

ある生態系モデルの周期アトラクターについて

島根大学総合理工学部 杉江実郎 (Jitsuro Sugie)

Ivlev 型応答関数をもつ捕食者・被食者モデル

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx(1-x) - (1-e^{-ax})y \\ \dot{y} &= y((1-e^{-ax}) - D)\end{aligned}\tag{1}$$

について考える。ただし、 a, r, D は正の定数である。

$$D < 1 - e^{-a}\tag{2}$$

ならば、方程式系 (1) は第 1 象限に critical point (λ, ν) をもつ。ここで

$$\lambda = -\frac{1}{a} \log(1-D), \quad \nu = \frac{r}{D} \lambda(1-\lambda)$$

である (λ は a と D に depend し、 ν は a, r, D に depend する)。

この生態系モデルの limit cycle の存在性や一意性に関する研究が行われている (例えば、[1], [2], [5], [6])。最近、Kooij and Zegeling [3] によって、次の結果が報告された。

THEOREM 1. (i) $a > 2$ ならば、方程式系 (1) は高々一つの limit cycle をもつ。 (ii) $0 < a \leq 2$ ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

この結果は、方程式系 (1) が limit cycle を 2 個以上はもたないことと、 $a \leq 2$ ならば limit cycle は存在しないことを示しているだけで、limit cycle の一意性のための必要十分条件を与えていない。本講演では、limit cycle が分岐する条件を報告する。

まず、 $a > 2$ の場合でも、方程式系 (1) は limit cycle をもたないことがあるのか? について考える。そのために、Bendixson の判定法を用いる。即ち

$$\phi(x) \equiv r(1-2x) - D + 1 - e^{-ax} < 0 \quad \text{for } x > 0$$

ならば、方程式系 (1) には limit cycle が存在しない。このとき

$$\phi'(x) = -2r + ae^{-ax}$$

である。まず、 $2r \geq a$ の場合、 $\phi(x)$ は単調減少であり

$$\phi(x) < \phi(0) = r - D \quad \text{for } x > 0$$

より

$$\frac{a}{2} \leq r \leq D\tag{3}$$

ならば、limit cycle は存在しない。しかし、条件 (2) と合わせて考えると、 $a < 2$ となる。次に、 $2r < a$ の場合、 $\phi(x)$ は

$$x^* = -\frac{1}{a} \log \frac{2r}{a}$$

で最大値となる。したがって

$$\phi(x^*) = r(1 - 2x^*) - D + 1 - \frac{2r}{a} < 0 \quad (4)$$

ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

次の例では、(4) が満たされないので、Bendixson の判定法は使えない。しかし、limit cycle は存在しない。

EXAMPLE 1. $a = 3, r = 1, D = \frac{9}{10}$ のとき、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

この場合

$$D = \frac{9}{10} < 0.95 < 1 - e^{-3} = 1 - e^{-a}$$

であるから、(2) は成立する。 $2r < a$ も明らか。しかし

$$x^* = -\frac{1}{3} \log \frac{2}{3} < \frac{1}{5};$$

$$\begin{aligned} \phi(x^*) &= 1 + \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} - \frac{9}{10} + 1 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{13}{30} + \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} > \frac{13}{30} - \frac{2}{5} = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

であるから、(4) は成立しない。しかし、Figure 1 から limit cycle が存在しないことがわかる。

ところで、方程式系 (1) は変数変換

$$u = x - \lambda, \quad v = \log y - \log \nu, \quad d\tau = (e^{-ax} - 1)dt$$

によって

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \nu(e^v - 1) - F(u) \\ \frac{dv}{d\tau} &= -g(u) \end{aligned} \quad (5)$$

に書き直せる。ただし、 $u > -\lambda$ に対して

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{r(u + \lambda)(1 - u - \lambda)}{1 - e^{-a(u + \lambda)}} - \nu = \frac{r(u + \lambda)(1 - u - \lambda)}{1 - (1 - D)e^{-au}} - \nu; \\ g(u) &= 1 - \frac{D}{1 - e^{-a(u + \lambda)}} \end{aligned}$$

である。また、このとき

$$G(u) = u - \frac{D}{a} \log \frac{1 - (1 - D)e^{-au}}{De^{-au}} = u - \frac{D}{a} \log \frac{e^{au} - (1 - D)}{D}$$

となる。

方程式系 (5) が limit cycle をもたないための十分条件として、次のものがよく知られている (例えば、[1], [7], [8])。

THEOREM 2. u をパラメータとする曲線 $(F(u), G(u))$ が自分自身と交わらないならば、方程式系 (5) は limit cycle をもたない。

Example 1 では、 $a = 3$, $r = 1$, $D = \frac{9}{10}$, $\lambda = -\frac{1}{3} \log \frac{1}{10}$ であるから

$$F(u) = \frac{(u - \frac{1}{3} \log \frac{1}{10})(1 - u + \frac{1}{3} \log \frac{1}{10})}{1 - \frac{1}{10} e^{-3u}} + \frac{10}{27} \left(1 + \frac{1}{3} \log \frac{1}{10}\right) \log \frac{1}{10};$$

$$G(u) = u - \frac{3}{10} \log \frac{10e^{3u} - 1}{9}$$

となるので、Figure 2 より、曲線 $(F(u), G(u))$ は交点をもたないことがわかる。Figure 2 の矢印はパラメータ u が増える方向を意味している。当然、 $u = 0$ のとき曲線は原点を通る。

考察を進めるため、別の例を挙げる。

EXAMPLE 2. $a = 3$, $r = 1$, $D = \frac{7}{10}$ のとき、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

この場合、 $x^* = -\frac{1}{3} \log \frac{2}{3} < \frac{1}{5}$;

$$\begin{aligned} \phi(x^*) &= 1 + \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} - \frac{7}{10} + 1 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{19}{30} + \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} > \frac{19}{30} - \frac{2}{5} = \frac{7}{30} \end{aligned}$$

であるから、(4) は成立しない。しかし、Figure 3 が示すように、曲線 $(F(u), G(u))$ は交点をもたないので、limit cycle は存在しない。実際、解軌道図は Figure 4 のようになり、limit cycle は存在しない。

