

サドル・センターを有するハミルトン系における 可積分性へのガロアの障壁, メルニコフ関数および アーノルド拡散型現象

岐阜大工学部 矢ヶ崎一幸 (Kazuyuki Yagasaki)

1. はじめに

メルニコフの方法 [7, 21] は, 周期軌道の安定多様体と不安定多様体が横断的に交差し, カオス現象が起こる条件を求めるための擾動的な方法である. 最近, この方法はサドル・センターを有する, 必ずしも近可積分とならないハミルトン系に対して拡張され, サドル・センター近傍の周期軌道あるいは準周期軌道に対するホモクリニック軌道あるいはヘテロクリニック軌道が存在する条件を解析的に求めるための手法が提案されている [23, 25, 26]. さらに, このような軌道が存在するとき, 系は非可積分となり, 3 以上の多自由度系の場合には, アーノルド拡散 [2, 10] と類似の現象が起こることも示されている [25, 26].

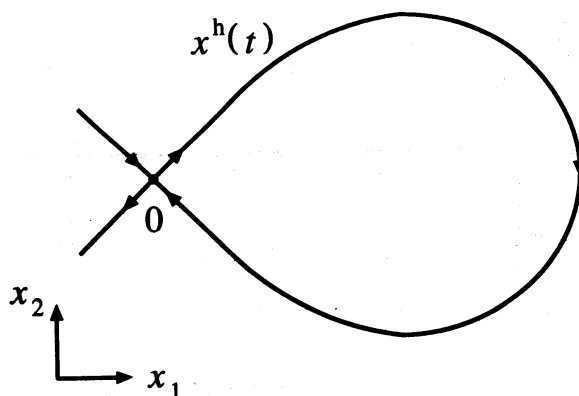
一方, Morales-Ruiz と Ramis [12, 15] は, 微分ガロア理論 [9, 19, 20] を用いて, Ziglin [30] の結果を発展させ, 一般的に直交変分方程式の可積分性がもとのハミルトン系の可積分性に大きく関係のあることを示した. 彼らの方法は強力であり, さまざまな問題に適用されている (文献 [12, 13] やそこで引用されている文献を参照せよ). また, ポテンシャルをもち, サドル・センターを有する 2 自由度系において, サドル・センター近傍の (リアプノフ) 周期軌道に対するセパトリクス分離との関連も調べられている [14].

本報告では, サドル・センターを有する多自由度ハミルトン系のあるクラスを取りあげ, これらの理論結果を概括する. 特に, 2 自由度系の場合においてカオスに対するメルニコフ判定条件と可積分性に対するガロアの障壁についての理論結果が等価であることを示す. また, 具体例に対してアーノルド拡散型現象の数値計算結果を与える.

2. 問題と仮定

次の形の $n+1$ 自由度ハミルトン系 ($n \geq 1$) を考える.

$$\dot{x} = J_1 D_x H(x, y), \quad \dot{y} = J_n D_y H(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n} \quad (1)$$

図 1. x 平面上の軌道

ここで, J_m は, id^m を m 次単位行列として, $2m$ 次シンプレクティック行列

$$J_m = \begin{pmatrix} 0 & \text{id}^m \\ -\text{id}^m & 0 \end{pmatrix},$$

であり, ハミルトン関数 $H: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は解析的であるものとする. 一般に, 式 (1) は近可積分系とはならない. 以下のことを仮定する.

(A1) 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$D_x H(0, 0) = D_y H(x, 0) = 0.$$

仮定 (A1) は原点 $(x, y) = (0, 0) (= O)$ が式 (1) の平衡点であり, x -平面, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n} \mid y = 0\}$, が式 (1) の流れのもとで不変であることを意味する. x -平面に制限された系

$$\dot{x} = JD_x H(x, 0) \quad (2)$$

は平衡点 $x = 0$ を有する. さらに, 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $D_x^j D_y H(x, 0) = 0, j = 1, 2, \dots$, となる.

(A2) 行列 $JD_x^2 H(0, 0)$ は 1 組の実固有値 $\pm \lambda$ ($\lambda > 0$) を有し, 式 (2) の平衡点 $x = 0$ は双曲的なサドルとなる. さらに, $x = 0$ に対するホモクリニック軌道 $x^h(t)$ が存在する (図 1 を参照せよ).

(A3) 行列 $JD_y^2 H(0, 0)$ は n 組の純虚固有値 $\pm i\omega$ を有する. さらに, $n \geq 2$ の場合, $1 \leq |k| = \sum_{j=1}^n |k_j| \leq 4$ を満足する $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, n$, に対して

$$k \cdot \omega = k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n \neq 0$$

が成立する. ここで, $\cdot$ はベクトルの内積を表し, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ である.

