

代数解析学と私

佐藤 幹夫 (京都大学)

Mikio Sato (Kyoto University)

[第一部] 3 月 26 日 共同研究集会・講演記録 (大山陽介 記)

p. 1 ~ 33

[第二部] 5 月 20 日 大談話会 (数理研) 講演記録 (織田孝幸 記)

p. II 1 ~ II 4

[第三部] 補足 (大山陽介 記)

p. III 1 ~ III 11;

資料

a ~ e

[第一部]

代 数 解 析 学 と 私

京都大学・佐藤 幹夫 述
大阪大学・大山 陽介 記

.....どうも、ありがとうございました(0)。申し訳ないけど、何も話す支度をしていないので、日本語で話をさせていただきます。

今、小松先生から御紹介いただいたけれども、穴があったら入りたいところですが、私もいわゆる定年退官の歳になりまして、普通ですと、これも先生によるのでしょうけど、退官記念最終講義とかいうのを話されたりなんかするのでしょうか、私は今御紹介あった通り京大の教官としては last talk でしょうけれども、mathematician としてはそうではないつもりですから、これからも数学者の仲間の一人と認めていただいて付き合いくださるようになんかよろしくお願いします。まあ、給料が出なくなるだけの違いと自分では思っているんですけど、

河合：「ひょっとしたら *emeritus* では？」

emeritus か *demeritus* かわかりませんが.....。

先にちょっと訂正させていただきますと、概均質ベクトル空間のことをやったのは、実はさっき御紹介ありましたプリンストンにいた時でございまして、1958年に彌永先生の御紹介でその当時空いていた吉田先生の助手のポストに採用していただきまして、2年たらずでございましたが、教育大学に移るまでの2年弱の間、助手にさせていただいて、その2年ちょっと後でプリンストンに行ったのは——超関数の仕事を発表したのは、英文で発表したのは59年だったと思いますが、その前に学士院紀要に短いあれを二つ、1変数の時と多変数の時の極く短いノートを書いたのが多分58年だったと思うのですが、それが André Weil 先生の目に止って、呼ぶようにということをして、その時ニースに行っておられた佐武さんを通じて彌永さんの方に話がありまして——それで私は行ったわけですが、私は英語は全然その当時だめだったので、本当にお恥ずかしかったのですけれども、何も世間しらずで数学界というものも何も知らなかったのですから、いろいろとんちんかんなことばかりやっております、はたして、プラスだったかどうかは良くわかりませんが、まあその時にいろいろな方と知り合いになりました。数学者、物理学者、日本からも大勢そのころおられました。実は概均質ベクトル空間のことをやった理由は、色々なとこ

ろに、さっき引用してくださった数学のあゆみにもたぶん書いてあるんじゃないかと思いますが、きっかけは要するにあの当時超関数の理論は大変評判悪くて、1変数のうちはそう悪くなかったのですが、多変数をしゃべり始めたら、皆から愛想を尽かされまして——近頃の string theory も肝心の物理学者からどうも見離されているらしいですが、数学者の方があれはもう数学になったと思ってよろしいのだと思いますが——ただ私の場合、肝心の数学者から見離されて、。

あれを書いた理由は、これも色々なときに書いたりしゃべったりしていて、お目に止っている方もあるかも知れませんが、私、大変生活に困窮してしまして、今は円高だなんだと言っておりますが、戦争が終わったとたんに1ドル2円から1ドル400円に200倍も円の価値が下がってしまいまして、親父がもう病気だったものですから、私が母親とか兄弟とかみなければならぬ立場にあって、ひどく困窮しております。そういう訳で、旧制高等学校、今の駒場でございますが、それは昔は中学5年で、あるいは4年でも受験資格はあるのですが、原則として5年から行って旧制3年、そして旧制大学を3年間。こういう昔はつまり6-5-3-3というシステムだった訳ですね。優秀な人は中学4年で中退して高等学校にはいる、そういう方は6-4-3-3で、多分、6-4-3-3だったら今と同じになるのじゃないかと思うのですが、合計して。そういうシステムだったわけです。旧制高校を出ますと中学校の免状がもらえるんです。私が一高を出たときに旧制中学の先生、その時には新制に切り替わっていましたので、旧制中学が新制高校に切り替わった訳で、実際には高校を出た途端に高校の先生の資格がもらえる。あまり大きな声で言われると困るんですが、本当は地方自治体の公務員な訳ですが、都立高校、私が出たところの校長に泣き付いて先生に採用してもらった。あの頃は要するにそういう時代ですから、あまりうるさいことを言わないでしてもらえた訳ですが、今と違ひまして。私は都立高校の先生になったわけで、その年はたまたま一高を出てから一年浪人する羽目になりまして、東大では僕は自分では自信があったんですけど、東大の数学の試験に落っこちてしまって、自分が先生になってみると落っこちる理由がよくわかるので、このような答案を書いたのでは落ちるのは無理がない気がして、自分では非常に自信があったんだけど、逆にやっぱりコツを知らなかったような気がいたしますが、それでその年は浪人しまして、その時から働き始めた訳です。

翌年にまた受け直して入ったんですが、実際には、家が非常に辺鄙なところでありまして、片道2時間以上かかるようなところで、つまり、家が戦災で焼けた後、本当に田舎の方、軍隊の宿舎のようなところに寝泊まりしております、この場にはご存じの方はいらっしゃるかもしれないけど、一時いらっしゃった方も、岩堀さんとかプリンストンの時の仲間の方もご存じだと思いますが、バラックの中

に大勢の家族で住んでいた。そういうところで暮らしておったわけで、働きに出るのも大学に出るのも時間が物凄い。西武電車があの頃は国分寺から、今でも国分寺から東の方へ行く、今は何と言うのでしょうか、あの頃川越線と言っておりましたが、川越鉄道、それが本当は国分寺からずっと川越の方にいったもので、所沢で西武本線と今は切り替わっておりますけれども、その頃は西武電車というのは大変ひどい電車で、その川越線なんかは時によっては貨物列車に積み込まれて、私もたとえば無蓋貨車なんかによじ登って、通勤した記憶もございます。それも、一日にほんの数台しかない、昼間なんかは3時間も4時間も時間が空いている訳ですね。夜、最終に乗り遅れると歩いて、今は沿線にもたくさん駅ができて賑やかになりましたけれど、その頃は——今は津田塾大がある何というところだったかな、いろいろ途中に駅ができていますけれども——昔は途中に駅がありませんで、山の中の本当に田舎で、月のない晩には、その、夜学の先生をしていたときには夜遅くなって、採点なんかしたりいろんなことで遅くなったりすると、もう着くのが12時過ぎてしまって、もちろん歩いて帰るわけですね。そうすると真っ暗なときには、月が出ていないときには右も左もわからないような、いろいろドブというか、たんぼの脇の溝に落ち込んだりそんな情けない状態で、歩くのにもやっぱり非常に時間がかかって、1時間以上はかかったと思いますが、何キロあったかな。そういう状態でございましたんで、

それで私の体験だとどうも25あたりを境にしてだんだん頭が硬くなってくる、ここにいる方もたぶんもう頭が硬くなってきて、私も憎まれ口をきいている訳ですが、どうもそういう感じが致します。25くらいまでは何をしても横になれば、横になった途端にぱっと眠れるけれども、もう20代の後半になるとそういう若さというものとはなくなってきて、頭の中では色々考えていたくても、なかなか要するに生活に追われてゆっくりあれする暇がなくなって、それで少し焦ってきて、物理の方もなかなか厳しくていろいろ、あの当時の独特の民主主義かなんかで、なかなか色々込み入ったことがあって就職が難しかった訳でございまして、それで、私、何かひとつ仕事をでっちあげて、と思って、そのころは若かったから色々なことに手を出して、いろいろなことを自分なりに考えたりやったりしておった訳ですが、何かまとまりそうなものをもとめて、57年の夏休みに、夏休みしか自分の自由になる時間がありませんでしたから、夏休みに、ちょっとお恥ずかしい話ですけど、素っ裸でパンツ1枚。軍隊の宿舎で、物凄く夏は暑いわけですね。窓を開けっ放しにしているのも暑くて、そういうところで超函数論を少し計算してみて、そしてそれを彌永先生のところに持って行って、それでやっと就職させてもらえた訳であります。今

からは想像もつかないような時代で、いろいろ年配の方にはあの頃のひどい生活を御記憶の方もいらっしゃると思いますが。

そんなことだったんですが、さっき言った訂正と申ししたのは、私、ただ、超函数のことを目的にした訳ではなくて、解析を少し体系づけたいという気持ちがあったわけですね。あの頃見る本はみんな海賊版ばかりですが、たとえば、Élie Cartan の *Exterior differential system* の本ですね。フランス語なんかはもちろん読めませんから、式だけ拾って読むようなものですけれども、そういうものとか、色々な本が海賊版で、Weyl の *Classical Group* なんかも戦後ずいぶん早い時期に海賊版で、海賊版というのはあまり大きな声で言うとこれもあれかもしれません、しかし、あの頃はそういう illegal なことがたくさんありまして、就職のことも、地方公務員と国立大学の学生という身分はどうも両立しないらしい。

助手にさせていただいて、給料はがくっと減りましたけれども、そのころは弟や妹も一応独立できる程度の歳になっておりましたので、非常にありがたかった訳です。そういうわけで一番何か手っ取り早そうなことを、超函数のことは気にはなっていたことなんだけど、その時に気になったことを少し考えてみて、とにかく、非常に簡単なことでありまして、たとえば Fourier 級数を考えますとですね、Fourier 級数というのは一種の Laurent 級数みたいなもので、つまり Fourier 級数を二つに分ければ、円内の正則函数と、円の外の正則函数。実際に解析函数を Laurent 展開したのであれば、あるリングの上では共通の正則域を持つわけですが、そうでない場合だったら当然共通の定義域がないわけだけど、でもその差に当たるもの、差でも和でもいいけど、それが円周上の勝手な実函数を表しているわけですから、要するに、1 変数の場合だったら、実函数が解析函数の境界値と考えるのは、たとえば Fourier 級数ひとつ考えてもすぐわかることで、それが果たして局所的な性質を持っているか、つまり函数概念の拡張というからには、単に函数空間のベクトルというのじゃなくて、局所化したり何かするような普通の函数概念に、そういうことを一々確かめていったわけです。つまり、自分のイメージで本当にいけるかどうか。そういうことが、高次元の場合にも、まず、2 変数だったら、1 変数の場合のテンソル積みたいに考えれば、大体のところはうまく行く、実際は、それを completion みたいな、completion とは違いますが、そういうことが必要なわけですけど、そういうことを手掛かりにして考えていけば、高次元の場合もできて、その次に果たして座標に independent な、intrinsic な概念になっているかということ、それはちょうど、どうも cohomology というもの、境界値というのはつまり homology class らしい、obstruction class と言うのでしょうかね、そういうものらしいという感じをしましたので、その時ちょうど一松先生が紹介を書いてくださった Cousin 分布について総合報告を書いて下さった中に、五十何年でしたかね、そういう

sheaf の cohomology の解説があってこれはびっくりだと思ひまして、それでそれをちょっと拡張して、相対 cohomology という形でやった、それがだいたい57年です。それで大体多変数の場合もそういうことでちゃんとつまり自然な概念として定義できるということに、細かい点はつめてなかったにせよ、自分としてはほぼ間違いがないという確信を持ったところで年末に彌永先生に会ったというのが、だから目的としては実を言うとそれを、あまり Schwartz の仕事なんかをそんなに尊敬はしていなかったのも、これを言うといろいろ語弊があるので面倒をおこすつもりはないので、わたしもそんなに自分で自慢するつもりはなかったのですが、。ただ自然な形で定義して、それで解析をその上でやりたいという気持ちだった訳で、それで、プリンストンに行くことが決まった後、60年の夏休みにひかわ丸の最後の航海でシアトル経由でプリンストンに行ったのですが、その時に夏休み中にいろいろ、英語の研修みたいなものやってくれましてね、多くの旅費をフルブライトで出してくれて、フルブライト関係の方でいろいろそういう面倒を見てくれて、だけど英語はあんまり上達しなかったですね。

そういうことがあったんで、夏休み直前に、東大で夏前と春でしたかそれとも暮れでしたか、1年に2回大談話会というのをやります。それで話す機会を与えられて、志村さんと私とがその時のスピーカーだったのですが、私はその時に私の持っている解析のプログラムをしゃべらせていただいた訳です。小松先生の、後の方が切れているけれど、だいたい前の方の半分ちょっとくらいはノート(1)が取っていると思いますが、東大数学教室の図書室に残っていると思いますが、それで、フィロソフィーがいくつかありまして、要するに、いわゆる代数幾何と同じだとその時思っているわけですが。D-module というのはこのごろは本当はたくさんの方が使ってください、私はそういう概念を持ち込んだだけで、後は柏原さんたちが非常に発展させて下さったんで、そういうものが natural な language である、formula であることはかなり認めていただいていると思いますが、