さて、Theorem 2 を使って、方程式系 (1) が limit cycle をもたないための十分条件を求める。まず、 $G(u)$ の性質について考える。 $G(0) = 0$ で、 $G(u)$ は $-\lambda < u < 0$ において単調減少、 $u > 0$ において単調増加である。したがって、Figures 2, 3 において、曲線 $(F(u), G(u))$ は次第に下がり、一度原点を通り（これには $F(0) = 0$ も必要）、その後上がっている。また

$$\begin{aligned} G(u) &= u - \frac{D}{a} \log \frac{1 - (1 - D)e^{-au}}{De^{-au}} \\ &= (1 - D)u - \frac{D}{a} \log (1 - (1 - D)e^{-au}) + \frac{D}{a} \log D \end{aligned}$$

より、 $1 - D = e^{-a\lambda}$ に注意すると

$$G(u) \rightarrow \infty \quad \text{as } u \rightarrow \infty; \quad G(u) \rightarrow \infty \quad \text{as } u \rightarrow -\lambda$$

であることがわかる。

次に、 $F(u)$ の性質について調べる。

$$\begin{aligned} F'(u) &= \frac{r}{(1 - (1 - D)e^{-au})^2} \{ (1 - 2u - 2\lambda)(1 - (1 - D)e^{-au}) \\ &\quad - a(1 - D)(u + \lambda)(1 - u - \lambda)e^{-au} \} \\ &= \frac{r}{(1 - (1 - D)e^{-au})^2} \left[1 - 2u - 2\lambda \right. \\ &\quad \left. - (1 - D)e^{-au} \{ (1 - 2u - 2\lambda) + a(u + \lambda)(1 - u - \lambda) \} \right] \end{aligned}$$

となる。ここで、 $u \in \mathbf{R}$ に対して

$$h(u) = 1 - 2u - 2\lambda - (1 - D)e^{-au} \{ (1 - 2u - 2\lambda) + a(u + \lambda)(1 - u - \lambda) \}$$

とおくと

$$\begin{aligned} h'(u) &= -2 + a(1-D)e^{-au}\{(1-2u-2\lambda) + a(u+\lambda)(1-u-\lambda)\} \\ &\quad - (1-D)e^{-au}\{-2 + a(1-2u-2\lambda)\} \\ &= -2 + (1-D)e^{-au}\{2 + a^2(u+\lambda) - a^2(u+\lambda)^2\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(u) &= -a(1-D)e^{-au}\{2 + a^2(u+\lambda) - a^2(u+\lambda)^2\} + (1-D)e^{-au}\{a^2 - 2a^2(u+\lambda)\} \\ &= (1-D)e^{-au}\{a^3(u+\lambda)^2 - a^2(a+2)(u+\lambda) - a(2-a)\} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$h(-\lambda) = h'(-\lambda) = 0$$

である。

もし、 $0 < a \leq 2$ ならば $h''(-\lambda) = -a(2-a) \leq 0$ かつ

$$k(u) = a^3(u+\lambda)^2 - a^2(a+2)(u+\lambda) - a(2-a)$$

の判別式が $a^4(a^2+12) > 0$ であるから

$$h''(u) < 0 \quad (-\lambda < u < u_*); \quad h''(u_*) = 0; \quad h''(u) > 0 \quad (u > u_*)$$

となる u_* が存在する。また

$$h'(u) \rightarrow -2 \quad \text{as } u \rightarrow \infty$$

であるから、 $h'(u) < 0$ for $u > -\lambda$, 即ち $h(u)$ は単調減少である。したがって

$$h(u) < h(-\lambda) = 0 \quad \text{for } u > -\lambda$$

となり、 $F(u)$ も単調減少であることがわかる。故に、 $G(u)$ の性質と合せて考えると、曲線 $(F(u), G(u))$ は自分自身に交わらない。この事実と Theorem 2 より、方程式系 (1) は limit cycle をもたないことになる。これは Theorem 1 (ii) の別証明である。

もし、 $a > 2$ ならば $h''(-\lambda) = -a(2-a) > 0$ であり、 $k(u)$ の判別式は $0 < a \leq 2$ の場合と同じく正であるから、 $-\lambda < u^* < u_*$ なる u^*, u_* が存在して、 $h''(u^*) = h''(u_*) = 0$;

$$h''(u) > 0 \quad (-\lambda < u < u^*); \quad h''(u) < 0 \quad (u^* < u < u_*); \quad h''(u) > 0 \quad (u > u_*)$$

となる。 $h'(-\lambda) = 0$, $h'(u) \rightarrow -2$ as $u \rightarrow \infty$ に注意すれば、 $h'(u)$ は $u = u^*$ で最大値を、 $u = u_*$ で最小値をとり

$$h'(u) > 0 \quad (-\lambda < u < \bar{u}); \quad h'(\bar{u}) = 0; \quad h'(u) < 0 \quad (u > \bar{u})$$

となる $\bar{u}$: $u^* < \bar{u} < u_*$ が存在することがわかる。したがって、 $h(u)$ は $u = \bar{u}$ で最大値をとる。 $h(-\lambda) = 0$, $h(u) \rightarrow -\infty$ as $u \rightarrow \infty$ であるから

$$h(u) > 0 \quad (-\lambda < u < \hat{u}); \quad h(\hat{u}) = 0; \quad h(u) < 0 \quad (u > \hat{u})$$

となる $\hat{u} > \bar{u}$ が存在する。 $F'(u)$ と $h(u)$ の正負は同じであるから、 $F(u)$ は $-\lambda < u < \hat{u}$ において単調増加、 $u > \hat{u}$ において単調減少である。

ところで、 $F(0) = 0$;

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow -\lambda} F(u) &= \lim_{u \rightarrow -\lambda} \frac{r(u+\lambda)(1-u-\lambda)}{1-e^{-a(u+\lambda)}} - \nu \\ &= \lim_{u \rightarrow -\lambda} \frac{r(1-2u-2\lambda)}{ae^{-a(u+\lambda)}} - \nu = \frac{r}{a} - \nu; \\ \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) &= -\infty\end{aligned}$$