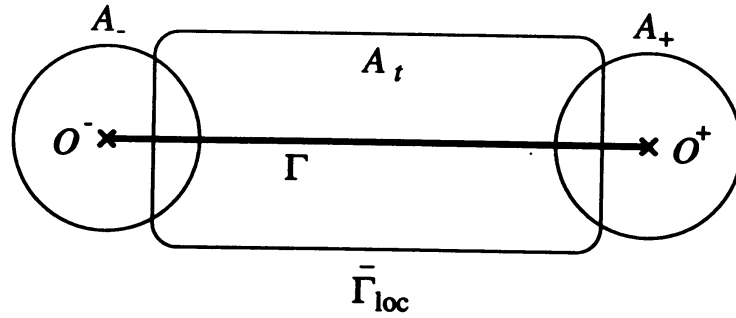


図 2. リーマン面 $\bar{\Gamma}_{\text{loc}}$ におけるチャート $A_{\pm}$ と A_t

(A4) $f(x, y) = JD_x H(x, y)$ として

$$p(x, \eta) = \frac{1}{2} D_y^2 f(x, 0)(\eta, \eta) \neq 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^{2n}$$

を満足する.

仮定 (A2) と (A3) により, 平衡点 O はサドル・センターであり, ホモクリニック軌道 $(x, y) = (x^h(t), 0)$ を有する. そのホモクリニック軌道 $(x, y) = (x^h(t), 0)$ に沿った直交変分方程式 $(x, y) = (x^h(t), 0)$ は次のようになる.

$$\dot{\eta} = JD_y^2 H(x^h(t), 0)\eta \quad (3)$$

仮定 (A4) は簡単化のため採用されている. この仮定が成立しない場合に対してもいくつかのものについては同様な結果が得られる [12, 13, 23].

3. 可積分性へのガロアの障壁とメルニコフ関数

3.1. 可積分性へのガロアの障壁

$n = 1$ とし, 2 自由度ハミルトン系の場合を考える. 実解析的なハミルトン系 (1) を (複素時間を有する) 複素解析的なハミルトン系の実領域に制限された系と見なす. $\Gamma_0 = \{(x, y) = (x^h(t), 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{O\}$ とおく. 複素空間 $\mathbb{C}^4$ における曲線 Γ_0 はホモクリニック軌道とサドル・センター O からなり, 点 O において特異性を有する. 曲線 Γ_0 の特異性を除去するために, 点 O に対応し, 時間によるパラメータ化では $t = +\infty$ と $t = -\infty$ と表される 2 点 O^+ , O^- を導入する. 両端が O^+ , O^- であるその非特異な曲線 Γ によって定義される抽象リーマン面を $\bar{\Gamma}$ と表す.

Γ を含み, 直交変分方程式の特異点が $O^{\pm}$ のみとなるような十分に狭い領域 $\bar{\Gamma}_{\text{loc}}$ をリーマン面上に選ぶ. リーマン面 $\bar{\Gamma}_{\text{loc}}$ に対して, 座標 $z = e^{\mp \lambda t}$ をもつ $O^{\pm}$ 近傍のチャート $A_{\pm}$ および, 座標 t をもち, それらと交差するチャート A_t の 3 個のチャートを用いる (図 2

を参照せよ). このとき, 直交変分方程式は, チャート A_t では元のものと同じであり, チャート $A_{\pm}$ では

$$\frac{d\eta}{dz} = \mp \frac{1}{\lambda z} J D_y^2 H(x^h(\mp \lambda^{-1} \log z), 0) \eta \quad (4)$$

となる. Moser [16] の結果を用いると, 次のことを証明するのは容易である [28].

補題 3.1. 点 $z = 0$ は式 (4) の確定特異点である.

このように, $\bar{\Gamma}_{\text{loc}}$ における直交変分方程式は確定特異点のみを有し, フックス型となる. 特に, $\bar{\Gamma}_{\text{loc}}$ に制限された直交変分方程式の係数は有理形である.

K_{loc} を $\bar{\Gamma}_{\text{loc}}$ 上の有理形関数の微分体とする. ここで, 微分体とは, (ライプニッツ則を満たす加法的写像である) 微分を有する体のことで, K_{loc} の微分として非自明な有理形接ベクトルを取る. $\bar{\eta}_1(t), \bar{\eta}_2(t)$ を直交変分方程式の独立な基本解とする. 係数が K_{loc} の元であるような, $\bar{\eta}_1(t)$ と $\bar{\eta}_2$ の有理関数からなる体 $L_{\text{loc}} = K_{\text{loc}}(\bar{\eta}_1(t), \bar{\eta}_2(t))$ を直交変分方程式のピカル・ヴェシオ拡大と呼ぶ. ピカル・ヴェシオ拡大 L_{loc} はまた K_{loc} と同じ微分をもつ微分体である. K_{loc} の任意の元が不変であるような, L_{loc} のすべての微分自己同形全体からなる群を直交変分方程式のガロア群 G_{loc} という.

ピカル・ヴェシオ理論, すなわち, 線形微分方程式に対する微分ガロア理論の基本的な結果のひとつは, 線形微分方程式が可積分であるための必要十分条件がそのガロア群の単位元成分が可解であるということである. ここで, 線形微分方程式の可積分性は, その一般解がその係数を含む微分体の元の積分, 積分の指数関数および代数関数の組み合わせによって与えられるということを意味する. 微分ガロア理論の詳細については文献 [9, 19, 20] を参照せよ. Morales-Ruiz と Ramis [12, 15] はもしハミルトン系がある積分曲線の近傍で可積分ならば, 関連した直交変分方程式に対するガロア群の単位元成分は可換 (アーベル的) であることを一般的に証明した. 可換群は可解であることに注意せよ. その一般的な理論を適用することにより, 直ちに次の結果が得られる.

