \infty} E_{1+\frac{p-1}{2}p^{m-1}}^{(n)}$$

の形の p 進 Siegel-Eisenstein 級数を構成し、これが、weight 1, level p , $\chi_p = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ を指標にもつ Neben 型の modular 形式となることを見た。 χ_p は 2 次指標だから、この平方 $(F_1(p))^2$ をとると、これは weight が 2, level p の modular 形式となる。すなわち $(F_1(p))^2 \in M_2(\Gamma_0^{(n)}(p))$ となるが、さらに合同式

$$(F_1(p))^2 \equiv \left(E_{\frac{p+1}{2}}^{(n)}\right)^2 \pmod{p}$$

を示すことができる。これは「予想」の成立を支持する、もう一つの例を与えている。

weight 2 の modular 形式 Hecke は $\Gamma_0(p)$ 上の weight 2 の Eisenstein 級数の一つとして

$$G_2(p) = \frac{p-1}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1^*(n)q^n$$

を挙げている (全集 817 頁, Satz 11). もちろん, $G_2(p) \in M_2(\Gamma_0^{(1)}(p))$ である. これを正規化して,

$$E_2(p) := \frac{24}{p-1} \cdot G_2(p) = 1 + \frac{24}{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1^*(n) q^n$$

とする. 我々の構成した $F_2(p) \in M_2(\Gamma_0^{(2)}(p))$ の Fourier 展開を命題 1, 2 に従って書き表すと

$$F_2(p) = 1 + \frac{24}{p-1} \sum_{T: \text{rank}(T)=1} \sigma_1^*(\varepsilon(T)) q^T + \frac{288}{(p-1)^2} \sum_{T: \text{rank}(T)=2} A(T) q^T$$

$$A(T) = -(1 - \chi_{D(T)}(p)) B_{1, \chi_{D(T)}} \cdot \tilde{F}(T)$$

と書ける. ここで $\tilde{F}(T)$ は命題 1 で与えられたものである. 上記一変数の場合と比較して, 我々の構成した $F_2(p)$ は, Hecke の Eisenstein 級数 $E_2(p)$ の多変数版を与えているとみることができる.

References

- [1] M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms*, Progress in Math. **55**, Birkhäuser, 1985.
- [2] J. Fresnel, *Nombres de Bernoulli et fonction L p-adiques*, Ann. Inst. Fourier **17**(1967), 281-333.
- [3] G. Kaufhold, *Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktionen 2. Grades*, Math. Ann. **137**(1959), 454-476.
- [4] H. Katsurada, *An explicit formula for Siegel series*, Amer. J. Math. **121**(1999), 415-452.
- [5] H. Katsurada and S. Nagaoka, *On some p-adic properties of Siegel-Eisenstein series*, J. Number Theory **104**(2004), 100-117.
- [6] H. Maass, *Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades*, Mat. Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **38**, Nr. 14(1972).
- [7] Y. Mizuno, *p-adic Siegel-Eisenstein series (Haupttypus case)*, preprint 2007.
- [8] S. Nagaoka, *On Serre's example of p-adic Eisenstein series*, Math. Z. **235**(2000), 227-250.
- [9] S. Nagaoka, *On p-adic Hermitian Eisenstein series*, Proc. Amer. Math. Soc. **134**(2006), 2533-2540.
- [10] J.-P. Serre, *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques*, Modular functions of one variable III, Lec. Notes in Math. **350**, Springer Verlag, 1973.

- [11] C.L. Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen*, Ann. Math. **36**(1935), 527-606.
- [12] T. Yang, *An explicit formula for local densities of quadratic forms*, J. Number Theory **72**(1998), 309-359.