である。したがって

$$\frac{r}{a} - \nu \geq 0$$

ならば $F(u)$ の増減を考慮すると、 $\hat{u} < 0$ かつ

$$F(u) > 0 \quad (-\lambda < u < 0); \quad F(u) < 0 \quad (u > 0)$$

であることがわかる。このとき、曲線 $(F(u), G(u))$ は自分自身に交わらないので、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。条件 $\frac{r}{a} - \nu \geq 0$ を書き直すと

$$a \leq -\frac{(\log(1-D))^2}{D + \log(1-D)} \equiv \Gamma(D) \quad (6)$$

となる。この $\Gamma(D)$ は D に関して単調増加かつ $\Gamma(D) > 2$ for $0 < D < 1$ であることがわかる。したがって、 $0 < a \leq 2$ の場合も含めて、条件 (6) が満たされれば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

ここで、Examples 1, 2 において、条件 (6) が成り立つかどうかを調べる。

Example 1 ($a = 3$, $D = \frac{9}{10}$):

$$aD + a \log(1-D) + (\log(1-D))^2 = \frac{27}{10} + 3 \log \frac{1}{10} + \left(\log \frac{1}{10}\right)^2 \approx 1.094142831 > 0.$$

Example 2 ($a = 3$, $D = \frac{7}{10}$):

$$aD + a \log(1-D) + (\log(1-D))^2 = \frac{21}{10} + 3 \log \frac{3}{10} + \left(\log \frac{3}{10}\right)^2 \approx -0.06236789942 < 0.$$

Example 1 では、条件 (6) が満たされるので、limit cycle が存在しないことが確認できる (Bendixson の判定法から導いた条件 (4) は Example 1 には適用できなかった)。しかし、条件 (6) も不完全で、Example 2 において limit cycle が存在しないことを説明できない。

先に述べたように、条件 (6) が成り立つならば $F(u)$ は単調減少であるか $\hat{u} < 0$ において最大値をとる。したがって、どちらの場合も $F'(0) \leq 0$ (正確には $F'(0) < 0$) になっている。反対に $F'(0) > 0$ の場合

$$\lim_{u \rightarrow -\lambda} F(u) = \frac{r}{a} - \nu; \quad \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = -\infty$$

に注意すれば、曲線 $(F(u), G(u))$ は必ず自分自身に交わることになる。したがって、Theorem 2 を用いて、方程式系 (1) が limit cycle をもたないことを示すには少なくとも

$$F'(0) \leq 0$$

でなければならない。整理すると

$$a \leq -\frac{2D + (1-D) \log(1-D)}{D + (1-D) \log(1-D)} \log(1-D) \equiv \Delta(D) \quad (7)$$

となる。この $\Delta(D)$ も D に関して単調増加かつ $\Delta(D) > 2$ for $0 < D < 1$ であることがわかる。条件 (2), (6), (7) を a - D 平面に描くと Figure 5 のようになる。

今までの議論によって、次の事実が判明した。

RESULT 1. $a \leq \Gamma(D)$ ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

以後、 $a > \Gamma(D)$ の場合について考える。このとき、 $\hat{u}$ が存在して、 $F(u)$ は $-\lambda < u < \hat{u}$ において単調増加、 $u > \hat{u}$ において単調減少であることを思い出そう（正確には、 $a > 2$ であるだけで、 $F(u)$ は同じ性質をもつ）。

さて、 $w = G(u) \operatorname{sgn} u$ の逆関数を $G^{-1}(w)$ とおくと、Theorem 2 は次のように書ける。

THEOREM 2'. 任意の $w: 0 < w < G(-\lambda + 0)$ に対して

$$F(G^{-1}(-w)) \neq F(G^{-1}(w))$$

ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

関数 $G(u)$ は複雑であるから、逆関数 $G^{-1}(w)$ を求めることは困難である。しかし、 $G(u)$ は次の性質をもっていることが証明できる。

LEMMA 1. $G(-u) > G(u)$ for $0 < u < \lambda$.

Theorem 2' と Lemma 1 を用いれば、次の結果が得られる。

THEOREM 3. $a > \Gamma(D)$ であるとする。このとき

$$F(-u) > F(u) \quad \text{for } 0 < u < \lambda \quad (8)$$

ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

証明 $F(G^{-1}(-w_0)) = F(G^{-1}(w_0))$ となる $w_0 > 0$ が存在すると仮定する。

$$\alpha = -G^{-1}(-w_0) > 0, \quad \beta = G^{-1}(w_0) > 0$$

とおくと

$$F(-\lambda + 0) < F(-\alpha) = F(\beta) < 0, \quad G(-\alpha) = w_0 = G(\beta)$$

となる。先に述べたように、 $a > \Gamma(D)$ ならば、 $F(u)$ は $u = \hat{u}$ で最大になるから

$$-\alpha < \hat{u} < \beta < \lambda$$

である。Lemma 1 より

$$G(-\beta) > G(\beta)$$

であるから、 $G(u)$ の単調性より

$$-\beta < -\alpha$$

であることがわかる。また、 $F(u)$ は $-\lambda < u < \hat{u}$ において単調増加であるから

$$F(-\beta) < F(-\alpha) = F(\beta)$$

である。一方、条件 (8) より

$$F(\beta) < F(-\beta)$$

であるから矛盾が生じる。したがって、Theorem 2' によって、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

Theorem 3 が示すように、方程式系 (1) が limit cycle をもたないための条件は

$$H(u) \equiv F(-u) - F(u)$$

が $0 < u < \lambda$ において正になる条件に帰着される。

RESULT 2. $a \leq -2 \log(1-D)$ ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

証明

$$\frac{1}{r}H(u) = \frac{(-u+\lambda)(1+u-\lambda)}{1-(1-D)e^{au}} - \frac{(u+\lambda)(1-u-\lambda)}{1-(1-D)e^{-au}}$$