非線形の方もですね、同じだと思うんで、代数幾何の場合だったら、可換環論とその上の module の理論とは一体な訳で、両方で幾何学的なイメージで言えば、さっき斉藤さんの話(2)で出てきたように、可換環というのが空間を表しているわけですね。それからその上の module というのが環の上の幾何学的な構造、まあ vector bundle みたいなものを表しているわけですが、だから必ずしも多様体とかなんとかいうものをですね、点集合と考える必要はないわけで、つまり点集合としての多様体というのは、僕がよく昔の雑談の時に使っている、本地と垂迹で言えば、点集合としての多様体というのは垂迹の方であって、その元になっている環とか何とかいうほうは本地の方になるわけで、それはまあ、話は脱線しますが、たとえば同じ群

という言葉を使っても、レベルがいろいろ違うわけで、Lie 群と代数群とそれから有限群とは違うわけですね。代数群という場合には点集合としての Lie 群とか代数群とかいうのは、いわば垂迹の方であって、本体は group の規則の方ですね。だからたとえば formal group なんていう方ではむしろ規則の方を取り上げて、あれもやっぱりそうでしょうか、Hopf algebra か何か知りませんが、そういう形で捉えられる訳だと思いますが、要するに comultiplication と multiplication という形で、formulate できるわけで、だから無限群というのは決して有限群でその element の数が無限になったものというものではない訳で、連続群というものを強いて集合として表現すれば、いろんな形で集合として表現できる。それで、私、若いころはそういう自分の考えが非常に異端の考えだということを知らないで、しゃべりまくっていて、大分それでまたみんなから嫌われたみたいで、このごろは、もうそういうことは言わないようにしております。Cantor とか Dedekind の無理数論というのはフィクションであるなんてことを言ったものですが、もうあまりそういうことを言うとまたますます変わり者だと思われてしまうから、今ではそういうことは言わないようにしております。そろそろ、言っても年寄りの言うことだからということ言っているわけです。

というわけで、残念ながらまだ nonlinear のほうは、。だから僕は nonlinear のほうはぜひ若い元気のある方にですね、かつて柏原さんがやられたように、そっちの方をもっと若い世代の方が大いに使って欲しい。また、一昨年のコンGRESの時も感じたんですが、いろいろな話を聞いていてですね、たとえばいろいろ幾何学上の問題、幾何学に限らないけど——幾何学上の問題が、D-module の概念を使っている便利に扱えるケースがたくさんあるということは、多分、いろいろな方がもう認めてくださるようになったと思いますが——あの時聞いていて、いろいろ非線形がらみのことがいろいろあるわけですよ。そうすると、そういう幾何学とかなんとかのね、大局的な幾何学のいろいろな問題とかそういうことですね、こういうことも恐らく皆さんが、皆さんというのはここにいる方のことだけを言っているわけじゃなくて数学の方たちが、もう少し真面目に nonlinear の場合の代数解析も取り上げてくだされば、きっとかなりの問題が general nonsense、と言っては言いすぎかもしれませんが、かなりばたばた解けるんじゃないか、というのがコンGRESをぼんやり聞いていながら、そういうことが問題ならば、僕が若ければやってやるんだけどなあ、といった感じを持った話がいろいろありました。でも、もう全部忘れてしまいましたけれども。ぜひ、nonlinear の general theory もですね、要するに general theory というのはですね、何かと言うと——話がだんだん脱線していった、僕の話はいつもしゃべっているうちに脱線しちゃうんですが——つまり、何でそんなことを言うかと言

うと、たとえばですね、線形微分方程式の場合でも、D-module という形で捉えれば、普遍性が始めから built-in されていて、これがどういう変換で不変だとかということには言う必要がないわけです。もう、D-module そのものがあらゆる方程式の表示の変換の可能性を全て飲みこんでいるわけで、その D-module でどういう generator を取り、どういう基本関係を取ってきてそれを表現するかというところで、つまり D-module というときに、それを free module を何か ideal みたいなもの、submodule で割った cokernel として表すわけですね。その時の表し方はもちろん無限にいくらでもあるわけですが、その表し方すら、単なる表しで、これも垂迹の方であります。本地の方は、もう不変なわけですね。だから、いろいろな微分方程式の本質的な概念は全部 D-module の中で表現できていて、それを表現するときにはいろいろな、たとえば resolution の仕方なんてものも、もちろんそういう表現の仕方と同じなわけですが、それ以前の overdetermined system の扱い方というのはむしろそういう具体的な表示に非常にこだわっておったわけで、Spencer sequence とかなんとかいろいろありますけれども、そうするとそれが実は変換に対して不変だ、とかいうのが非常に大変な大定理のような感じを受けるわけです。実は、逆なんですね。Nonlinear の場合でも全く同じことが言えるわけです。午前中の講義⁽³⁾で僕が少し余計なおしゃべりをして、少しあれだったけれど、僕は今まで異端の解析学者と思われたかしらんけど、要するに、解析、微分方程式をおやりになる方がぜひそういう、ちょうど代数幾何をやる方にとっては、環と module の category で物を考えるということが当たり前のことであるようにですね、解析をやる方にも、D と —D というのは非常に一般的な意味で言っているのですが —D と D-module という形で物事を捉えていただければ無駄な手間、エネルギーがずいぶん無くなるはずだと思うんで、本質をはっきりするのに非常に役に立つだろうと思う。これは三十数年前からずっと思っていることなんです。

で、元に戻りますが、もう一つ大事な点は holonomic、holonomy という概念ですね。hol というのは全体という意味でしょうけど、要するに、完全な system で solution というものをほとんど完全に表現していると言っていいようなものが holonomic system で、linear の場合でも nonlinear の場合でももちろん holonomic という概念はあるわけです。それから、microlocal と言うけれども、microlocal というのは結局は非可換環における localization にすぎない訳で、可換環の localization は要するにある種の商体、ring of quotients を作ったり、completion したり、場合によっては中途半端な、たとえば永田さんの henselization とかいろいろ都合のいいものを取り取ることもあるでしょうけれども、いろいろ要するに、基本的に言えば quotient を取り入れることですね。非可換環の場合にも、非可換の程度が modest な非可換環であ

ればやはり商環が作れるわけで、それが要するに pseudo-differential operator というものになるわけですね。それで、超局所化で symplectic structure というか、我々の言葉で言う contact manifold の上での analysis になるわけですね。そうすると、方程式が microlocal には簡単になって、複雑さというものは要するにそういうもののつながりとして理解できるわけですから、ある意味で幾何学化されるわけですね。それからもっと大事なことは holonomic という概念で、私、60年の時にもちょっとそのことにこだわっていたんですけど、一般の holonomic でない方程式でも holonomic の場合になんとか帰着したい、全てを完全なる予定調和に持っていきたいという気持ちでありますけれども、それはなかなかうまくいかないことがあって、その後いろいろな形で、非線形まで広げることとか、無限自由度にするとか、あるいは無限階とかですね。これは、河合さんや青木さんが無限階の場合ずいぶん突っ込んだことをおやりになってらしたけれど、いろいろな方向に來ている訳です。まあ、余り発散し過ぎると今度は却って holonomy の理想から離れちゃう訳ですけれども、それはあくまでも問題として思っているわけで、少しずつ、よりよい holonomy という概念に近づくべく努力しているわけです。実は、きょうそういう意味で話をしようかと思ったのですが、いろいろな事情で今日はちょっと。また、数日前、何か京大の数学教室の方でも、大談話会みたいのをやるので、話してみてもというお勧めをいただいたので、渡りに船と思って、その時に少しその話でも話させていただこうかと思っております(4)けど、だから今日はちょっと具体的な話は、。

昨年10月の後半に、河合さんや Boute de Monvel が彌永先生の紹介で向こうで日仏の交歓の会がありまして、私はその後何か書かないといけないと思って、河合さんには空約束ばかりして申し訳ないのですが、いろいろ準備しているうちに、準備しているとすぐ脱線してしまって、でも脱線したおかげでいろいろまた、。今日初めに話の材料にしようと思ったのは、その脱線した中のうちのどれかをお話ししようかと実は思ったのです。具体的な話の方がきっとよいかと思ったけれど。準備をする間に、少し具体的な計算式をやるのに、昔10年くらい前にソリトンのこと、無限次元グラスマンのことをやったりして、それを高次元版何かのことで、一般のアーベル関数やテータ関数のことをそっちの方から理解しようと思って、少し計算にかけて genus 2 の場合について自分なりに計算しかかったデータを再利用しようと思ったのですが、今別に直接そっちには関係ないのですがその時のデータを利用しようと思って、家内に探してくれと頼んでいるけれども、まだ見つかっていないので、そのうちどっかから出てくると思うんですが、それを使って少し計算してみてもし僕の予想どおりであれば、また次の機会にでも話をさせていただこ

うと思っていますが、あるいはまた、いろいろ別に脱線しているうちに、いろいろ面白いことがあるような気がしたんですけれども。

今日は申し訳ないけれどもこういう取り留めのない話で申し訳ないのですが、それでまあ、そういうわけで、その年から、1960年にプリンストンに行きまして、それで、そこでもですね、やはり僕はどうも世間知らずだから、自分で考えたことを、自分が面白いと思うことは人も面白いだろうってつい、それは独り善がりだったわけなんですけれども、なかなかしかしそういうふうにはなりません、実函数というのは複素函数の cohomology class であるというようなことを言っても、あまり面白いと思うような人は残念ながら一人もいなかったわけで、私もそれでちょっと消耗してしまって、やっぱり何か問題になっていることをやらないといかんのかなあと思うようになった訳ですがね、でもその前に、日本でやってたことの続きとして、微分方程式のことをやりたい、しかし僕は微分方程式の専門家でないから、知っている方程式と言うと、いわゆる2階の熱方程式とか、波動方程式とか、あるいは Laplace のや Helmholtz の方程式とか、あるいは Riemann 函数が出てくる電信方程式というのですか、Equation of telegraphy というのですか、そういう類の、普通の教科書、たとえば寺沢さんの本なんかにも出てくるようなものしか知らないわけですよ。これじゃあ、いくら何でも微分方程式の予備知識として心細い。後はまあ、いわゆる線形常微分方程式のことですね。あるいはまた、Monge-Ampère の方程式とか、Monge-Ampère だと変換論は割と面白いわけですが、それも非常に特殊なあれで、一般的な状態を知るのには足らない。それで、一般的なことを知るのには、Élie Cartan が勉強になりそうだと思って、海賊版の本を買ってさっそくそれを読んでみて自分なりに考えてみたけれど、どうもこれは魅力的ではあるけれども、何かしかしこれが微分方程式の一般論の基礎としていいのかなあと思持もないでもない。後、もう一つは微分環の理論があったわけですが、これの方はただ、解析学者は全然見向きもしないで、要するに代数関係の人が、Galois 理論の拡張として考えているだけで、解析学者とは全く縁のない——全くというとおかしい、Picard なんかはもちろん立派な解析学者ですけども——大体そのころの解析のいわゆる中心と思われる人たちからは見向きもされなかったような風だったわけです。そういうわけで、その辺のことを話して、Green 函数と言いましょか、Riemann 函数と言いましょか、そういうものを通じて holonomic system の支配力が及ぶのではないかということをいろいろ話して、それから微分方程式の場合にですね、D-module と考えていけば cohomology について、例えば、 Ext^1 を考えることが solvability と関係してくるとか、つまり、Hom とか Ext とか微分方程式論がそういうホモロジー代数の言葉でかけるということをお話しした。実際、しかし、自分一人でどういうふうにして展開して