定理 3.2. Γ_0 の近傍で H と独立な, 系 (1) の有理形の第 1 積分 f が存在するものとする. このとき, ガロア群の単位元成分 $(G_{\text{loc}})^0$ は可換である.

ここで, 文献 [14] で述べられているように, より大きな係数の体を採用すればより小さなガロア群が得られる [12, 20] ので, $\bar{\Gamma}$ 上ではなく, $\bar{\Gamma}_{\text{loc}}$ 上の有理形関数の体を考えることで十分となる.

$\bar{\Gamma}_{\text{loc}}$ における直交変分方程式はフックス型であるため, そのガロア群はザリスキ位相 [12, 20] においてモノドロミー群の閉包となる. ここで, (多項式環 $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ のある部分集合 S が存在して $Z = \{c \in \mathbb{C}^n \mid \forall f \in S, f(c) = 0\}$ と表される) 代数的集合 $Z \subset \mathbb{C}^n$ はザリスキ閉集合と呼ばれ, ザリスキ位相はザリスキ閉集合によって定義される位相のこ

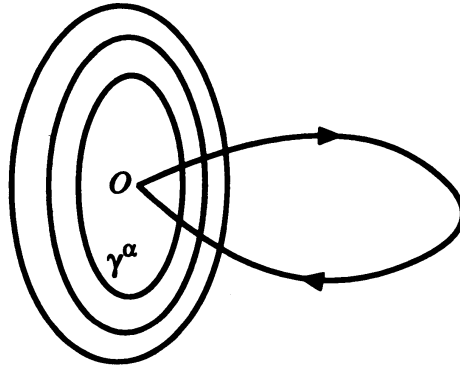


図 3. サドル・センター O に対するホモクリニック軌道と点 O の近傍のリアプノフ周期軌道 γ^α

とをいう. そのモノドロミー群は, 特異点 $O^\pm$ のまわりのモノドロミー行列 $m_\pm$ から生成される.

γ を $\bar{\Gamma}_{\text{loc}}$ 上で Γ を囲む単純閉曲線とし, m_γ を直交変分方程式の対応するモノドロミー行列とする. このとき, $m_\gamma = m_+ m_-$ となる. 文献 [12, 14] で与えられた議論を用いることによって, 次の結果を証明することができる.

命題 3.3. ガロア群の単位元成分 $(G_{\text{loc}})^0$ が可換であるための必要十分条件はモノドロミー行列 m_γ が単位行列に等しいことである.

よって, もし, ハミルトン系 (1) の Γ_0 の近傍で H と独立な有理形の第 1 積分 f が存在するならば, $m_\gamma = \text{id}^2$ となる.

3.2. メルニコフの方法

次に, 式 (1) に対するメルニコフの方法 [23] について述べる. まず, リアプノフの中心定理 [1, 11] により, α_0 をある正数として, 点 O の近傍に, $\alpha \rightarrow 0$ のとき点 O に近づき, 周期が $2\pi/\omega$ に収束する周期軌道の 1 パラメータ族, γ^α , $\alpha \in (0, \alpha_0]$ が存在する (図 3 を参照せよ). $\gamma^0 = O$, $H_\alpha = H(\gamma^\alpha)$ とおく. 一般性を失うことなしに, $H_0 = H(0, 0) = 0$, $\alpha = 0$ の近傍で $dH_\alpha/d\alpha > 0$ と仮定することができる.

$\Psi(t)$ を直交変分方程式 (3) の基本行列, $\Phi(t)$ を, $\Phi(0) = \text{id}^2$ を満たす, サドル・センター O まわりの y 方向の変分方程式

$$\dot{\eta} = JD_y^2 H(0, 0)\eta \quad (5)$$

の基本行列とする. 線形微分方程式の漸近挙動についての基本的な結果 [3] により, 極限

$$B_\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi(-t)\Psi(t) \quad (6)$$

が存在する（文献[23]の補題3.1を参照せよ）． $B_0 = B_+ B_-^{-1}$ とおく．さらに， $\eta \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$q(\eta) = \frac{1}{2} D_y^2 H(0, 0)(\eta, \eta)$$

とする．メルニコフ関数 $M(t_0)$ を次のように定義する．

$$M(t_0) = q(e_1) - q(B_0 \Phi(t_0) e_1) \quad (7)$$

ここで， T を転置演算として $e_1 = (1, 0)^T$ である．このとき，次の結果が証明される（証明については文献[23]を参照せよ）．

定理 3.4. メルニコフ関数 $M(t_0)$ が単純な零点を有する，すなわち，ある $t_0 = \bar{t}_0$ に対して

$$M(\bar{t}_0) = 0, \quad \frac{d}{dt_0} M(\bar{t}_0) \neq 0 \quad (8)$$

となるものと仮定する．このとき，十分小さな $\alpha > 0$ に対して，エネルギー面 $H = H_\alpha$ 上で周期軌道 γ^α に対する横断的なホモクリニック軌道が存在し，その上のダイナミクスがスメールの馬蹄写像と同相となる不変集合が存在する．

馬蹄写像の存在はまたハミルトン関数 H と独立な解析的な第1積分が存在しないことを意味する[17]．

3.3. 主要な結果

$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi$ は長さ 2π の円周を表し， Q をヤコビ行列 $JD_y^2 H(0, 0)$ を次のように対角化する2次正方行列とする．

$$Q^{-1} JD_y^2 H(0, 0) Q = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}$$