であり、 $0 < u < \lambda$ に対して

$$1-(1-D)e^{au} < 1-(1-D)e^{-au}$$

である。また、条件は $\lambda \geq \frac{1}{2}$ に書き直せるから

$$(-u+\lambda)(1+u-\lambda) - (u+\lambda)(1-u-\lambda) = 2u(2\lambda-1) \geq 0$$

となる。したがって

$$H(u) > 0 \quad \text{for } 0 < u < \lambda$$

である。故に、Result 1 と Theorem 3 より、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

Result 2 の条件 $a \leq -2 \log(1-D)$ は easygoing であり、sharp な条件ではない。しかし、それでも、Bendixson の判定法から導かれる条件 (4) を含んでいる。正確に言うと、 r をパラメータとして、いろいろ値を変化させて

$$r \left(1 + \frac{2}{a} \log \frac{2r}{a} \right) - D + 1 - \frac{2r}{a} = 0 \quad (4')$$

が表す曲線族を $a-D$ 平面に描くと (それぞれの曲線の定義範囲は $2r < a$ である)、その包絡線が $a = -2 \log(1-D)$ である。

Result 1 と Result 2 には包含関係はない。これらの結果を改良するためには、 $H(u)$ をもっと詳しく調べなければならない。

$$H(u) = \frac{r \{ (-u+\lambda)(1+u-\lambda)(1-(1-D)e^{-au}) - (u+\lambda)(1-u-\lambda)(1-(1-D)e^{au}) \}}{(1-(1-D)e^{au})(1-(1-D)e^{-au})}$$

であるから、 $u \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} L(u) &\equiv (-u+\lambda)(1+u-\lambda)(1-(1-D)e^{-au}) - (u+\lambda)(1-u-\lambda)(1-(1-D)e^{au}) \\ &= -2(1-2\lambda)u + (1-D)(1-2\lambda)u(e^{au} + e^{-au}) \\ &\quad + (1-D)\{\lambda(1-\lambda) - u^2\}(e^{au} - e^{-au}) \end{aligned}$$

$$M(u) \equiv (1-(1-D)e^{au})(1-(1-D)e^{-au})$$

とおく。このとき、 $L(0) = L(\lambda) = 0$ であり

$$\begin{aligned} L'(u) = & -2(1-2\lambda) + (1-D)\{(1-2\lambda) + a\lambda(1-\lambda) - au^2\}(e^{au} + e^{-au}) \\ & + (1-D)\{a(1-2\lambda) - 2\}u(e^{au} - e^{-au}) \end{aligned}$$

となる。また、いくつかの補題が得られる。

LEMMA 2. $M(u) > 0$ for $0 < u < \lambda$.

LEMMA 3. $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} L^{(n)}(u) = & (1-D)\left[a^{n-1}\{a(1-2\lambda) - 2n\}u(e^{au} + (-1)^n e^{-au}) \right. \\ & \left. + a^{n-2}\{an(1-2\lambda) - n(n-1) + a^2\lambda(1-\lambda) - a^2u^2\}(e^{au} + (-1)^{n+1}e^{-au})\right]. \end{aligned}$$

LEMMA 4. $\Delta(D) < 2 - 2\log(1-D)$ for $0 < D < 1$.

Lemma 4 は、条件 (7) が満たされるとき

$$a(1-2\lambda) - 2 < 0$$

であることを示している。したがって、Lemma 3 より、 $n \geq 2$ かつ

$$an(1-2\lambda) - n(n-1) + a^2\lambda(1-\lambda) \leq 0$$

即ち

$$a \leq \frac{n(n-1) - 2n\log(1-D) + (\log(1-D))^2}{n - \log(1-D)} \equiv \Omega_n(D) \quad (9)_n$$

ならば、 $L^{(n)}(u) < 0$ for $0 < u < \lambda$ となる。また、 $u = 0$ における $L(u)$ の $n(\geq 2)$ 次導関数の値は次のようになる。

$$L^{(n)}(0) = 0 \quad (n : \text{偶数})$$

$$L^{(n)}(0) = 2(1-D)a^{n-2}\{an(1-2\lambda) - n(n-1) + a^2\lambda(1-\lambda)\} \quad (n : \text{奇数})$$

さらに、条件 (7) は

$$D(1-2\lambda) - (1-D)a\lambda(1-\lambda) \leq 0$$

に書き換えられるから、条件 (7) が満たされるならば

$$\begin{aligned} L'(0) = & -2(1-2\lambda) + 2(1-D)\{(1-2\lambda) + a\lambda(1-\lambda)\} \\ = & -2\{D(1-2\lambda) - (1-D)a\lambda(1-\lambda)\} \geq 0 \end{aligned}$$

である。

関数 $\Omega_n(D)$ について、次の関係が成り立つ。

LEMMA 5. $\Omega_n(D) < \Omega_{n+1}(D)$ for $0 < D < 1$.

Lemma 5 によって、条件 $(9)_n$ が満たされれば、任意の自然数 $m \geq n$ に関する条件 $(9)_m$ も成立することがわかる。別の言い方をすれば、 a - D 平面 $\{(a, D) : a > 0, 0 < D < 1\}$ が曲線

$$a = \Omega_n(D) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

によって分割されることを意味する。

漸く、Result 2 を含む次の結果を証明する準備が整った。

RESULT 3. $\Gamma(D) < a \leq \Delta(D)$ ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

証明 $a > \Gamma(D)$ であるから、Theorem 3 と Lemma 2 により

$$L(u) > 0 \quad \text{for } 0 < u < \lambda \quad (10)$$

を示しさえすればよい。便宜上、場合分けを行う。

Case 1: $a \leq \Omega_2(D)$. このとき、 $0 < u < \lambda$ に対して $L''(u) < 0$ であるから、 $L'(u)$ は単調減少関数である。また、条件 $a \leq \Delta(D)$ より $L'(0) \geq 0$ であるから、 $L'(u)$ は常に正である or ある $\mu_1 \geq 0$ が存在して

$$L'(u) > 0 \quad (0 < u < \mu_1); \quad L'(\mu_1) = 0; \quad L'(u) < 0 \quad (\mu_1 < u < \lambda)$$