いいかわからないので、具体例を増やそうというのが実は概均質ベクトル空間をやった動機で、プリンストンへ行って、すぐそっちの方をやったんです。

実はあんまり、超函数の一般論をしゃべっても誰も関心を持ってくれなかったんで、そっちの方をやったんです。概均質ベクトル空間じゃなくて、どうすれば solution が具体的な初等函数でかけるようような、もう少し一般的な例が作れないかということ考えた訳で、初めはなるべく退化した多項式ならいいだろうと思って、例えば、3変数の多項式だったら、2次式ではつまらないから、次は3次式とすれば普通に書けば、それはもちろん Elliptic curve になるわけですが、ちょっと退化して2重点が出てくると有理曲線になるわけですね。そのうちで、一番退化した場合が cusp になった場合です。そんな場合でも計算してみると簡単にならないですね。だから、どういうふうにすれば、もう少し一般的な解が見つかるか、そのうちに、そういう立場からじゃなくて、そういう高級な幾何学を使うんじゃないで、もっと初等的な、つまり群論的に考えればいいということに気がつきまして、それで概均質ベクトル空間のことを考えたのが、61年ですね。それでその年の秋に Armand Borel のセミナーで、2回続けてしゃべらせてもらって、大体、多変数の ζ -函数の理論、それから、ゼータ函数のことも含めて、基本的なことはその時に。概均質という概念を持ち込めば物事がすっきり formulate できるということに気がつくまではずいぶん時間がかかったのですが、気がついてからはほんの短期間で、ぱたぱたとできてしまった訳です。それも、まあ、偉い先生は誰も興味を持ってくれなかったんで、やっぱりこれも消耗しまして、別に注目されたいと思った訳じゃないけれども、あんまり無視ばかりされているとやっぱり消耗してしまうもので、それでその次にやったのが、Ramanujan 予想のことだったわけですが、それが私が帰るぎりぎり間際の時に、何となくできそうな感じがしてきたのが、もう夏休みにはいってからだったんで、それで8月の終わりかそのころにやっとできた。誰もいないときに一人残ってやっていたのですが、久賀さんが出張先から帰ってきたときにその話をして、それで、Selberg にその話をして、自分にはよくわからんけど、Weil には伝えておこうとか何とか言っていましたけど、それで私は日本に帰ってきたわけですが。概均質ベクトル空間の話というのはそういう事情でできたわけなんです。そこをちょっとひとつ訂正させていただく、というのが脱線して、。。

歳を取るとこういうまあ、懐古談みたいになっちゃうのは、きっとそういうふうに言われるだろうなと思うとしゃくに触るわけで、あまりそうでなくてなにか格好いいことをしゃべろうと思っていたんですが、ちょっと残念ですが、今日はまだデータ不足でその話は次回また話させていただきます。

私の話はいつでも、その時頭に浮かんだことをしゃべらせていただいているわけで、どこで打ち切ってもよろしいんで、しかし、こんなに大勢いらっしやると、あんまりこういうちゃらんぽらんにやっているのが非常に恥ずかしくなってくるんですけど。

それで、超函数の話をしたからもう少し続けますと、とにかく、彌永先生は面白そうだと言って、僕は思うんだけど、これはやっぱり偉いなあと思うんで、誰かが突然やってきて、誰かがかつての自分の学生だったにせよですね、やってきてそんなふうを持ち込んだからといったって、たいていそんなのはつまらないからやめとき、と言っちゃうんちゃんないかと思うので、そう言わなかったのは、やっぱり彌永先生偉かったなと思う訳です。自分だったらどうもそう言いそうな気がするのですが、それはともかくとしまして、吉田先生の助手にさせていただいたときに、すぐに小松先生と——その当時大学院生だったと思うんですが——紹介していただいた。そういう曰く因縁です。プリンストンでもいろいろな、例えばここにいらっしやる中西先生もプリンストンでお目にかかった、中西先生は1年後、61年にいらっしゃったのですがね。いろいろな方と知り合いましたけれどね。

それで、伊原さんのことはやはり61年に、久賀さんも61年にいらしゃったんだったなあ、その時にすごい男がいるという話をさんざん聞かされたのが、その時です。自分ともう完全に10年違うというので、その時は自分ではまだ若いつもりでおりましたから、少し薑が立っているかも知れないけど、自分では若いと思っていたんで、ちょっとショックでございましたが、今は私は御紹介されましたとおり63で、実を言うと来月はもう64になるわけですが。先月でしたか、森重文さんから、まだ物凄く若い方で非常に優秀な方が、2世の方が違ったか忘れましたけれど、やはり後生恐るべしというか、若い方次々とすごい方が出ていらっしやるようですから、心強いことではありますが、わたしもこれからいろいろ若い世代の方々にいろいろお世話になりながら勉強したり議論したりしていければいいなあと思っています。まあ、こう歳取ってくるとね、気持とあれとがなかなかちぐはぐで、思うように行きませんで、つい先日、研究所の中でお別れの挨拶みたいなことをしましたときに、たまたま、自分の今の気持を思い付きで、昔マッカーサーがアメリカの大統領から解任されたときのですね、せりふを引用したのですが、"All soldiers never die, only fade away." というのですが、私もまだ死んだわけじゃあないんで、まだ fade away するだけでございますので、よろしく。もう頭はこちこちになっておりますけれど、よろしくお付合いのほどをお願いしたいと思います。

小松先生にはそれ以来頑張っていたいて、私と一緒に仕事した人の大部分は小松先生の門下。私が京都に22年前に参りましたときに、河合さんと柏原さんに一緒に来ていただいたのですが、河合さんはちょうどその時修士を卒業してこちらに、私は6月にこちらに。駒場の方でいろいろお世話になってあんまりぱっと来れないと思ひまして、本当は69年の春から来るようにというのが、その当時の2代目の所長だった吉田先生のお誘いだったわけですが、1年ちょっとだけ猶予していただいて、次の年の6月に来まして、河合さんがこちらに4月から助手としてこられた。Microlocal Analysis の話が出ましたが、きっかけをいろいろ話してもしようがないけど、小松先生がヨーロッパやアメリカを回られた後で、日本に帰られて、確か1967年に超函数の講義をされて、若い方々、助手から大学院の方が協力してそれをレクチャーノートにされたのですかね。その方々のおかげで私はまた少し生き返って、数学をその時話しました。ここにはいらっしやらないけど、三輪さんもやはり——今ちょっと Tata に行っておられますけど——その数年後に来られて、三輪さんも小松さんの門下。いろいろな巡り合わせで、私も消えてしまわずに今まで生き延びているわけですが、まだ、情熱の残り火みたいなものは少し残っていますので、少し、若い人に嫌がられるかしらんけど、いろいろ嫌味をいってですね、喧嘩をしながら、数学をやっていきたいと思っておりますのでどうかよろしく願いいたします。

最初に超函数のことを外国で取り上げてくれたのが、若くして亡くなったフランスの Andre Martineau という方で、この方とはその後69年に吉田先生の国際会議の時に会いました。59年に Bourbaki セナーに紹介してくれたのが Martineau で、Martineau の門下から大勢 Schapira を初め、森本さんは門下とっていいか知らないけれど。それから、小松さんもヨーロッパでいろいろ学生を作られたんだと思います。柏原さんはもう駒場の頃にすでに Grothendieck なんかを讀んでたような人ですから、cohomology のことはもうお手の者で、河合さんはもう微分方程式の鬼みたいな人だったので、特に Ehrenpreis が好きであられたようですが。そういう非常に良い組合せで私のないものをお二人が持っておられたので、短期間で、。何か周りの方にどう見られているか知らないけれど、実際に microlocal analysis ができたのは69年の後半くらいからかなあ、69年から、最初に microfunction の話を吉田先生の国際シンポジウムでしゃべらせていただいたのが始まりですけれども、69年から2年かせいぜい3年位の内に全部出来てしまったわけです、本質的な所は。出来るときは大体そんなものだろうと思うのですが、後で三輪さんが京都に来てくださったのが73年ですね、ニースからちょうど帰った時ですから。その翌年に神保さんが

京大の大学院修士課程に入ってくださったのですね。神保さんは東大にするか京大にするか非常に迷われたらしいんだけど、どっちも合格していて、それで京都に残ってくれたおかげで。

Ising model のことをやっていたのもこれもいろいろな偶然もあったんで、実を言うとさっき紹介してくださった朝永先生といた時に、先ほど言った事情で、これもあんまり顔を出していなかったんですけれども、席だけ置いていたようなものですけど。一番興味持ったことというところの理論の方で、いわゆる Lehman-Symanzik-Zimmermann なんていうのが50年代の初めごろでしたか後の方でしたか、私がいたのが54年から58年まで朝永先生の研究室にいましたのですが、そのころに南部先生のものとか、それから統計力学の伏見康治先生なんかが「量子統計力学」なんていう本をお書きになって、そんなのもそのころだったと思うのですが、Ising model のことはその時に抽象代数を使って解けるというようなことが書いてあって、面白いと思ったのもそのころです。だから、そういう background があったんですけれども、すぐにそれがやれると思わなかったのはいろいろなきっかけで、最初は場の理論のことを少し、とにかく無限次元の解析をやりたいということが前から下心としてあったんで、それはさっきも少しお話ししたことともちょっと関係するのですが、解析がやはり普通の形では閉じないから、やはり広げておかないと解析自身にしてもだめだからということですね。

これも話があちこちに行きますけれども、Frederic Pham という方に招待していただいて、私ども3人でニース大学にいたのが72年から73年にかけてで、1年居りましたが、そのころに、こちらで2日目だかに話しありました、FBIですね、Fourier-Bros-Iagonizer という名前、Bros、Iagonizer というのがフランスの数理物理学者ですが、その人達とも Pham の紹介でそのころ会ったわけですが、Pham の影響を我々はずいぶん受けている、恩恵と影響を受けているんですが、その時に、要するに microlocal analysis と場の理論を p -表示したものとは非常に関係があるというようなことを盛んに吹き込まれまして、その影響で、場の理論には元々色気があったわけですから、さっそくそれに飛び付いたわけです。それで、Olive とか、そういう人達とそのころ知り合いまして、河合さんが一番そのころ影響をまろに受けて、Stapp なんかとずっと長いことそっちの方をやっておられて。

少しその後で、僕はどっちかと言うと特殊函数みたいなのが好きで、holonomic な物が好きというか、なるべくきっちり最後まで僕の方の方法をやりたいって、そういうことを試みているうちに、三輪さんと神保さんが入ってこられて、それでその時に伊藤恵一さんから、Bariev という人の論文を教えられまして、それを面白いと思って、それであの頃毎年のように東大へ行って集中講義をしておりましたか

ら、そんなときじゃないかと思うのですが、顔見知りの鈴木増夫さん、偉い物理学者でありますけれども——僕より若い、ちょうど伊原さんとか青本和夫さんとかの同級生と私は聞いておりますけれども。私の知っている物理の方が何人かいるんですが、ときどき物理教室へ顔出しして、たまたま鈴木さんの部屋へよって、このごろこんなことをやっている、ついでに Bariev という人の論文が面白そうだという話をしたら、そんならこういうものがあると言って、Wu-McCoy-Tracy-Barouch というのを教えてもらった。それは長い論文で、僕は長い論文なんか見るのは全然だめで、読んでも全然頭に入らないのですけれども、めくってたら Panlevé 函数が出てくるんですね。それで後ろの方に積分方程式が出てくる。あっ、これはなにかあるとその時思ひまして、それで帰って、二人のセミナーでそれをやったわけです。多分あそこでは積分方程式でやっているけれども、これは分岐した面の上での、つまり、最初は2点でやったわけだけど、2点を除外したところでの2価の solution というのを求めれば、再現出来るんじゃないかとおもって、それを最初に神保さんにやっていただいて、神保さんも大分苦勞して、初めはどうも間違っていますと言われたんだけど、そのうちうまくいきますということで、一番大変な計算を、いろいろ Clifford group とかいろいろな道具立てはあったにせよ、Clifford group というのは結局 Onsager のアイデアを数学の言葉で言っただけのことで、Onsager 自身がそういう道具立てを使っているわけですから、free field と回転の方とを。だからそういう抽象的な道具立ては数学者にとっては何でのもない物ですけど、解析的に本質的な部分というのが、数学で彼ら4人の仕事を言い換えてみると2点函数も微分方程式の方の自然な捉え方になりそうだということ。それから、deformation のことは前から僕は——これは数学辞典に感謝すべきことかもしれんけど、そういうわけで僕は自分で文献なんかを勉強する機会に恵まれない生活をしておったから、数学辞典みたいに気軽に読めるものを見て、いろいろな頭の中に雑多な知識があったから——これは絶対 deformation だと思ひまして、それが幸いにしてそれがそのとおりだったわけですが、微分方程式論でもいろいろ気になっている、まだ使いこなしていないデータを積み重ねて deformation のことをやってみたんで、これでこれが少し手の内に入ったと思ったわけです。

それで、なんでそっちの方に脱線したかと言うとこれも実際に仕事を3人でうまくばたばたとやったのは極く短い期間であんまり別にだらだらやっていたわけじゃ決してありません。その後、三輪さんたちは独自にもっとすごい仕事をやっておられることは皆さんご承知のとおりで、最初の日にも神保さんの話を聞かせていただいて、非常に感動を覚えましたが、algebraですね、なんの構造と言っているのかしらないけれど、表現の分解の仕方を保存したままで deform していく family が作れる