初等的な計算からメルニコフ関数 $M(t_0)$ についての次の2つの事実が示される[28]．

補題 3.5. メルニコフ関数 $M(t_0)$ が恒等的に零であるための必要十分条件は

$$Q^{-1} B_0 Q = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (9)$$

となるような $\theta \in \mathbb{S}^1$ が存在することである．

補題 3.6. $M(\bar{t}_0) = 0$ となるような $\bar{t}_0 \in \mathbb{R}$ がつねに存在する．

$\gamma_\pm$ を中心が $O_\pm$ の反時計まわりの小さな円弧とし， γ_t を O^- から O^+ までの線分とする．命題3.3の閉曲線 γ を $\gamma = \gamma_t \gamma_+ \gamma_t^{-1} \gamma_-$ とする（図4を参照せよ）．補題3.5を用いる

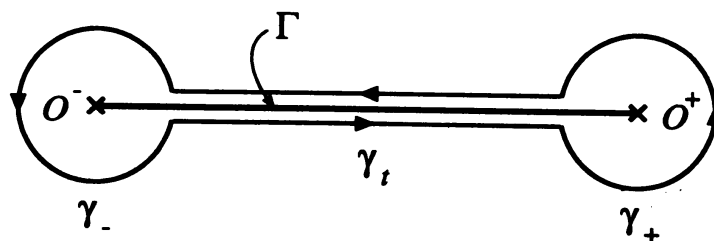


図 4. 閉曲線 $\gamma = \gamma_t \gamma_+ \gamma_t^{-1} \gamma_-$.

ことにより次のことが示される [28]

命題 3.7. 閉曲線 γ に沿った $\bar{\Gamma}_{\text{loc}}$ 上の直交変分方程式に対するモノドロミー行列 m_γ は単位行列に等しくなるための必要十分条件は $M(t_0) \equiv 0$ となることである.

命題 3.3 と 3.7 からガロア群の単位元成分 $(G_{\text{loc}})^0$ が可換であるための必要十分条件はメルニコフ関数 $M(t_0)$ が恒等的に零となることであることがわかる. さらに, 補題 3.6 を用いて, メルニコフ関数 $M(t_0)$ が恒等的に零でなければ, 単純な零点を有することも示される [28]. したがって, 次の結果が得られる.

定理 3.8. ハミルトン系 (1) に対して次の条件は等価である.

- (i) $\bar{\Gamma}_{\text{loc}}$ における直交変分方程式のガロア群の単位元成分 $(G_{\text{loc}})^0$ は可換でない.
- (ii) メルニコフ関数 $M(t_0)$ は単純な零点を有する.

さらに, これらの条件が満たされるならば, Γ_0 の近傍で H と独立な有理形の第 1 積分は存在せず, サドル・センター O 近傍の周期軌道 γ^α に対する横断的なホモクリニック軌道が存在し, その上のダイナミクスがスメールの馬蹄写像と同相となる不変集合が存在する.

4. メルニコフの方法とアーノルド拡散型現象

4.1. 理論

$n \geq 2$ の場合を考える. 仮定 (A2) から, サドル・センター O の近傍において適当な正準変換 $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow (s, u, I, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ が存在し, ハミルトン関数は次の Graff [6] の標準形に変換される.

$$H(s, u, I, \psi) = \lambda su + \omega \cdot I + \frac{1}{2}(AI \cdot I) + g(s, u, I, \psi)$$

ここで, A はある n 次正方行列, g は s, u および I に対して 2 次よりも高次の微小項のみを含む, (x 平面に対応する) $I \neq 0$ において解析的な関数である. 次のことを仮定する.

(A5) 行列 A は正則である.

このとき, Fenichel [4, 5] の不変多様体の理論 (また [22] を参照せよ) および KAM 理論 [1, 18] によって, 中心多様体 $W^c(O)$ 上サドルセンター O の近傍で, ディオファントス条件

$$k \cdot \nu > c|k|^{-\tau}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad k \neq 0 \quad (10)$$

を満足する, ω に近い振動数 ν の準周期軌道からなる不変トーラス $\mathcal{L}_\nu$ のコントロール集合が存在する. ここで, $c > 0$ および $\tau > n - 1$ は定数, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ である.

原点 O のまわりの y 方向の変分方程式 (5) の基本行列は, Φ を各引数に対して周期 2π で周期的で, $\Phi(0, \dots, 0) = \text{id}^{2n}$ を満たすある関数として, $\Phi(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)$ と表すことができる. $n = 1$ の場合と同様に, 極限

$$B_\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi(-\omega t) \Psi(t) \quad (11)$$

が存在し, $B_0 = B_+ B_-^{-1}$ とおく. e_j を, 行列 $J_n D_y^2 H(0, 0)$ の固有値 $\pm i\omega_j$ に対する固有ベクトルが張る固有空間に属するある実 $2n$ 次元ベクトルとし, $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n (= \prod_{j=1}^n (0, \infty))$ に対して

$$\bar{\eta}_r = \sum_{j=1}^n r_j e_j$$

とする. さらに, $\eta \in \mathbb{R}^{2n}$ に対して

$$q(\eta) = \frac{1}{2} D_y^2 H(0, 0)(\eta, \eta)$$

とおく. 次式によって, メルニコフ関数 $M(\theta; r)$ を定義する.