のどちらかである。しかし、 $L(0) = L(\lambda) = 0$ に注意すると、前者にはならない。したがって、 $L(u)$ は $0 < u < \mu_1$ において単調増加し、 $\mu_1 < u < \lambda$ において単調減少するので、(10) が成り立つ。

Case 2: $\Omega_2(D) < a \leq \Omega_3(D)$. このとき、 $0 < u < \lambda$ に対して $L'''(u) < 0$ であるから

$$L''(u) < L''(0) = 0 \quad \text{for } 0 < u < \lambda$$

となる。したがって、Case 1 と同じ議論によって、(10) が成り立つ (条件 $\Omega_2(D) < a$ は形式的であり、使わない)。

Case 3: $\Omega_3(D) < a \leq \Omega_4(D)$. このとき、 $0 < u < \lambda$ に対して $L^{(4)}(u) < 0$ かつ $L'''(0) > 0$ であるから、 $L'''(u)$ は常に正である or ある $\mu_3 > 0$ が存在して

$$L'''(u) > 0 \quad (0 < u < \mu_3); \quad L'''(\mu_3) = 0; \quad L'''(u) < 0 \quad (\mu_3 < u < \lambda)$$

のどちらかである。また、 $L''(0) = 0$ であるから、 $L'''(u)$ がどちらの場合であっても、 $L''(u)$ は常に正であるか or ある $\mu_2 > \mu_3$ が存在して

$$L''(u) > 0 \quad (0 < u < \mu_2); \quad L''(\mu_2) = 0; \quad L''(u) < 0 \quad (\mu_2 < u < \lambda)$$

のどちらかである。さらに、条件 $a \leq \Delta(D)$ より $L'(0) \geq 0$ であるので、 $L'(u)$ も常に正である or ある $\mu_1 > \mu_2$ が存在して

$$L'(u) > 0 \quad (0 < u < \mu_1); \quad L'(\mu_1) = 0; \quad L'(u) < 0 \quad (\mu_1 < u < \lambda)$$

のどちらかである。ところが、 $L(0) = L(\lambda) = 0$ であるので、 $L'(u)$ が常に正であることは不可能である。したがって、 $L(u)$ は $0 < u < \mu_1$ において単調増加し、 $\mu_1 < u < \lambda$ において単調減少する (このことから、 μ_2 と μ_3 は存在することになる)。故に、(10) が成り立つ。

Case n: $\Omega_n(D) < a \leq \Omega_{n+1}(D)$. このとき、 $0 < u < \lambda$ に対して $L^{(n+1)}(u) < 0$ となる。また、 $1 < k \leq n$ に対して

$$L^{(k)}(0) = 0 \quad (k: \text{偶数}); \quad L^{(k)}(0) > 0 \quad (k: \text{奇数})$$

となる。さらに、

$$L'(0) \geq 0, \quad L(0) = L(\lambda) = 0$$

である。したがって、上記の場合と同様の議論によって

$$0 < \mu_n < \cdots < \mu_2 < \mu_1 < \lambda$$

が存在して

$$L^{(k)}(u) > 0 \quad (0 < u < \mu_k); \quad L^{(k)}(\mu_k) = 0; \quad L^{(k)}(u) < 0 \quad (\mu_k < u < \lambda)$$

となる。ただし、 $k = 1, 2, \dots, n$ である。故に、(10) が成り立つことがわかる。

Example 2 は limit cycle が存在しない例であった。これは Results 1, 2 では説明できなかったが、Result 3 を適用することができる。実際

$$\Gamma(0.7) \approx 2.876247490, \quad \Delta(0.7) \approx 3.691460019$$

である。

Results 1 and 3 を合わせると、次の結果が得られる。

RESULT 4. $a \leq \Delta(D)$ ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

Result 4 によって、 $a > \Delta(D)$ は方程式系 (1) が limit cycle をもつための必要条件であることがわかった。また逆に、 $a > \Delta(D)$ は十分条件でもあることが証明できる。即ち、次の結果が成り立つ。

MAIN THEOREM. 方程式系 (1) が唯一つの limit cycle をもつための必要十分条件は

$$a > \Delta(D) = -\frac{2D + (1-D)\log(1-D)}{D + (1-D)\log(1-D)} \log(1-D) \quad (11)$$

である。

十分性を示すために、方程式系 (1) と同値な方程式系 (5) について考える。まず、記号を導入する。任意の点 $P \in \{(u, v) : u > -\lambda \text{ and } v \in \mathbf{R}\}$ を通る方程式系 (5) の positive semitrajectory, negative semitrajectory をそれぞれ $T^+(P)$, $T^-(P)$; y 軸の正の部分を Y^+ , 負の部分を Y^- と書く。

方程式系 (5) の解軌道は曲線

$$v = \log \frac{r(u + \lambda)(1 - u - \lambda)}{\nu(1 - (1 - D)e^{-au})} \equiv C(u)$$

に交わるならば、これを垂直に横切る。この曲線は $(-\lambda, 1 - \lambda)$ で定義される。条件 (11) の下では、 $F(u)$ の性質と同じく、 $C(u)$ は $-\lambda < u < \hat{u}$ において単調増加、 $\hat{u} < u$ において単調減少する。また、 $C(0) = 0$; $\hat{u} > 0$; $\lambda < \frac{1}{2}$; $\frac{r}{a} < \nu$;

$$C(u) \rightarrow \log \frac{r}{\nu a} = \log \frac{D}{a\lambda(1 - \lambda)} \quad \text{as } u \rightarrow -\lambda, \quad C(u) \rightarrow -\infty \quad \text{as } u \rightarrow 1 - \lambda$$

である。Main Theorem を証明するため、いくつか Lemma が必要である。

LEMMA 6. $a > \Delta(D)$ であるとする。このとき、任意の $P \in Y^+$ に対して、 $T^-(P)$ は平面 $\{(u, v) : -\lambda < u \leq 0 \text{ and } v \in \mathbf{R}\}$ において曲線 $v = C(u)$ を横切り、その後 Y^- に交わる。