のですね。同じ日に大栗さんが話したのも何か Kähler manifold の上の cohomology 環だったかの deformation がやはりつくれる。そういう話というのは代数解析的な面で非常に自然な捉え方だと思います。さっき Lie 群の話の時に Lie 群というのは集合でないと言いましたが、それはやはり Lie 群のばあいだったら、formal group とか、あるいはまた quantum group とか言うのは Hopf Algebra として捉えられるわけで、そういう無限群みたいなもの、あるいは quantum group というのは deform されているから群でないにしてもそういう代数的な構造として捉えられるのは非常に自然なものであります。しかし、恐らく、そういう数理物理で数学者の出番が来ているのではないかと思うのですが、それはまだ始まったばかりですから、これから先まだ、今皆さん quantum group をやってらっしゃるけど、しかし、もっと違うことが本当はたくさんあるはずなんで、もっと本質的に新しいことをどんどん他の人開発して欲しいもので、そういうことはたくさんあるに違いない。要するに、まだ始まったばかりですから、そう思います。

結局何か数学の話をしなければ、と思いながら、こういう退官の時にはありきたりの懐旧談になってしまって、大勢いらっしゃるのに気押されてしまったのかもしれませんが。

こういうところで話すのに相応しいかどうかかわからないのですけれども、少しは数学の話らしい形をつけさせて頂くとしますと、例えば何でもいいのですけど、中学で方程式というのをやりますね。一元でも二元でも何元でもいいですけど、幾何学的な対象、object が方程式でかけるとというのが Descartes の考え方でありますけど。円なら、 $x^2+y^2=1$ という二元二次方程式で書けるわけですね。それが円だというわけですね。それが、というのは良くないけど、もし円というものの幾何学的性質を強調するのであれば、それを直交変換群のもとで考えればよろしいのでしょうか。もっと本質的な性質なんかだと、要するに代数曲線なり、代数多様体なりの intrinsic な性質、例えば genus であるとか、あるいはさらにその moduli であるとかですね。それで theta 関数とかいろいろなことが絡んでくる。これは古典的な理論でして、Euler あたりから始まって、楕円関数の加法定理なんかも逆関数の形で Euler がやっているのはご承知の通りで、楕円積分のいろんな形で言っているわけでありすけれども。あるいは、Jacobi とかその辺のいきさつは良く知られたとおりでしょうけれども。要するに、まあ代数多様体に限るわけじゃないけど、自然な対象として代数多様体というものを考えれば、方程式で書き表される対象であって、それを biregular なり birational な変換で移るものどうしを考える。それはそういう変

換で移るののどうしという代わりにももちろん、可換環として捉えればよろしいわけで、多様体上の正則関数の、あるいは、有理関数の全体を考えるとということがちょうど、可換環の方がそういう代数的な性質を内に秘めているわけで、それを数学的に扱えば、いろいろな性質、望ましい性質を証明しようと思えば、そちらの方でやるというのがもう今日では常識になっていますけど、もともとは Descartes から始まっている訳ですね。変換のことについていろんな機会に私は昔の方程式論で、高木先生の昔の本を読んでいて覚えたことですが、一元の高次方程式なんかのいろいろな変換を昔やって、5次方程式ならどんな標準形まで変換できるかいろいろやられていたわけです。Lagrange であるとかいろいろな人がやって、Tschirnhaus という人が変換の一般論をやって、それは要するに、環なら環の generator をとりかえたらどういう風になるかということを経験していると言っているわけで、そういうふうになにか一つの algebraic system の代数的な構造に対して、generator を選んだり、その generator の間の基本関係式がどう変わるかを見たりすることは、代数にとっては日常茶飯事の基本的なことであるわけですね。それで多様体の場合には可換環というものを具体的に generator を持ち込んで記述してやると、つまり、ある可換環が x_1, x_2, x_3 で生成される場合には、3次元の x_1, x_2, x_3 のつくる Euclid 空間というか affine 空間なり、projective space なりの中で考えている多様体が幾何学的に実現されている ambient space、そして基本関係式が多様体の幾何学的な形を表すのです。それは x_1, x_2, x_3 が実数であるか複素数であるか有理数であるか、あるいは p 進数であるかあるいは何かであるかということは二の次の問題で、それは表現の問題で、つまり垂迹の方ですね。大日如来が本地であって、それが天皇になったのか何になったのか知りませんが、そういう感じのものだと思います。

それと多様体の上の vector bundle とかももう少し複雑な構造ですね、そういうものが、module として表現できるということもご承知のとおり。それが代数幾何を数学的に研究する一番標準的な approach なわけです。解析だって同じだと思っているので、別にその、さっきは少ししおもしろいことも言ったけど、実数が切断であるとか何とかであるとか、そういうものを信じる人は信じて構わないけれども、信じない人を迫害しては困る、と思うわけでして、要するに何だっていいので、解析ができるような property を備えてさえおればよろしい訳ですね。実際に、微分方程式を扱う時に、Euler 以来の一番まともな解析でやっているのは、やはり、そういうものじゃなくて、いろんな代数的な関係と言いますか、微分を含んだ中での代数的な関係を扱っているわけです。ただ、昔小松先生に注意されたけれど、数値解析の立場から言うと必ずしもそういう、いわゆる連続性だとか、関数空間、いろんな種類の何々空間、何々空間が意味がある、それは確かにそうかもしれないので、数値解析の立

場と大分違うのかもしれないと思っております。ただ、私のお願いしたいのは、それだけが全てというようにならないで、もう少し寛容に考えて、少なくとも、いろいろな微分方程式の代数的な構造、あるいは解というものの構造を intrinsic に調べていこうという立場では、今でも大学の数学教育はそういうスタイルになっているだろうと思うのですが、余りそれに染まらないで、学生をそればかりにならないようにして欲しいと思うのです。

非線形方程式だって同じです。線形の場合はどうだったかという、いくつかの未知函数と称するものがある、それを微分したり、既知函数を掛けたりして一次結合を作ったものが $\text{equal } 0$ というのが線形微分方程式ですね。そういうものがまた、いくつか連立しているというのが、一番一般的な形ですけど、この具体的な形はもちろん垂迹な訳で、intrinsic にはそれはどういうふうに表示されるかと言うと、我々の方で選んだ必要なだけの未知函数を選んでやってですね、一個でもたくさんでもいいですけど、それで生成された D-module を考えてやりなさい。今言った微分方程式というのは generator の間の relation にほかならない。D の係数を持ってきた、generator の間の一次関係式ですから、要するに加群の関係式、別の言葉で言えば、加群を resolute したときの 0 番目と 1 番目に過ぎないわけですね。その cokernel が D-module な訳です。それで、ちょうど hyperfunction が analytic function の relative cohomology であるのと同じように、今度は微分方程式に関する概念もそういう D-module に関する普通の homology 代数的な意味な言葉で表現できるわけです。そうすれば、もう、どんな generator を取ってやるとかそんなことは一切関係のない、はじめから intrinsic な形になっているわけですね。だから、もちろん、よい generator を選ぶことに意味がないと言っているわけではないのだけれども、そういう generator を取って具体的に表しておいて、後でいろいろ変換がどうのこうのして、それでも不変であるという議論をするのは、実はずいぶん迂遠なことであるということを言いたいわけです。

非線形の場合でも同じ訳です。非線形方程式という場合には、今度は何であるかと言うと、

D

そのものな訳です。D というのは、ご存じのとおり、ご存じと言うと失礼ですが、D-module の D というのは、線形微分 operator ですね。一般に言えば高次元の場合、線形の偏微分 operator、これらの全体は非可換環をつくっているわけで、その非可換環の上の module を考える、つまり、代数幾何の場合は可換環とその上の加群の

つくる category を持ってきて考えるわけだけれども、今度は、非可換な D と言うものの、非可換と言ってもさっきも言いましたとおり、非常に modest な意味でありまして、つまり微分 operator のトップの部分は実は可換な訳です。つまり、 n 回の微分 operator と m 回の微分 operator との積を作る、それぞれ A, B と思って、 AB と BA というものを比べるとトップのところは一致しているわけです。それで、後のお釣りの部分がくい違っている。だから、 AB と BA との差を取ってみると、それは階数が $n+m$ より下がって、 $n+m-1$ に高々なっているわけですね。そういう意味で非常に可換に近い、準可換とも言うべき状態でありますから、そんなにめっちゃめっちゃに非可換ではないわけです。だから、いろいろ可換に近い、良い性質がある。例えば商環の理論が作れる、それが、microlocalization と称するもので、可換環の localization に相当する訳です。

それで、 D そのものは何か。つまり、代数幾何の場合には、 A という algebra があって、これが多様体を表していて、この上の module のつくる category というものの中で、この多様体の性質を議論できるわけですね、ある意味で。それと同じことで、今度は D というものがひとつの対象である。 A として一番簡単なものは one point ですね、one point というものは 0 次元の多様体ですが、one point に対応する A というものは、考えている係数体、有理数体なら有理数体で、そういうものにほかならないわけです。ですから、こちらの方には構造が入っていないとするわけです。それで、 D の方も同じことで、可換体に相当する一番 trivial な非可換環というのは、多項式係数で考えれば、Weyl algebra というのですか、名前はどうでもよろしいですけども。一般の代数多様体を定義する環の中には、代数方程式がいっぱい implicit に入っているわけです。Generator を選んでやれば、それらの間の関係式がたくさん必要になってくるわけです。今度の場合も、 D というものを考えたけれども、ここに未知関数が潜り込んでくるという訳です。つまり、具体的に言うとうすね、nonlinear differential equation の最も general な system がどういうものかと言うと、未知関数

$$u_r \quad (0 \leq r < m),$$

それから、独立変数というもの

$$x_i \quad (0 \leq i < n),$$

本当は未知函数と区別する必要はないんですけども。 x_i を独立変数とする未知函数を微分したものを

$$u_r^{(v)} = \frac{\partial_0^{v_0} \cdots \partial_{n-1}^{v_{n-1}} u_r}{\partial x_0^{v_0} \cdots \partial x_{n-1}^{v_{n-1}}} \quad v = (v_0, \dots, v_{n-1}) \quad v_i \in \mathbb{N}$$

と書きます。そうしたときに、nonlinear differential equation というものは、これらの間の関係式、一番簡単なものなら多項式関係、多くの場合はそれで間に合うわけですが、例えば

$$F_k(x_i, u_r^{(v)}) = 0 \quad k=0, \dots, N-1$$

関係式は無限個は出てこないとするわけです。こうした形の N 個の方程式が与えられている。こうした場合に、どういうことになるかということ、普通の D というのは、微分 operator

$$\delta^{(v)} = \delta_0^{v_0} \cdots \delta_{n-1}^{v_{n-1}}, \quad \delta_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \delta_{n-1} = \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$$

の上に、既知函数、例えば x の多項式なり、あるいは他の category での x の有理函数でも何でもよろしいですけど、そういうものをもってきた有限一次結合の全体を D として、それが一つの閉じた非可換環を作っているわけですね。その上の module の議論が線形微分方程式の議論だったわけだけど、今度は係数が既知函数じゃなくて未知函数を許すわけです。だから、今度は何で生成されるかと言うと、generator は u_r たちと x_i たちと、 δ_j たちですね。例えば、この δ_j を u_r にほどこすというのはどういうことかと言うと、

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_i} = [\delta_i, u_r]$$

という commutator と考えればよろしいわけですね。微分 operator と函数との commutator が丁度 derivative を表すわけですから、上に出てきた $\frac{\partial u_r}{\partial x_i}$ は generator ではなくて、 u_r と x_i と δ_j というものと合計、 $m+2n$ 個の element で生成された非可換環として、もし多項式係数で良ければ、 D が定まるわけです。多項式係数

でない場合はいろいろしなければいけませんけれど、今細かいことは抜きにしまして、そういう D を考えてください。それをもちろんもっと intrinsic な言葉で言うことは出来るわけで、 D にある種の filtration があって、いろいろ条件を付けたほうが自然なわけですが、細かい話は今おきまして、とにかくですね、filtration と言いますのは、有限個の函数と微分 operator との commutator を繰り返し繰り返し取っていけば、 $u^{(v)}$ の方は作れるわけです。そして、公理としては、こうして commutator をとって作ったものはお互いに commute する、それはひとつの relation ですね。あとは、関係式 $F_k(x_i, u^{(v)})=0$ 。もう一つ言うと、 x_i と δ_j との commutator は Kroneker delta になって、それはもちろん自明ですが、それはこういった書き方をしたからで、もっと抽象的に言ってもよろしいが、要するに、自明なというか、誰でも知っているようなことを関係式として仮定する、それが微分環 D としての構造を付与していると考えられる。それから、微分方程式に当たる構造もあるわけです。それだけいうと何か、独立変数や従属変数や微分演算子というものがみんなばらばらに見えるかもしれませんが、それは今、具体的な方程式を書いてご説明したから、そうした印象を与えてしまったわけで、実際には別に独立変数と従属変数との区別もありませんし、もっといろいろな変換が出来るわけです。さらに、商環を作ってですね、つまり microlocalization みたいなことをやりますと、microdifferential operator なんかを考えますと、もっと柔らかい構造になってくるわけです、当然のことですけど。そういう議論はもちろん出来るわけですね。