$$M(\theta; r) = q_0(\bar{\eta}_r) - q_0(B_0 \Phi(\theta) \bar{\eta}_r) \quad (12)$$

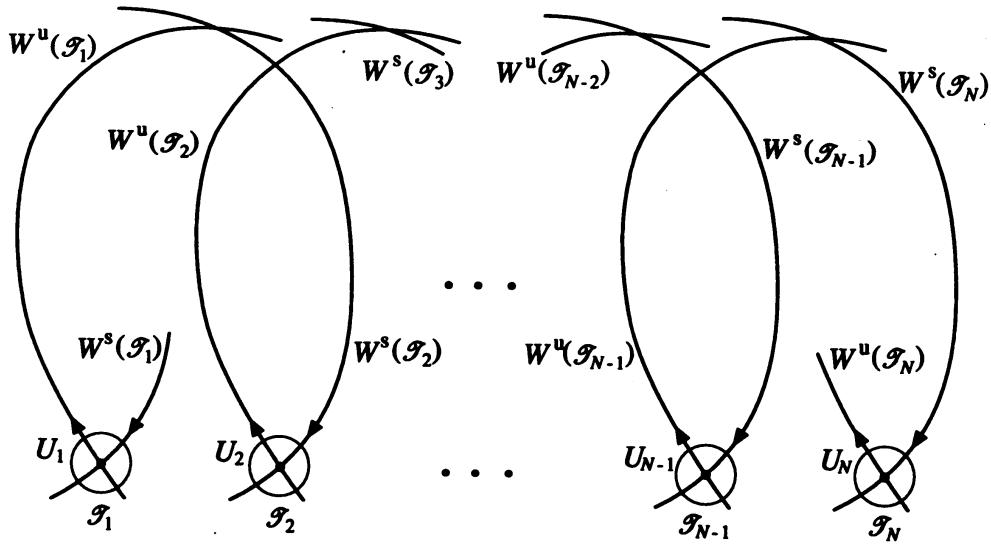


図 5. 不変トーラスの遷移チェーン: U_j , $j = 1, \dots, N$, は不変トーラス $\mathcal{T}_j$ の近傍を表している.

次の結果を証明することができる [26].

定理 4.1. (i) ある点 $(\theta, r) = (\theta_0, r_0) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}_+^n$ が存在して,

$$M(\theta_0; r_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_j} M(\theta_0; r_0) \neq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (13)$$

となるものと仮定する. このとき, サドル・センター O の近傍に, それぞれ, ω に近くディオファントス条件 (10) を満足する, 振動数 ν^1 および ν^2 の準周期軌道からなる不変トーラス $\mathcal{T}_{\nu^1}$ および $\mathcal{T}_{\nu^2}$ が存在し, $\mathcal{T}_{\nu^1}$ の不安定多様体 $W^u(\mathcal{T}_{\nu^1})$ と $\mathcal{T}_{\nu^2}$ の安定多様体 $W^s(\mathcal{T}_{\nu^2})$ はレベル集合上で横断的に交差する. さらに, ある $\tilde{\theta}_0 \in \mathbb{T}^n$ に対して $\Phi(\tilde{\theta}_0)\tilde{\eta}_r = B_0\Phi(\theta_0)\tilde{\eta}_r$ となるならば, $\nu^1 = \nu^2 (= \nu)$ とすることができる, すなわち, 不変トーラス $\mathcal{T}_\nu$ に対する横断的なホモクリニック軌道が存在する.

(ii) $N-1$ 個の点 $\theta^j \in \mathbb{T}^n$, $j = 1, \dots, N-1$, と N 個の点 $r^j \in \mathbb{R}_+^n$, $j = 1, \dots, N$, が存在し, 条件 (13) が $(\theta_0, r_0) = (\theta^j, r^j)$, $j = 1, \dots, N-1$, において成立し, さらに, ある $\tilde{\theta}^j \in \mathbb{T}^n$ に対して $\Phi(\tilde{\theta}^j)\tilde{\eta}_{r^{j+1}} = B_0\Phi(\theta^j)\tilde{\eta}_{r^j}$, $j = 1, \dots, N-1$, となるものとする. このとき, サドル・センター O の近傍に, それぞれ, ω に近くディオファントス条件 (10) を満足する, 振動数 ν^j の準周期軌道からなる N 個の不変トーラス $\mathcal{T}_{\nu^j}$, $j = 1, \dots, N$, が存在し, $W^u(\mathcal{T}_{\nu^j})$ と $W^s(\mathcal{T}_{\nu^{j+1}})$, $N = 1, \dots, N-1$, はレベル集合上で横断的に交差する. このような性質をもつ不変トーラスの列は遷移チェーンと呼ばれる.