LEMMA 7. $a > \Delta(D)$ であるとする。このとき、 $T^+(P)$ が平面 $\{(u, v) : u \geq 0 \text{ and } v \in \mathbf{R}\}$ において曲線 $v = C(u)$ に交わらないような $P \in Y^+$ が存在する。

LEMMA 8. $P \in Y^+$ を原点近傍内の点とする。このとき、 $T^+(P)$ は第1象限を通して原点に漸近するかまたは原点の周囲を回って P より原点に近い Q で再び Y^+ に交わる。

Main Theorem の証明 Lemma 7 により、原点から十分離れた $P_1 \in Y^+$ に対して、 $T^+(P_1)$ は曲線 $v = C(u)$ の上の領域を通して、左から右へ流れ、無限遠点へ向かう。また、Lemma 6 から、 $T^-(P_1)$ は平面 $\{(u, v) : -\lambda < u \leq 0 \text{ and } v \in \mathbf{R}\}$ を通って、 Y^- に交わる。方程式系 (5) のベクトル場より、 $T^-(P_1)$ はその後再び Y^+ に交わる。その交点を P_2 とする。解の初期値に関する一意性から、 $T^-(P_1)$ は $T^+(P_1)$ に交わらないので、 P_2 は P_1 より下に位置することがわかる。 $T^-(P_1)$ の弧 P_1P_2 と線分 P_1P_2 によって囲まれる領域を R_1 とする。

$P_3 \in Y^+$ を原点に十分近い点とすると、Lemma 8 より、 $T^+(P_3)$ は第1象限を通して原点に漸近するかまたは P_3 よりさらに原点に近い点 P_4 に交わる。前者の場合、 $T^-(P_3)$ は Lemma 6 と初期値に関する解の一意性より、 P_3 より上に位置する P_5 で再び Y^+ に交わる。 $T^-(P_3)$ の弧 P_3P_5 と線分 P_3P_5 によって囲まれる領域を R_2 とする。後者の場合、 $T^+(P_3)$ の弧 P_3P_4 と線分 P_3P_4 によって囲まれる領域を R_2 とする。

このとき、環状領域 $R_1 \setminus R_2$ は Bendixson sack になっている（即ち、如何なる解軌道も領域 $R_1 \setminus R_2$ に留まらない）。したがって、Poincaré Bendixson の定理より、領域 $R_1 \setminus R_2$ 内に limit cycle が少なくとも一つ存在することがわかる。方程式系 (5) と方程式系 (1) は同値であるから、方程式系 (1) も少なくとも一つ limit cycle をもつ。

ところで、条件 (11) が成り立てば、 $a > 2$ が満たされる (Figure 9 を見よ)。したがって、Theorem 1 (i) より、limit cycle は高々一つである。故に、方程式系 (1) の limit cycle は唯一つ存在する（これは stable limit cycle である）。

Kuang and Freedman [4] は Gause 型生態モデル

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\rho(x) - y\phi(x) \\ \dot{y} &= y(-\nu + \psi(x))\end{aligned}\tag{12}$$

が limit cycle を唯一つもつための十分条件を与えた。

THEOREM 4. $0 < x^* < m$ である定数 x^* と m が存在して

$$\phi(0) = \psi(0) = 0 \quad \text{and} \quad \phi'(x) > 0, \psi'(x) > 0 \quad \text{for } x > 0;\tag{13}$$

$$\psi(x^*) = \nu \quad \text{and} \quad (x - m)\rho(x) < 0 \quad \text{for } x \neq m;\tag{14}$$

$$\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{x\rho(x)}{\phi(x)} \right) \right|_{x=x^*} > 0\tag{15}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x\rho'(x) + \rho(x) - x\rho(x) \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}}{-\nu + \psi(x)} \right) \leq 0 \quad \text{for } x \neq x^*\tag{16}$$

であるならば、方程式系 (12) は唯一つの limit cycle をもつ。

この結果を方程式系 (1) にも適用できるか試してみる。この場合

$$\rho(x) = r(1 - x); \quad \phi(x) = \psi(x) = 1 - e^{-ax}; \quad \nu = D$$

であるから、 $\phi(0) = \psi(0) = 0$;

$$\phi'(x) = \psi'(x) = ae^{-ax} > 0 \quad \text{for } x > 0$$

となり、(13) は成り立つ。また、(14) を満たすためには、 $m = 1$; $x^* = -\frac{1}{a} \log(1 - D) = \lambda$ でなければならない。さらに、

$$\frac{x\rho(x)}{\phi(x)} = \frac{rx(1-x)}{1-e^{-ax}}$$

であるから

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x\rho(x)}{\phi(x)} \right) = \frac{r}{(1-e^{-ax})^2} \{ (1-2x)(1-e^{-ax}) - ax(1-x)e^{-ax} \}$$

となり、条件 $a > \Delta(D)$ より

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{x\rho(x)}{\phi(x)} \right) \right|_{x=\lambda} &= \frac{r}{D^2} \{ (1-2\lambda)D - a\lambda(1-\lambda)(1-D) \} \\ &= \frac{r}{aD^2} \left[\{a + \log(1-D)\} \{D + (1-D)\log(1-D)\} + D\log(1-D) \right] \\ &> 0. \end{aligned}$$

したがって、(15) も満たされる。

しかし、条件 $a > \Delta(D)$ だけでは、(16) は成立しない。実際、計算すると

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x\rho'(x) + \rho(x) - x\rho(x)\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}}{-D + \psi(x)} \right) = -\frac{re^{ax}p(x)}{(1-(1-D)e^{ax})^2};$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} p(x) &= \{2(1-a) + a(4-a)x + a^2x^2\} - 2(1-a+2ax)e^{ax} \\ &\quad - (1-D)(2-a+2ax)e^{ax} + (1-D)(2-a+2ax)e^{2ax} \end{aligned}$$