とにかく、そういうふうにして D というものを、今具体的な例からいかにして D を作るかというお話をしましたけれども、要するに、結果としてはこれは何かと言うと、線形偏微分 operator であって、その係数の中に未知函数の derivative を含んでいるもの、こういえばよろしいわけです。しかし、未知函数の derivative どうしは独立変数ではなくて、代数的な関係がある、これが微分方程式である。だから、この D と言う物を見てやれば、微分方程式の情報は全部入っているわけで、しかも、具体的な generator の取り方というようなことは関係ないわけです。あるいは、Soliton の人達が昔良く使っていた、Bäcklund 変換というのは、元々、Monge-Ampère 方程式に関連して導入された概念ですが、それを非常に拡張して使っている言葉ですが、いずれにしても、そういう変換というのはご存じのとおり、普通の変換と違っていろいろ derivative を含んだ変換をしているわけですね。Miura 変換とか、何にしても。あるいはもっと古典的な例で言えば、正準変換なんていう場合には、1 階の偏微分方程式を扱う時に、momentum や何かを、まあ、余計な話はやめましょう。

とにかく、微分方程式論の中では、正準変換なんていう場合には、要するに、単なる変数の変換とかそういうものとは違うわけですね。独立変数と従属変数がいろいろ混ざって変換されるわけです。そういう変換のことも、もちろん built-in されているわけです。だから、この D の性質として、cohomology を始め、たくさんの概念が構成できるわけなのです。あるいは、 D の上の module の作る category、そういう中での intrinsic な言葉を使って、定義された概念というものは、初めから変換で不変ということは自明なわけですね。だから、いろいろ具体的な resolution を作ってどうのこうのと言った議論以前にそういう所でいろいろなものが定義できるというわけです。

Solution というものは、可換環の場合であつたら、多様体の点というものは、例えば、有理点を求める時には、環 A から有理数体への homomorphism を求めれば、 A の有理点というものが与えられるわけですね。線形方程式の場合だったら、 D -module M があるときに、 M から、例えば、良くわかった holomorphic function とか、real analytic function であるとか、hyperfunction であるとか、microfunction であるとか、そういうところへの D -homomorphism を与えてやれば、それは、もとの線形微分方程式の holomorphic solution や hyperfunction solution や、その他いろいろなものが求まる。それと同じことで、非線形微分方程式を解くということを、こちらの言葉で言ったら何か。この D ですね、いくつかの axiom を満たす filtered ring になるわけですが——filtration と言うのはこの微分方程式の階数から入ってくるのですが——この filtered ring からよく知られた filtered ring への homomorphism が即ち、この方程式を解くことにほかならないわけです。良く知られたというのは、例えば、収束冪級数のところで解く、これが Cauchy-Kowalewsky 型の定理ですけれども、そういうときだったら、例えば、原点における local solution を求めるのだったら、そこにおける収束冪級数の作る環の上の普通の D を取ってくるわけです。よろしいですね。そこで、非線形方程式を表す非可換環の方から、よくわかった D の方への filtered ring としての homomorphism を求めてやれば、それがつまり方程式を解いたことになります。つまり、非線形方程式を表す D の element を全部置き換えるわけですから、その中の x_i が例えば(よくわかった) D の x_i に行ったとしますね、それも別に初めから言う必要のないことなのだけれども。同じ x_i というのは良くないかも知れないけれど、(よくわかった) D の方の函数を z_i とすると、非線形方程式を表す D の x_i が解の方の z_i にいったとしますね、そして u_r が何になったかということ、階数 0 の元にいくわけです。階数 0 の部分、 $D^{(0)}$ の部分というのは、まさに(よくわかった) D の函数の部分になるわけです。この(よくわかった) D というのは、今言った、局所的な解析函数の環、あるいは体でもよろしいけれど、まあ環ですね。すると u_r

というものが何になるかというと、0階のものは0階にならないといけないから、 $D(0)$ の中に入るわけですね。 u_r の行き先が具体的な z_i の収束冪級数になってないといけない。当然、0は0に行かないといけませんから、 $F_k(x_i, u_r^{(v)})$ は0に行かないといけない。 u_r の行き先が元の方程式を満たしているというわけで、(非線形方程式を表す) D から(よくわかった) D への homomorphism が、具体的な、垂迹した形で言うならば方程式を解いたことになる。それは同時に、元の方程式と同等な、いろいろ難しい変換をしてえられる別の方程式ですね、Bäcklund 変換でも何でもよろしい、そういう変換をしてえられる方程式を解くのと全く同等で、そういう区別は一切ここではしていない、こういうわけですね。

僕が言いたいのは、D-module の場合にはある程度認めていただいたように、いろんな数学の中の具体的な問題が、こういう非線形方程式に絡んだ問題が、こちらの言葉で言えば、無駄なエネルギーをずいぶん省略できるわけです。こっちの方で、いろいろな構造定理をやらなきゃいかんことがいっぱいあるわけですが、少しはやってあるし、例えば、infinitesimal な解の deformation、方程式の deformation のことも面白いことがいっぱいあるのですが、そういうことは、今は思わせぶりかもしれないけどやめておいて。何年か前に、Johns Hopkins で話をしたとき、そういう話をさせていただいて、その時の話は塩田さんがノート(5)して下さったのだと思いますが、その時にそういう話を少しさせていただいたと思いますが、これはもう長いこと胸に何十年も、30年位か？ かなり真面目に考え初めようと思ったのが70年代のわりと早い時期ですね。そのころから、これをやりたいやりたいと思っていたのですが、なかなかチャンスがなくて、そのうちに私自身の方が毫碌してしまったわけで、まあなんとかすっかりこれが去ってしまわないうちに、誰かに引き継いでいただけたらなあと思っているわけです。

今日、午前中に竹井さんが話してくださった話と、どういうところでつながるかと申しますと、私は、ああいう方面の話は再び Fredric Pham に影響を受けたのですが、いわゆる alien calculus というのですか。そのことを真面目に考えるようになったのが、3年かそこら前に、ギリシャであったある研究集会で Pham の話を聞いたときに、これは真面目にやらなきゃいかんと感じて、それから帰ってきてから河合さんと一緒にこういうことを始めたわけですね。それで、時間感覚がわからなくなってきた、いつがいつだかすっかりわからなくなってきた、だいたい頭がいかれてきているからわからないのだけど、とにかく、今日お聞きになったように、竹井さんなんか非常にがっちりした結果を出しています。Voros という人の仕事に関係あるのですが——こちらの方は数理論理学者やいろいろな人が関連した仕事をやっているのですが——一番整理した形でやったのが、Voros と、あまり微分方程式と

は関係ないけれども、Ecall ですね。Ecall の alian calculus とふつう言っていますけれど。

河合さんたちがおやりになったことで一番大事なことは、午前中の話のまとめの中にありました。要するに、解析的な solution についての structure を表すのが monodromy なんですけれども、monodromy 群と別の解析函数とのつながりを付けるのがいわゆる resummation と呼ばれるものです。それは、二つの違う category を結び付けるもので、一つは解析函数の方での $D(0)$ ですね、そちらは普通の解析函数、実際には holonomic ですから global になるわけですが、もう一つそれと違った——我々の方の言葉で言えば定数係数の擬微分作用素といったものになるのですが——物理の方で言えば small parameter、例えば Planck の常数に関する formal power series みたいなものです。我々の言葉で言えば、microdifferential operator、一変数で言えば、

$$\sum_n a_n \partial^{-n} \quad (*)$$

これも formal な category から解析的な category、いろいろありますけれど、解析的な category でも普通の意味で収束する冪級数ではないわけです、発散しているわけです。発散していても、microdifferential operator としては、かなりゆるい条件でこれは収束してくれるわけです。そういう category で考える、だから、普通の local な収束冪級数よりはずっと広い category を考えることに当たるわけです。そういうところで solution を持てばいいわけですね。これは一種の filtered ring で、微分 operator という意味は、階数と言う物が定義されているわけで、(*)の全体は filtered commutative algebra になっているわけです。ちょっと話がごたごたしますけれども、

(*)の全体は可換環です、それに普通の z_i とか微分 operator $\frac{\partial}{\partial z_i}$ を添加してやる、そうして得られた D というものが、この場合、普通の解析函数の category で微分方程式を解くのととは違った、別の filtration の入った可換な函数環

$$\sum_n a_n(z) \partial^{-n} \quad (\#)$$

の上の微分 operator と考えられるわけです。これも、ある意味でよくわかったと言っている、別の D を作るわけです。だから、普通のように解析函数の上で解くというのと違って、(#)全体の作る環の上で解きなさい、それがあの場合には WKB

analysis とよばれるもの、もっと一般に言えば singular perturbation と呼ばれると思いますが、そういった形になっているわけです。そして、これは今私は D からスタートしまして線形方程式でしゃべりましたが、線形方程式に限らないわけです。特にある種の gradation がはいったような非線形方程式ですね、それは例えば、soliton の方程式に出てくるのも、広田の bilinear equation とか何とか言うのも、一種の homogeneous な構造を持っているわけですね。そういう場合にまで拡張できるわけです。そういうレベルでですね、singular perturbation 的な解を議論できる。

そのいいところとは何かと言うと、これは恐ろしく D -module の構造が簡単になるのです。つまり、 D -module の分類というのが物凄く簡単になってですね、みんなある意味で雑に言って、gradation がはいった特別な場合ですが、線形の場合は全部それに当てはまるし、bilinear の場合も、degenerate してなければそれに当てはまるわけですが、あるタイプの場合には D -module の構造論、つまり D -module のつくる category の構造が非常に簡単になってしまいます。それが、Voros たちの calculus の非常にいいところで、つまり、解析関数の空間で議論すると、monodromy というものは非常に高級なわけですね。Monodromy っていうのは、普通の Gauss の超幾何なんかの場合だったら、monodromy は非常に簡単に計算できて、具体的に monodromy matrix が Γ -関数か、もっと上手にやれば指数関数の範囲で求まってしまいうわけです。だけれども、ちょっと確定特異点が4個以上になると、もうそうはいかないわけですね。Panlevé なんてものが出てきてですね、Panlevé と言ったって、Panlevé 方程式を解けば monodromy が求まるなんて訳には残念ながらいかないのです。して、Panlevé 方程式が言っているのは monodromy を変えないように変形するとこういう方程式で支配されると言っているだけです。初期条件を与えないと monodromy は計算できない。だから、ある意味で堂々巡りをしている面があるわけです、monodromy を決定するという問題から言うならば。ところが、この Voros たちの calculus はですね、そういうのに対しても非常に強力なアプローチを与えている。ただ、まだ100パーセントなんて言うわけにいかないことがいろいろあって、本当に holonomic 教の教祖になるためにはまだまだとてもその資格はないのですけれど、とにかくかなりいいことがいえるわけですね。それが、竹井さんがまとめた形で言われたことで、つまり普通の解析関数の空間と、今言った(*)の空間との対応がつく訳です。特に、solution の場合にはしかるべき意味で実際に同型対応がつくわけです。まあ、二つの間は現実的な意味で同型じゃないけれど、部分的な同型と言うべきかもしれませんが、とにかくそういうものがある。

それがいわゆる resummation とか Borel 変換とか言われているものになる訳ですけれど、しかしそれは unique じゃないんですね。つまり、向きを変えていくと丁