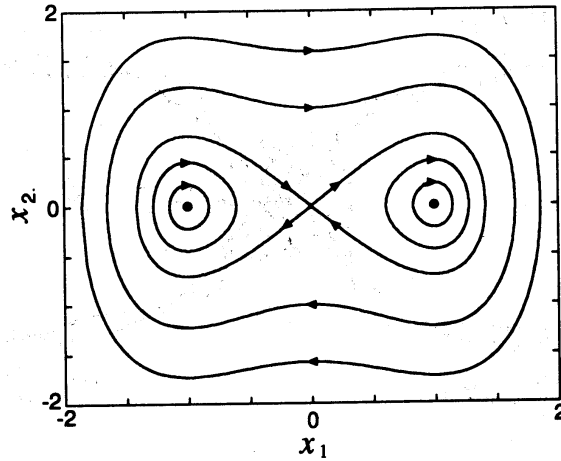


図 6. 系 (15) の相平面軌跡

4.2. 具体例

例として, 次の 3 自由度ハミルトン系を考える.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - (x_1^2 + \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2)x_1, \quad (14)$$

$$\dot{y}_j = y_{j+2}, \quad \dot{y}_{j+2} = -\omega_j^2 y_j - \beta_j(x_1^2 + \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2)y_j, \quad j = 1, 2$$

ここで, β_j , $j = 1, 2$, は正の定数であり, ハミルトン関数は

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(-x_1^2 + \omega_1^2 y_1^2 + \omega_2^2 y_2^2) + \frac{1}{4}(x_1^2 + \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2)^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_3^2 + y_4^2),$$

で与えられる. 式 (14) の特別な場合は減衰力の作用しない座屈した棒 (はり) の厳密な 3 自由度モード方程式を表す [24].

式 (14) の不変な x 平面に制限された系は

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3, \quad (15)$$

となり, 図 6 の相平面軌跡を有する. 特に, x 平面の原点 $x = 0$ は 1 対のホモクリニック軌道

$$x_{\pm}^h(t) = \left(\pm \sqrt{\frac{2}{\beta_0}} \operatorname{sech} t, \mp \sqrt{\frac{2}{\beta_0}} \operatorname{sech} t \tanh t \right)$$

を有する双曲型サドルとなる. また, y 超平面はサドル・センター O の 4 次元中心多様体となり, 式 (14) の y 超平面に制限された系は

$$\dot{y}_j = y_{j+2}, \quad \dot{y}_{j+2} = -\omega_j^2 y_j - \beta_j(\beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2)y_j, \quad j = 1, 2. \quad (16)$$

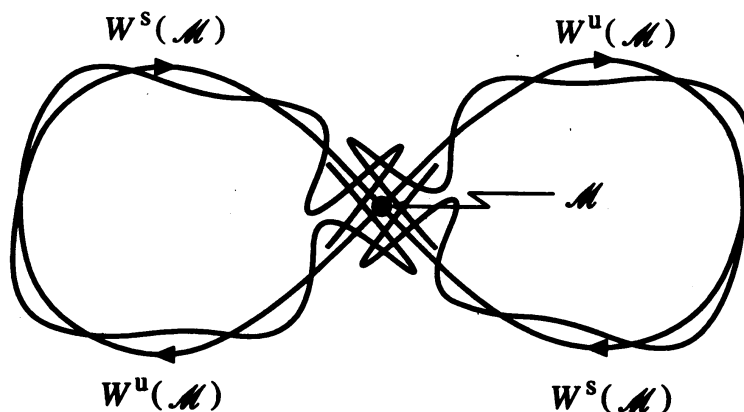


図 7. 安定多様体と不安定多様体の異なった分枝の横断的交差

で与えられる．ここで，3 節で述べたものと同様な方法により，式 (16) の非可積分性を証明することができる [29]．このように，仮定 (A1) と (A2)，(A4) は成立し，また，仮定 (A5) も満足することが示される [27]．さらに，仮定 (A3) が成立するものとする．

ガウスの超幾何関数を用いた長い計算から， $j = 1$ および 2 に対して， j' を任意の自然数として

$$\beta_j \neq \frac{1}{2}j'(j' + 1),$$

すなわち

$$\beta_j \neq 1, 3, 6, 10, 15, \dots \quad (17)$$

ならば，定理 4.1 の条件が満たすことが示される [24, 26]．よって，条件 (17) が成りたつとき，サドル・センター O 近傍の不変トーラスに対する横断的なホモクリニックおよびヘテロクリニック軌道が存在し，アーノルド拡散型の挙動が起こることになる．また，図 7 のように，安定多様体と不安定多様体の異なった分枝が横断的に交差する可能性があるため，状況はさらに複雑になる．

最後に， $\omega_1 = 1$ ， $\omega_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$ (黄金比)， $\beta_1 = 0.5$ ， $\beta_2 = 1.5$ ， $H = 0.01$ の場合に対する数値計算の結果を与える．ここで，“DOP853” [8] と呼ばれるフォートラン・コードを用いた．このコードは 8 次の陽なルンゲ-クッタ法に基づいており，3 次の修正項をもつ 5 次の誤差評価が採用されている．誤差の許容値を 10^{-8} として精度の高い計算を行い，実際，ハミルトン関数の変化は $t \sim 10^6$ の長い軌道に対しても高々 10^{-9} % 程度であった．また，5 次元超平面 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \mid y_2 = 0, y_4 > 0\}$ をポアンカレ断面とした．軌道がそのポアンカレ断面と交差する点を求めるために， $y_2(t_{n-1}) < 0$ かつ $y_2(t_n) \geq 0$ となる区間 $[t_{n-1}, t_n]$ を探索し，その区間に対して $|y_2| < 10^{-8}$ の精度ではさみうち法を用いた．