である。したがって、(16) が満たされるためには、 $p(x) > 0$ for $x \neq \lambda$ でなければならない。ところが、例えば、 $a = 3$, $D = 0.1$ の場合は

$$\lambda = -\frac{1}{3} \log(0.9) \approx 0.03512017189;$$

$$p(x) = -4 + 3x + 9x^2 + (4.9 - 17.4x)e^{3x} - (0.9 - 5.4x)e^{6x}$$

となり

$$p(0.1) \approx -0.0004089362004$$

である (この場合は、 $a > \Delta(D)$ となり、方程式系 (1) は limit cycle を唯一つもつ)。

故に、方程式系 (1) が limit cycle を唯一つもつための (必要) 十分条件は

$$a > \Delta(D)$$

であることを示すために、Theorem 4 は役に立たないことがわかる。

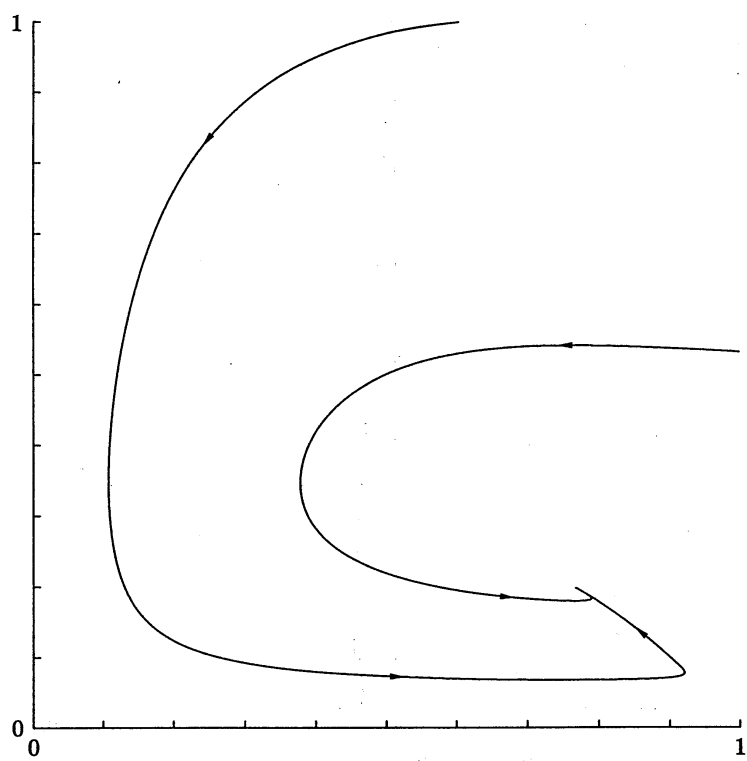


Fig. 1. $\dot{x} = x(1-x) - (1-e^{-3x})y$, $\dot{y} = y(\frac{1}{10} - e^{-3x})$.

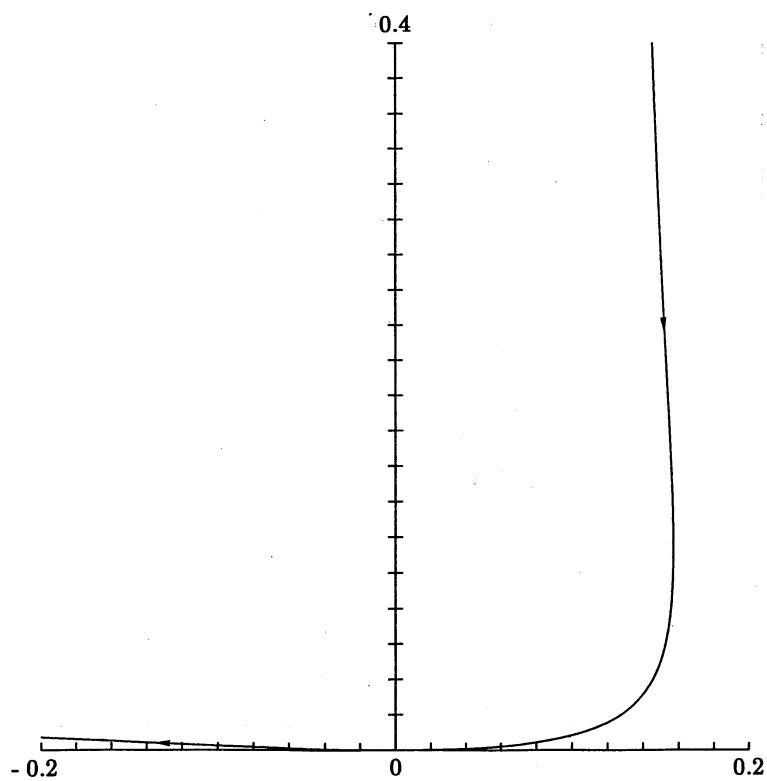


Fig. 2. ; $a = 3$, $r = 1$, $D = \frac{9}{10}$.

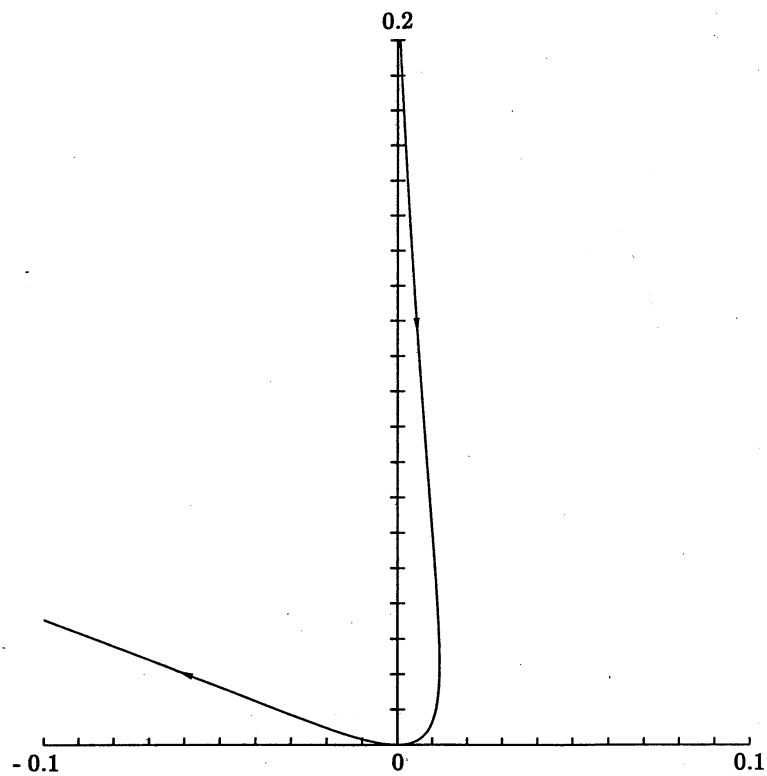


Fig. 3. $a = 3$, $r = 1$, $D = \frac{7}{10}$.