度それは積分路を動かすのと同じことで、積分路をちょっとくらい動かしたって結果に影響はないけれど、どっかで何かを取り込んだりすると、がたっとかわる訳です。それと同じことがあって、この同型というものも、ある積分路の取り方によってですね、つまり、resummation の積分の取り方によって、多少くらい動かしてもこの同型対応は stable だけでも、あるところではあっと急に変わるわけですね。そういうことが起こるわけです。一種のこれも homology 的な感じと非常に良く似て、obstruction でいろいろなことが起こるといふのと似ているわけだけれど、とにかく、この対応が unique でないわけです。Unique でないけれども、あるやり方をあらかじめ決めておいて、あまり遠くまで動かさないで、近所だけでゆらゆらさせてやれば stable な対応がついているわけです。その意味でですね、ちょっと unstable といふか unique ではないけれども対応がつく。だから、(*)で解いておいて、解析関数の空間へ持っていくというふうにすれば、(*)で解くというのは、ある意味で数学的には非常に簡単なわけです。ただ、もちろん無限級数が出てくるから、まだいろいろ、本当に holonomic 的にぱっといっているというのは言い過ぎなんですけど、しかし、かなりいい構造が入っているわけですね。そのことを竹井さんが言われたわけで、(*)の方では、D-module の言葉で言うならば、D-module が projective と言っていると思う——僕は余り詰めて考えていないけれど、多分、そういいたいと思うんだけど——要するに、一階化されてしまうわけです、本質的には。

Projective という場合も、結局は乱暴に言えば、free module の直和になっているということに非常に近いわけですね。大体そういう感じになっている、あんまりうるさいことを言わなければ、そういう感じになってしまうわけです。ちょっと今は類推で乱暴に言葉を扱ったかもしれないけれど、もう少し正確な言い方をするためにはもう少し準備して言わなければいけないけれども、大体、(*)の方で考えたときの solution を考えるとそれは、今度は D 自身がいろいろなものを取り込んでしまっていて、とにかくそちらの方で解くことは非常に簡単な問題になってしまうわけです。大体一階の方程式を解くことでかたずいてしまうわけです。

一階の線形方程式を解くということは、何か係数を積分して、

$$\psi = e^{\int S dx}$$

こういう感じになってしまうわけですね、大体において。この肩に出てくるのが Riccati 方程式の解にあたる、Riccati 方程式というのは 0 階の方程式といっている

んです、こっちの立場でいって。つまり、代数的に解ける。無限級数は入ってくるけれども、これはある一定の仕方で代数的に解けてしまう。そのところで Riemann 面が入ってくるわけですが、そういう構造になっているわけです。

この積分が非常に良い性質を持っていて、その D-module に proper の量として—— ψ 自身はそうじゃないんですけど、generator でありますからそうじゃないんですけど—— generator ψ の対数微分を取ったものは ψ の取り方によらないことがいえるわけです。

このことは線形に限らないで、さっきいったように、graded な構造をもっていて、ある generic という条件を満足していれば、そういうことは実はいつでもいえるわけです。だから、(*)での議論は物凄くしやすいわけですね。それを解析関数の空間に変換してやれば、本当の解が求まるであろう。ただそこで、どこかの threshold を越えるとですね、obstruction を越えると、関係が変わってくる。その関係のことも、河合さん竹井さんが非常にきれいに出しておられる訳で、非常にこれは基本的な結果であります。まあ、Voros なんかの仕事に、Voros は monodromy そのものはやっていないけれど、別の関係でそれに相当することをやって、先業があるわけですが、すけれども。

私はもっと一般の高次元の問題ですね、つまり、この議論は holonomic であればそのまま高次元にもっていけますけれど、holonomic でない場合にどこまで holonomic 化できるか。まあ、holonomic と言う言葉も、いろいろな階層で使っていて紛らわしいかも知れないけれど、そういうことがあるわけです。

大分、こんなにいい加減なことを言っているうちに、時間がたってきましたけれど、そういうわけで、こういう形で言って非線形方程式を解くというのは、未知関数を含んだ、そういうものを飲み込んだ D というものを——この D というのはどういう公理系を満足する filtered な非可換環であるということはちゃんと言えるわけですが——そういうものを与えることが微分方程式を与えることであり、それから holomorphic なり、(*)のような、WKB と言い過ぎですけど、とにかくそういう category で解くわけですね。解きたい空間を用意して解くわけです。けさの話の大事な点は、違う category で解いてもその間に対応がついて、対応の付け方が unique でなくて、そこでまたいろいろ automorphism の間の対応が面白いわけですが、そういうことが出来るということです。そこが singular perturbation による解法の非常に際だったところですね。その singular perturbation というのは、今まで応用数学者しか扱っていなかったから、近似解で満足していたわけで、実は近似解でなくて exact な議論が出来るわけですね。非常に大事な点です。と言うのは、場の理論を初めいろいろなところで出てくる、恐らくこれから必要になるだろういろんな situation で、そういう漸近級数解を扱う必要がいっぱい出てく

る。その漸近級数解というものが数学的に natural な、数理物理学的に natural な background から出たものであれば、まずまちががなくこういう Ecalle 的な扱いで、良い性質を持つてくることはまずまちがないと言っていると思う。その意味で、純粋数学者が丁度代数幾何を扱うのと同じように、真面目に考えるに値する対象ということをおきたいと思います。

それから、何からこっちへ脱線したのだったかな、いずれにしてもとにかく私としては、ぜひこの nonlinear differential equation の algebraic analysis ですね、そういうものを若い世代の方々が真面目に発展していただけたらありがたいと思っておるわけです。

昨日の話で、b-函数の話をお藤盛彦さんがされましたね⁽⁶⁾。それから、京都では、大阪からいらした行者さんがいろいろ概均質ベクトル空間のことをやっておられるし、それから、b-函数関係で言えば——今、柏原さんはアメリカに行っていていませんですけど、再来月か5月の初めくらいまでいませんですが——亡くなられた新谷さんが概均質ベクトル空間のことをいろいろやってくださった時に、本郷にたまたま集中講義か何かで行ったとき、その時柏原さんも一緒にいたんですが、新谷さんからb-函数といっても定義はあっても計算の仕方が brute force しかやれないのがおかしいのではないかという批判を受けまして。気分としては絶対そんなことはないと思っていたんで、私はb-函数のことを61年に考えた時にですね、 ζ -函数とか超幾何函数とかそのころ考えたんですけど、要するに僕の感覚としてはそれらを factorize した時に出てくる因子も、何か代数解析的に計算できるだろうということは思ったわけです。特に、microlocal analysis ができて——これはもう河合さんが一番お得意なあれだろうけれども、bicharacteristic とかあるいは characteristic variety、Lagrangean の場合は両者が一致するわけですが、そういうものが線形微分方程式の key concept なわけですけど、そういうものを介して微分方程式についての計算が出来る。例えば、singularity の伝播、あるいは正則性の伝播とかも全て、そういうものを媒介としてえられる。Microlocal calculus というのは holonomic system を使って、Lagrangean manifold 上でのいろんなデータがその上を伝わっていくし、Lagrangean manifold がたくさんあれば、codimension 1 の交わりを通じていろんな性質がちゃんと伝わっていくから、そこの計算をしていけば全てのものが計算できるであろうという原理ですね。そんなことは絶対、代数的な、algorithm 的に計算できるはずだというふうに言ってみた。

その夕方、柏原さんをつかまえて柏原さんと二人で discuss して、柏原さんは初

めはそんなにうまく行くかどうか大分懐疑的だったけれど、そのうち確かにそれでいきそうだと言って、僕は agitate したただけなんです、こういうやり方でできないはずはない、僕は100パーセント正確に言ったとは思わないけれど、とにかく感じを、僕はなんで出来るかと思うか理由を言ったんで、僕は本当にきちんとしたことを言ったかどうか自身がないけれど。多分次の日くらいだったかな、その時に実際にその algorithm が出来たわけです。今実際に microlocal calculus というふうに呼んでいるやつなんですけれど、holonomic system を媒介として、それに支配されている関数のいろいろな性質を全部、algorithmical に計算できるという原理ですね。

ただこの原理はまだ欠点があるということを、昨日も僕はコメントしたかも知れないけれど——この場で言ったのか僕は覚えていないけれど、斉藤盛彦さんにそういうことを言ったのかもしれないけど——とにかくですね、まだ不満なわけです、いろんな点で。例えば、新谷さん自身はそんな高級、高級かどうかしらんけども解析学のテクニックを使わずに、微分方程式を媒介とせずにといたら言い過ぎかも知れないけど、少なくともそういう Lagrangean manifold を媒介とする解析を使わずにですね、裏返し変換、castling というものをした時に b -関数がどういう変換を受けるかという計算をやってしまったわけです、非常にきれいな公式を出した。それを解析的に導くのは大変で、少なくとも、まだ僕はそれはどういう風にやっていいかわからない。それは出来ないというのはおかしいので、微分方程式というものの原理から言えば、微分方程式というのは characteristic variety、とくに holonomic system の場合には Lagrangean manifold の上の sheaf なわけです。だから、その上の幾何学的な計算、標準形で定義されるいろいろな不変量というものは、方程式が与えられれば、みんな直に計算できる量なわけですが、そういうものをこつこつと計算していけばですね——多分 work station なんかにもしいずれのせることが出来るようになると思うんだけど——そういうことをやれば、 b -関数の計算でも、Fourier 変換の計算でも全部出来なければおかしいんです。ところが、実際にはいろいろトラブルが起こる。Codimension 1 できれいに交わっているところばかりじゃないんですね、昨日も行者さんが言っていたけれど、これは regular でない場合にこういうことが起こるのはある意味で当然なんだけど、Fourier 変換すると Fourier 変換されたやつがこんどはある subvariety の上に support を持つ、つまり δ -函数的な factor を持ったものに変換されてしまう場合も起こるわけです、正則でない場合にはですね。そういう場合には、holonomy diagram が codimension 1 のつながりを持たないとか言うのですね。そういうことも起こるし、それからまた、codimension 1 で交わっている場合でも非常に退化した交わり方をしている場合には、一種のやはり desingularization、広中さんみたいなことを微分方程式でやろうと、これもずいぶん

昔考えたんだけど、ある程度やってそれっきりほったらかしになっている。それもあんまり可換の場合をそのまま真似してもいかんことは当然なんだけど、何かの意味で、つまりあんまり文字通りに——こういうことは何でも文字通りに取るのがいいとは限らないのだけれど——とにかく、何かの意味で desingularization をやって、要するに microlocal calculus がきちんとできるようにしたいわけです。

さらに、microlocal calculus というのは別に prehomogeneous vector space には限られてないので、要するに、holonomic system があればいつでもその原理はあるわけです。つまり、この場合にも特殊函数、microfunction というものが Lagrangean manifold の上にのっかっているわけです。方程式自身の support がその上にのっていますから、solution であるところの microfunction も、実は Lagrangean manifold の union の上にのっかっているわけです。Lagrangean manifold どうしが何かある有機的な仕方で接続しているわけですね、そこをどういう風に伝わっていくかということの計算をやるんですから、全くこれは算術的というか、初等代数の問題に帰着されているわけです、原理的には。ただ、generic な場合、あるいは少しくらい退化していても割とおとなしい場合、そういう場合は柏原さん自身や、もう少し一般のもう少し degenerate した場合なんか大島さんがやったんだと思いますが、柏原さんや大島さんや木村さんなんかの、僕は何も書いていないんで、僕の名前がのっていて恥ずかしいので、それを見ていただくといいので、ただ、そういう意味で、一番基本的な場合をやっただけで、基本的というかとっかかりをやっただけで、本当はもっともっと非常に一般に使える原理なはずなんです。

非可換の場合だってそんなことが出来るわけです、本当は。僕はそう思うんですけどね。非可換の場合の、無限小 deformation に対する線形化なんてことは、大分前にやって、さっき言った塩田さんが書いた中にも多分その話がのっているだろうと思うんですけど、そういうこともあります。これも非常に自然な形で、代数的な形で定義できるのですけれど、いろんなつながりがありますので、非線形の場合にだって、microlocal calculus 的なことは絶対使えるはずだと僕は思うんですね。新谷さんが残した宿題がまだ解けていないんだけど、とにかく、代数的な非線形連立微分方程式というもので、ある数学的な問題が提起された場合に、もう少しそうしたことがちゃんと完結しておれば、原理的には全てもうコンピュータで解けると思っている、work station で解けるはずだと僕は思っているんだけど、それは言い過ぎかもしれない。

ただ、holonomic ということはいろいろ難しいことがありましてね、さっきも言いましたように、例えば、普通の determined または overdetermined system で holonomic でない場合を扱うときにですね、僕は線形の場合だったら、Riemann 函数を媒介としてそっちへいけるんじゃないかというのが一番最初の考えだったけ