図 8 に，センター方向の y 超平面 に制限されたポアンカレ写像の軌道を示す．図からも推測されるように，計算されたすべての軌道は不変なトーラスを構成するように見え

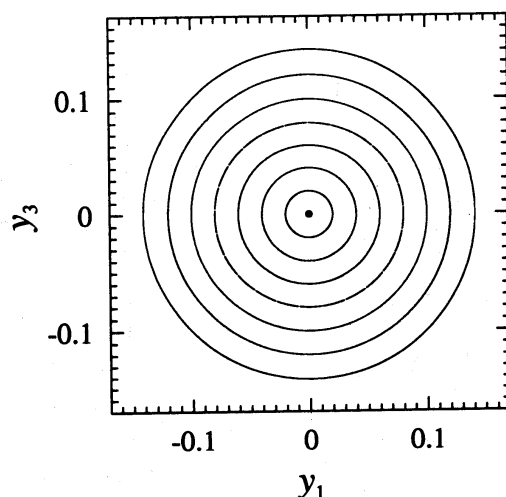


図 8. y 超平面に制限された式 (14) のポアンカレ写像の軌道

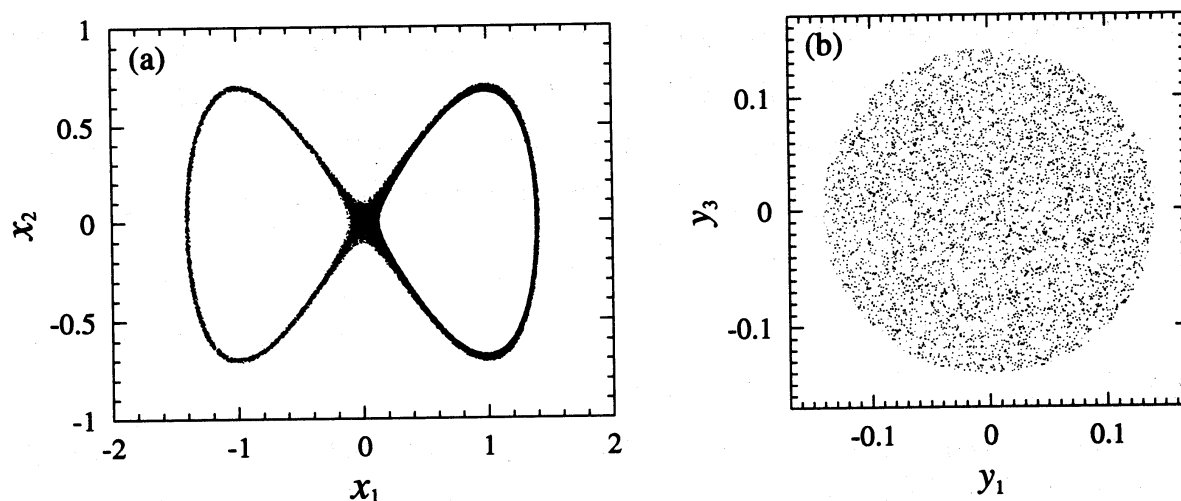


図 9. 式 (14) のあるポアンカレ写像の軌道 : (a) x 平面への射影; (b) 軌道が y 超平面の近傍に入ったときの (y_1, y_3) 平面への射影

た. 図 9 は, 点 $(x, y) = (0.001, 0.001, 0, 0, 0.173 \dots, 0.1)$ を初期条件とするポアンカレ写像の軌道である. 図 9(a) には 20 000 点の軌道の x 平面への射影が, 図 9(b) には 軌道が y 超平面の近傍 $\{(x, y) \mid |x| \leq 0.01\}$ に入ったときの (y_1, y_3) 平面への射影が 5 000 点与えられている. 計算された軌道はカオス的になっているだけでなく, センター方向にもドリフトしていることがわかる.

図 10 は初期条件が少しだけ異なる 2 つの軌道に対する y 成分の第 2 モードのエネルギー $e_2 = y_4^2/2$ と y 超平面からの距離 $r_x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ の時間的变化を示す. 図 9 と同じ初期条件の軌道に対する結果が黒丸と実線で, y_1 成分だけが $y_1 = 10^{-5}$ と少しだけ異なっ