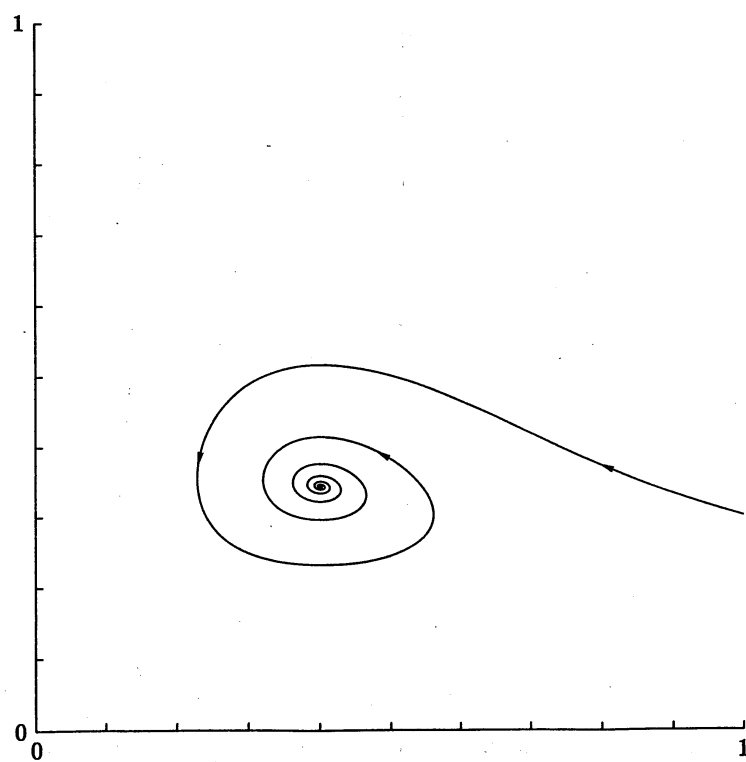


Fig. 4. $\dot{x} = x(1 - x) - (1 - e^{-3x})y$, $\dot{y} = y(\frac{3}{10} - e^{-3x})$.

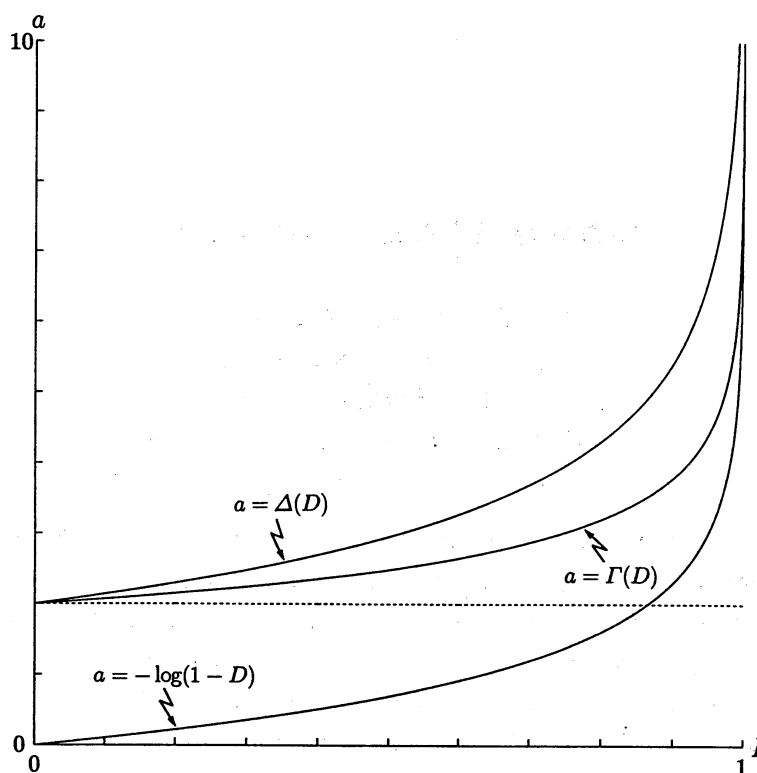


Fig. 5. 方程式系 (1) が limit cycle をもたない範囲 (a - D 平面)

REFERENCES

1. A. Gasull and A. Guillamon, Non-existence of limit cycles for some predator-prey systems, in "Proceedings of Equadiff' 91," pp. 538-543, World Scientific, Singapore, 1993.
2. V. S. Ivlev, "Experimental Ecology of the Feeding of Fishes," Yale Univ. Press, New Haven, CT, 1961.
3. R. E. Kooij and A. Zegeling, A predator-prey model with Ivlev's functional response, *J. Math. Anal. Appl.* **198** (1996), 473-489.
4. Y. Kuang and H. I. Freedman, Uniqueness of limit cycles in Gause-type models of predator-prey systems, *Math. Biosci.* **88** (1988), 67-84.
5. R. May, "Stability and Complexity in Model Ecosystems," 2nd ed., Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.
6. M. L. Rosenzweig, Paradox of enrichment: Destabilization of exploitation ecosystems in ecological time, *Science* **171** (1971), 385-387.
7. J. Sugie, K. Kohno and R. Miyazaki, On a predator-prey system of Holling type, *Proc. Amer. Math. Soc.* (in press)
8. J. Sugie, K. Miyamoto and K. Morino, Absence of limit cycles of a predator-prey system with a sigmoid functional response, *Appl. Math. Lett.* **9** (1996), 85-90.