れど、ちょっとやってみると、変な場合が起こってきて、なかなかそれで完結できないのがすぐ判るんですね。しかし、何かの意味で holonomic に近付けるはずだと思うんです。そのためには、問題を不自然に制限しておくためにだめになるということは、しばしば数学では起こる訳ですから、だから例えば、線形と非線形を一体化して考える、これは当然そうすべきことなわけです、そうすべきことなわけですね。線形方程式を考えたときに、その係数を deform して考えるとたちまち非線形方程式が出てくる、あるいは Yang-Mills 場でも何でもいいけれど、あるいは soliton でもいいけれど、そういう場合でも、線形方程式に対する compatibility condition として、やっぱり非線形方程式が得られる。それはみんなこの D なわけですね。線形方程式は D の module なわけですね。だから、線形と非線形は元々別のものじゃないわけですね。ですから、線形だけで扱うということが間違っているというか、不完全なことは初めから明らかです。そういう意味でも、この D のことをやるべきですが、それで完全に安定な世界かと言うと、あくまでそれは一つの symbol 的な言い方なのであって、そこは曰く言い難いですけど、かなり、線形の話だけでやっているよりはいい世界になっていると思うんですけど、そこから先は余り言わない方がいいかも知れませんが、。

場の理論でも統計力学でも、つまり無限自由度というものには普遍的な構造があるということは、今ではもう数学者もかなり認めておられるわけで、つまり、無限というのは決して有限の n を無限大にしたものじゃないんで、無限には独特の無限次元の構造があるわけですね。丁度、無限群と有限群との間の違いと同じように、有限次元と無限次元にも、無限次元には無限次元 proper の自然な数学的な構造があるわけで、それは統計力学、例えば lattice の理論なんかが場の理論と同じ構造を持っているということは、ずいぶん早くから久保先生を含めて、Kramers とか、いろんな人がとにかくそういう場の理論と似たようなテクニックで問題を formulate しているし、実際、Ising にしてもあるいは Baxter model にしても、そういうアプローチで解かれてきているわけですね。そのほかにも、いろんな物性論の問題なんかだったら、固体の中の音波というものを格子振動の波として、それを一つの粒子と考えて、いわゆる phonon、擬粒子といいますかね、普通は粒子でないほかの粒子の作る所に生ずる波みたいなものを粒子扱いすることも出来る訳で、つまり、場の理論というのは何も場の量子論、素粒子論専売のものじゃ決してないわけで、あらゆる無限自由度を持つ structure にはいつでも出てくるわけです。物性の理論にも出てくるし、それから京都で言うと、松原先生の温度 Green 函数なんてもの、あるいは流体力学の方でも乱流を表すのに、乱流場というのか、やはり Green 函数み

たいなものを使っているようですね、あんまり細かいことは知りませんが。

要するに、無限自由度を扱う形式として自然にN点函数というものがでてくる。それは場の理論の構造に他ならないわけです。N点函数、1点函数、2点函数の個々が閉じているんじゃないで、全部のN点函数全体で初めて閉じた関係が成り立つわけです。そういう構造になっていて、それは場の operator、場の理論の形で言い換えることも出来ますし、あるいは、path integral の方で表現できることも出来るでしょうし、対象がたとえば粒子じゃなくて、string、南部さんやなんかの string になったとしても場の理論としての構造に変わりがないわけです。だから、要するに無限自由度の解析学というもののな訳ですから、これからは、物理学者がもう投げ出してくださったわけですから、数学者が、。

String が果たして重力を説明するかどうか、そういうことは判りませんが、とにかく、例えば Laplace の方程式が解ければ、それが電磁場にも使えるし、流体にも使えるし、Newton の万有引力にも使えるし、そのほかいろいろな所に、Laplace の方程式、要するに調和函数が使えるわけです。それと同じことで、非常にいい、数学的に自然な model について数学がやれますと、model に限らないけど、とにかくある無限自由度に関する非常にきれいなもの、例えば量子群でもよろしいですけど、そういうものが数学的に発展しますと、それを当てはめる物理的な model はどうせたくさんあるに決まっているわけです。このごろは場の理論でも、元々物性やなんかで開発された概念をいっぱい持ち込んでいるわけですね。ですから、ちょうど19世紀、あるいは、20世紀以前にいろいろ名前が出てくる数学者がいろいろ古典物理の問題をやったのと同じように、そういうところにもちゃんと Abel 函数やら何やらいっぱい出てくるわけですが——最近では Panlevé なんかも出てくるわけですが——それと同じことが将来もっともっと徹底して無限自由度に関係して起こると思うのです。

Yang-Mills 場というのも、glueon とか、weak interaction の場合の lepton の理論とかに使われている訳ですが、もともとはそういうものじゃないに、量子電磁気学だけではどうもだめらしいというので、それを少し拡張して——メソン、中間子の理論が出来た前だったと思うのですが——Yang-Mills がそういったものを考えたのは別の motivation で考えたのだと思います。それが後になって、他のことに使われた。それから、string だって、もともとは南部先生が考えた時には別にあんな短い string を考えたわけじゃなくて、もう少し長い、つまり普通の素粒子を説明するためのものとして考えたのじゃないでしょうかね。Veneziano とかそういうのに関係して。

話は脱線しましたが、数学が出来ればそれを適応する物理的なモデルというのはたくさん出てくるだろうと思うわけで、もう数学者がそういうことをおやりになるのは自然なことだと私は思います。物理学者には叱られるかも、あるいはけしからんと言われるかもしれませんが、物理学者がこのごろおやりにならないことも、数学者の方はそれを見捨てないでやりますからよろしく。

話がいろいろ脱線しましたけれども、これも1960年の時の話ににも関係するけれど、なんとかして holonomic ということをいかしていきたいと思ってきて、今日その関係で少し脱線してやったことをお話ししようと思ったけれども、あんまり今日話すところまでまとめる時間がなかったので、次の機会にそれはいたしますけれど、そろそろちょうど時間のようですね。私の話は初めも終わりもないような話だから、この辺でちょうど、、、。

本当につまらない話で終始してしまったのは毎回のことで、大変申し訳ないので、もし私の話を聞くためにいらっしゃった方は非常に申し訳ないので、お詫びするほかありませんが、でも私の話がいつもこうちゃらんぼらんだということをきっと知ってらっしゃると思うので、それに甘えて、許しを請う次第であります。どうもありがとうございました。ただ、私、決してこれで最終講義とは思っておりませんので、どうか、

河合：「また別のシンポジウムにも呼びますけれども」

誘っていただけたら話をさせていただきますのでよろしく。まあ、これからいろいろ若い人にちょっかいをかけて、話し相手になってもらいたいと思っているので、余り毛嫌いしないで、話を付合ってくださいるように是非ともお願いする次第であります。どうもありがとうございました。(終)

筆記者註

(0) 講演の前に、小松彦三郎氏が英語で紹介されました。小松先生のスピーチも味わい深いものでしたが、ここでは省略させていただきます。

(1) 佐藤幹夫：線形偏微分方程式について 東大大談話会記録（1960年6月24日／8ページのノートが東大数学図書室に残っています）

(2) 斉藤 恭司 「Teichmüller modular 函数について」 研究集会「代数解析学／整数論」講演

(3) 青木貴史－河合隆裕－竹井義次 「WKB解析、周期積分、変形、…」 研究集会「代数解析学」講演、話者は竹井義次氏。

(4) この後の、織田氏のノートを参照。

(5) "D-modules and nonlinear integrable systems", Igusa ed., "Algebraic Analysis, Geometry, and Number Theory" Johns Hopkins Univ.Press(1989), 325-339

(6) 斉藤盛彦 「非孤立特異点のb-函数」 研究集会「代数解析学」講演

[オニ部]

Date: 1992. 5. 20

タイトル TITLE	保型形式の代数解析 Algebraic Analysis of Automorphic Forms		
講演者 NAME	佐藤 幹夫 Mikio Sato	所属 INSTITUTION	京大名誉教授 professor emeritus Kyoto University

解析多様体 M 上の線型偏微分方程式系は, M の微分作用素の芽の層を $\mathcal{D}$ とするとき, $\mathcal{D}$ -Module $\mathcal{M}$ としてとらえられる. この $\mathcal{M}$ たちの中で, ある cohomological な条件で特徴付けられる極大過剰決定系という, 解空間の次元が有限になる常微分方程式に近いものがある. これは幾何学の問題にもしばしばありわれ, 個々の特殊関数までそれぞれ微分方程式系で特徴付けようとする, 代数解析的発想からも重要である.

さて非線型の方程式系はどうであろうか. これもまたある非可換環 (あるいはその層) でとらえられる. 多様体 M が 1 次元で, 局所パラメーターが t であるとき, 未知関数 $f_1, \dots, f_n$ の典型的な非線型微分方程式系は

$$(1): \quad \frac{df_i}{dt} = P_i(t; f_1, \dots, f_n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

で与えられる. 但し P_i は $f_1, \dots, f_n$ に関して多項式となっている. このとき M の解析関数の芽の層 $\mathcal{O}_M$ に変数 $x_1, \dots, x_n$ を付け加えて得る多項式環 $\mathcal{O}_M[x_1, \dots, x_n]$ を考え, さらにこれに x_i ($1 \leq i \leq n$) たちと交換関係

$$(2): \quad \delta \cdot x_i - x_i \cdot \delta = p_i(x; x_1, \dots, x_n)$$

を満たす新たな変数 δ をつけ加える。こうして得られる $\mathcal{O}_M$ -Algebra $\mathcal{O}_M[x_1, \dots, x_n][\delta]$ を $\mathcal{D}$ と書くとき, $\mathcal{D}$ には

$$\mathcal{D}^{(m)} := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i(x; x_1, \dots, x_n) \delta^i \mid (a_i \in \mathcal{O}_M[x_1, \dots, x_n]) \right\}$$

によ, $\mathcal{D}$ filtration $\{\mathcal{D}^{(m)}\}_{m \geq 0}$ が入る。この filtration は

$$\mathcal{D}^{(m)} \mathcal{D}^{(n)} \subset \mathcal{D}^{(m+n)}, \quad [\mathcal{D}^{(m)}, \mathcal{D}^{(n)}] \subset \mathcal{D}^{(m+n-1)}$$

をみたす。この $\mathcal{D}$ が (1) をとらえている。高次元の多様体のときも δ を追加にたしてみせして同様に考えられる。

さてこのようにすると, $\mathcal{D}_M$ を M の微分作用素の filtered Ring とするとき, 方程式系 (1) の解は $\varphi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_M$ という filtration を保つ Algebra homomorphism としてとらえられる。

今日は, 上のような見地から, まず modular 関数の特別の場合である, 1 変数 テータ 級数の零値を特徴付ける $\mathcal{D}$ について話す。

τ を複素上半平面 $\mathcal{H}$ 上の点とする。このとき自然数 k に対して

$$(3): \quad G_k(\tau) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{0,0\}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}$$

とおくと, $G_k(\tau)$ は $k \geq 3$ のとき絶対収束し, k が偶数のときは零でない。 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し, $G_k(\tau)$ は $G_k\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k G_k(\tau)$ という保型性をもち, 重 $\pm k$ の正則保型形式を定める。重 $\pm a$ と重 $\pm b$ の正則保型形式の積は重 $\pm a+b$ の

正則保型形式を与え、重さを整数として、種々の重さの保型形式空間の直和を考えて次数付き環を考えると、これは G_4 と G_6 とで生成されている。また G_6 は Weierstrass の ρ -関数 $\rho(z)$ の $z=0$ での Laurent 展開の係数として表われ、特に標準形 $\rho'^2 = 4\rho^3 - g_2\rho - g_3$ の係数は $g_2 = 60G_4$, $g_3 = 140G_6$ となる。

さて $SL_2(\mathbb{Z})$ の modular 形式の環の生成元を少しちや、たみうに与えよう。いま $q = e^{\pi i \tau}$ とし、 $z \in \mathbb{C}$ を次の複素変数とすると、テータ級数 $\vartheta_0(z, q)$ を

$$(4): \quad \vartheta_0(z, q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi i n z}$$

と置く。さらに

$$(5): \quad \vartheta_3(z, q) = \vartheta_0(z + \frac{\pi}{2}, q), \quad \vartheta_1(z, q) = -ie^{iz + \frac{\pi}{4}i\tau} \vartheta_0(z + \frac{\pi}{2}, q)$$

$$\vartheta_2(z, q) = \vartheta_1(z + \frac{\pi}{2}, q)$$

と置く。各 $\vartheta_i(z, q)$ の z に関する微分を $\vartheta'_i(z, q)$ で記す。

テータ零値の比

$$(6): \quad u = \frac{\vartheta_2''(0, q)}{\vartheta_2(0, q)}, \quad v = \frac{\vartheta_3''(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}, \quad w = \frac{\vartheta_0''(0, q)}{\vartheta_0(0, q)}$$