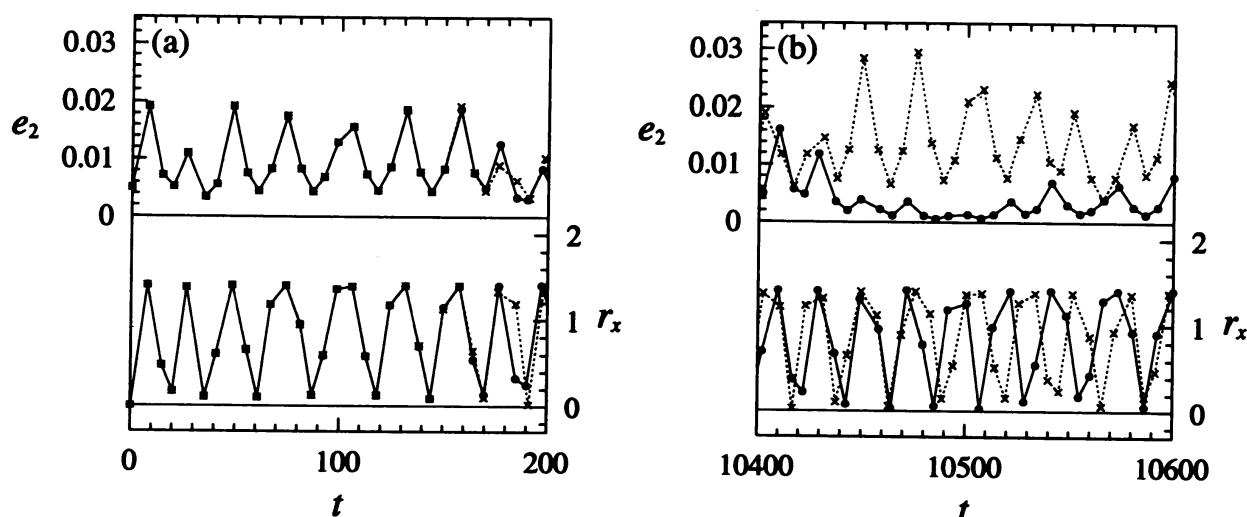


図 10. 初期条件が少しだけ異なる 2 つの軌道に対する y 成分の第 2 モードのエネルギー e_2 と y 超平面からの距離 r_x の変化: (a) 時間 t が小さい場合; (b) t が大きい場合

た初期条件の軌道に対する結果が×と破線でプロットされている。 t が小さいとき両者はほとんど同じであるが、 t が大きくなると非常に異なることがわかる。特に、 r_x の値がほとんど同時に小さくなる $t \approx 10460$ においても第 2 モードのエネルギー e_2 は非常に異なってしまう。このように、中心方向のドリフトも初期条件に鋭敏に依存し、よってカオス的であることがわかる。

参考文献

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1978.
- [2] V.I. Arnold, Instability of dynamical systems with many degrees of freedom, *Sov. Math. Dokl.*, **5** (1964), 581–585.
- [3] E.A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [4] N. Fenichel, Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Ind. Univ. Math. J.* **21** (1971), 193–225.
- [5] N. Fenichel, Asymptotic stability with rate conditions, *Ind. Univ. Math. J.* **23** (1974), 1109–1137.
- [6] S.M. Graff, On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems, *J. Diff. Eqns.*, **15** (1974), 1–69.
- [7] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 1983.

- [8] E. Hairer, S.P. Nørsett and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*, 2nd ed., Springer, Berlin, 1993.
- [9] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, 2nd ed., Hermann, Paris, 1976.
- [10] P. Lochak, Arnold diffusion: A compendium of remarks and questions, in *Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom* (C. Simo, ed.), Kluwer, Dordrecht, 1999, pp. 168–183.
- [11] K.R. Meyer and G.R. Hall G R, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer, New York, 1992.
- [12] J.J. Morales-Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian systems*, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [13] J.J. Morales-Ruiz, Meromorphic nonintegrability of Hamiltonian systems, *Rep. Math. Phys.*, **48** (2001), 183–194.
- [14] J.J. Morales-Ruiz and J.M. Peris, On a Galoisian approach to the splitting of separatrices, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **8** (1999), 125–141.
- [15] J.J. Morales-Ruiz and J.P. Ramis, Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, *Methods Appl. Anal.*, **8** (2001), 33–96.
- [16] J. Moser, On the generalization of a theorem of A. Liapounoff, *Comm. Pure Appl. Math.* **11** (1958), 257–271.
- [17] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1973.
- [18] J. Pöschel, Über invariant Tori in Differenzierbaren Hamiltonschen Systemen, Bonn Math. Schr. 120, Universität Bonn, Bonn, 1980.
- [19] M.F. Singer, An outline of differential Galois Theory, in *Computational Algebra and Differential Equations* (E. Tournier ed.), Academic Press, London, 1989, pp. 3–57.
- [20] M. van der Put and M.F. Singer, *Differential Galois Theory*, preprint.
- [21] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York, 1990.
- [22] S. Wiggins, *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems*, Springer, New York, 1994.
- [23] K. Yagasaki, Horseshoes in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **154** (2000), 275–296.
- [24] K. Yagasaki, Homoclinic and heteroclinic behavior in an infinite-degree-of-freedom Hamiltonian system: Chaotic free vibrations of an undamped, buckled beam, *Phys. Lett. A*, **285** (2001), 55–62.
- [25] 矢ヶ崎, サドル・センターを有する多自由度ハミルトン系の非可積分性とアーノルド拡散, 力学系理論の新しい展開, 数理解析研究所講究録 1179, 京都大学数理解析研究所, 2001, pp. 13–24.
- [26] K. Yagasaki, Homoclinic and heteroclinic orbits to invariant tori in multi-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, submitted for publication.

- [27] K. Yagasaki, Numerical evidence of Arnold diffusion type motions in a three-degree-of-freedom Hamiltonian system with a saddle-center, submitted for publication.
- [28] K. Yagasaki, Galoisian obstructions to integrability and Melnikov criteria for chaos in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, in preparation.
- [29] K. Yagasaki, Nonintegrability of an infinite-degree-of-freedom model for an undamped, straight beam, in preparation.
- [30] S.L. Ziglin, Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics, I, *Funct. Anal. Appl.*, **16** (1982), 181–189.