を考える。 u, v, w は τ の関数として、 $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群に属してある種の "保型性" をもち、その基本対称式

$$(7): \quad g_1 = u + v + w, \quad g_2 = uv + vw + wu, \quad g_3 = uvw$$

を考えると、さきほどの生成元 G_4, G_6 は

$$(8): \quad G_4 = \frac{4}{3}(g_1^2 - 3g_2), \quad G_6 = \frac{4}{27}(2g_1^3 - 9g_1g_2 + 27g_3)$$

で与えられる。このとき $g_i(\tau)$ は τ の関数として

$$(9): \quad \frac{dg_1}{d\tau} = g_2, \quad \frac{dg_2}{d\tau} = 6g_3, \quad \frac{dg_3}{d\tau} = 4g_1g_3 - g_2^2$$

という非線型微分方程式系の解となっている。逆にこの方程式系は g_1, g_2, g_3 を特徴付けている。つまり

$$(10): \quad \mathcal{D} = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3][\delta] \quad (\delta x_1 - x_1 \delta = x_2; \delta x_2 - x_2 \delta = 6x_3; \\ \delta x_3 - x_3 \delta = 4x_1x_3 - x_2^2)$$

で filtered ring $\mathcal{D}$ を定めると, $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}_\tau = \mathbb{C}\langle \tau \rangle[\frac{\partial}{\partial \tau}]$ への filtered ring の準同型 φ は, ある $\tau_0 \in \mathbb{C}$ があって, 生成元 x_i の像 $\varphi(x_i)(\tau)$ ($i=1, 2, 3$) が, $g_i(\tau)$ たちの "保型性" からくる変換を除いて本質的に上の $g_i(\tau + \tau_0)$ ($i=1, 2, 3$) で与えられる。ここで $\mathbb{C}\langle \tau \rangle$ は τ の収束べき級数環である。

多変数の τ - η 級数の零値のことは (Siegel modular forms に対応するとき), 話しはもっと複雑になるが, 半整数の characteristic をもつ τ - η 級数は独立なものも 2^{2g} 個しかあることに注意して, $\theta(z+a)\theta(z-a)$ の (z, a) に関する展開係数の与える τ - η 零値の間に複雑型の関係式を見出せる。これが一変数のときの一般化を与える。

(職田孝幸, 記)

[中三章]

<補足>

以下では、「保型形式の代数解析」について。
その後の発展の様子も簡単に記す。一般の Siegel
modular form (のある拡張) が満たす 非線型方程式
を導出する。

§1. 1次元の場合

1次元の場合については、前掲の 織田氏のノートで解説
されているが、以下では重複を厭わず記すことにする。

Jacobi の elliptic theta の対数微分

$$\begin{cases} u = 2 \frac{d}{d\tau} \log \vartheta_3(0|\tau) \\ v = 2 \frac{d}{d\tau} \log \vartheta_0(0|\tau) \\ w = 2 \frac{d}{d\tau} \log \vartheta_2(0|\tau) \end{cases}$$

を考える。 u, v, w 自体は modular form でないが

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) ; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}$$

で modular 変換すると、周期のあたりが出る。

u, v, w は次の微分方程式

$$\begin{cases} u' = -vw + uw + uv \\ v' = vw - uw + uv \\ w' = vw + uw - uv \end{cases} \quad \dots (1)$$

をみたす あるいは (1) と同等の方程式

$$\begin{cases} u' + v' = 2uv \\ u' + w' = 2uw \\ v' + w' = 2vw \end{cases} \quad \dots (2)$$

の方が簡潔である. (2) は 1881 年 M. Halphen が導いて
いる. ([1])

(1) または (2) の方程式を微分環と考えると、可換環

② $[u, v, w]$ に derivative δ が

$$\begin{cases} \delta(u) = -vw + uw + uv \\ \delta(v) = vw - uw + uv \\ \delta(w) = vw + uw - uv \end{cases}$$

が作用しているものと考えるから、この環の上には

$$\begin{aligned} \delta_0(u) &= u, & \delta_0(v) &= v, & \delta_0(w) &= w \\ \delta^*(u) &= 1, & \delta^*(v) &= 1, & \delta^*(w) &= 1 \end{aligned}$$

で定まる derivative δ, δ^* が存在する. δ, δ^* は
 Leibniz の公式 をみたす $\mathbb{Q}$ -線型写像であり, δ は
 生成元 u, v, w を $\deg 1$ の元と考える時に 次数を与え
 る写像, また $\text{Ker}(\delta^*)$ は $\Gamma(2)$ に属する (本格的)
 modular form の全体に一致する. 更に $\langle \delta, \delta_0, \delta^* \rangle$
 で与える Lie 環は $\mathfrak{sl}(2)$ に同型である

$\mathbb{Q}[u, v, w]$ には $SL(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \trianglelefteq \mathfrak{S}_3$ (3次対称群) が
 作用する. これは対応する二等分点の置換に対応する
 ($\tau \mapsto \tau+1$ で u と v が, $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ で v と w が交換する)

この $\mathfrak{S}_3$ の作用と $\delta, \delta_0, \delta^*$ の作用は可換であり, $\mathfrak{S}_3$ で
 不変な部分体 $\mathcal{A}_0$ も微分環になる. $\mathcal{A}_0$ の生成元は

$$g_1 = u+v+w = 2 \frac{d}{d\tau} \log j_1'(0|\tau)$$

$$g_2 = uv + vw + wu$$

$$g_3 = uvw$$

であり,

$$\delta(g_1) = g_2, \quad \delta(g_2) = 6g_3, \quad \delta(g_3) = 4g_1g_3 - g_2^2$$

$$\delta_0(g_v) = v g_v \quad (v = 1, 2, 3)$$

$$\delta^*(g_1) = 3, \quad \delta^*(g_2) = 2g_1, \quad \delta^*(g_3) = g_2.$$

Δ_0 の元は $SL(2, \mathbb{Z})$ に属して、よく変換性をもつ。

$\text{Ker}(\delta^*)$ ($\subset \Delta_0$) は $SL(2, \mathbb{Z})$ -modular form である。

g_1 に因する単独方程式

$$\frac{d^3 g_1}{d\tau^3} - 4g_1 \frac{d^2 g_1}{d\tau^2} + 6\left(\frac{dg_1}{d\tau}\right)^2 = 0$$

は、昔から知られてゐる ([2])

∴ 今のようにして、今考えてゐる微分環と出発点として、modular form の理論は全て再構成される。

§ 2. 一般次元の場合.

half characteristic をもつ theta 函数は、 m 変数の場合

$$\vartheta\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \exp \pi i \left[\left(\begin{smallmatrix} t_n + \frac{t_a}{2} \end{smallmatrix}\right) \tau \left(n + \frac{a}{2}\right) + 2\left(\begin{smallmatrix} t_n + \frac{t_a}{2} \end{smallmatrix}\right) \left(z + \frac{b}{2}\right) \right]$$

で定義される。ここで、 $a, b \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$, $\tau = (\tau_{ij})$ は

$m \times m$ 複素対称行列で、 $\text{Im } \tau > 0$.

$m=1$ の場合 Jacobi の elliptic theta との関係は

$$\vartheta_3 = \vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vartheta_4 = \vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vartheta_1 = \vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vartheta_2 = \vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。そこで、多変数の場合も Jacobi の記号を拡大解釈して

$$\vartheta_{33} = \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vartheta_{30} = \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vartheta_{20} = \vartheta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ etc}$$

などと表す。

この 2^{2m} -個の theta 函数のうち、 $(2^{2m-1} + 2^{m-1})$ 個が even, $(2^{2m-1} - 2^{m-1})$ 個が odd である。以下では theta zero を考えるので、even 型のみを扱う。

$(\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1})$ を全て非 0 の有理数と組として。

$$\delta = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i^2 \frac{\partial}{\partial \tau_{i,i}} + \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \frac{\partial}{\partial \tau_{i,j}}$$

とおく。以下では、この δ に依する微分のみを考える。

今後、記法を簡単にするため、 $m=2$ の時のみを考える。また、後ろのページ (a ~ e) を絶えず参照してはいる。

後ろのページの最初の図の意味であるが、16個の theta 函数のうち、13, 10, 12, 34, 01, 21 の6個は odd、残り10個は even である。添字を簡単にするため、6個の odd theta を 1 ~ 6, even theta は 0 ~ 9 に番号を取りかえる: とにする。そして

$$u_i = 2 \delta \log \psi_i(0|\tau) \quad (i=0, \dots, 9)$$

とおく。この10個の函数が満たす微分方程式が、後ろのページに記されている。(§1の(1)の2次元版である)

次に、このページの10個の連立方程式を、§1の(2)のようになり簡略化された系に書き直す。ページを見て欲しいが、

例えば、第1列め $12 \cdot (\delta u_0 + \frac{1}{2} u_0^2)$ の意味であるが、

これは、ページの第1式を用いて、 $12(\delta u_0 + \frac{1}{2} u_0^2)$ を、 $u_i u_j$ の一次結合で表した時の係数を書き並べたものである(左に ij (01から89まで) と書いてある行が $u_i u_j$ の係数)。

ページの一番右の列は、一次結合をとりだすと

$$2 \sum_{4 \leq v < 10} (\delta u_v + \frac{1}{2} u_v^2) = \sum_{4 \leq i, j < 10} c_{ij} u_i u_j$$

と. $u_4 \sim u_9$ の間の関係式が得られる.

類似の関係式が. 同様に. 後 14個 得られ. この 15個 の連立方程式系は. ペーシ^a の 10個の方程式系と同値である (§ 1 (2) の類似)

10個の函数から. どの 6個を組合せるのかについて. 説明しよう.
1 次元の場合には. 2等分点に $SL(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathfrak{S}_3$ が作用したか. 2次元の場合には $Sp(4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathfrak{S}_6$ が作用し. odd な 6個の 2等分点の間の置換を与える.

$\mathfrak{S}_6$ の 15個の互換が. even な 2等分点にどう作用するかを書き表したのが. ページ c である. 16個の表が書かれてあるが. 一番左上の表が元になるものである (ページ d の表と少く順序が違ふ). 例えば. その右となり (1行 2列め) の表は odd な 2等分点の間の互換 (10) が. even な 2等分点の置換 $(14)(25)(36)$ を 引き起すことを示している.

右上の表 (1行 4列め) は (101) の互換が $(47)(58)(69)$ の置換を引き起すことを意味するが. ページ e で $u_4 \sim u_9$ の和をとるわけ. 将にこの意味であった. 従って. $\mathfrak{S}_6$ の互換は even な 2等分点の置換で $1^4 \cdot 2^2$ という型のものを引き起すか.

ここで、動かされる 6 個の文字について和をとればよい。

これは、先ほど述べた 5 個の連立方程式系の取り方である。

さて、我々は、 $u_0 \sim u_9$ を未知函数とする非線型方程式系を得たが、今の場合、これは代数的に独立ではない。ページ 9 の左側に、10 個の 3×3 行列があるが、この determinant に δ^* をほどこしたものが、即ち、一番上の行列になる。

$$\delta^* \cdot \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \\ u_7 & u_8 & u_9 \end{pmatrix} = 0.$$

という関係式が得られる。(ここで δ^* は、 $\delta^*(u_i) = 0$ で定義される derivation) この 10 個の relation は独立ではなく、線型独立なものは 5 個である。

ページ 9 の表は、この relation を表している。10 個の relation は $u_i u_j$ の一次結合であるから、その係数を拾ったものがこの表である。実は、この 10 個の relation にはもう一つ代数的な関係が成り立つので、 $u_0 \sim u_9$ のつくる代数の代数的次元は 6 である (次元 m の時は $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$)

§ 2 appendix

今まで even theta のみを考えたが; odd theta の Jacobian を考えてみる ($\hbar = 2e$). 6個の odd theta から 15個の Jacobian が作れるが; その対称微分は全て u_j ($j=0, \dots, 9$) の線型結合で表される.

odd theta の Jacobian については、古くから調べられており、例えば [3]. $m=2$ の場合は、古典的な Rosenhain の公式に他ならない...

§3 解空間の構造

前節で、我々は見かけ上 $(2^{2m-1} + 2^{m-1})$ 個の未知函数からなる方程式系 (本質的には $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 個) を得たが、その解空間の構造を調べてみる

$m=1$ の場合には方程式に $SL(2)$ が作用し、

丁度、方程式の次数と群の次元が合、たわけだが、

$Sp(2m)$ は $m(2m+1)$ -次元なの? free に作用しない。

$2m$ -次元の symplectic vector space に対し、 $(m+1)$ -次元の involutive な subspace W を一つ固定する。 $W^\perp \subseteq W$ に直交する isotropy space とすると、 W を不変にする部分群 H は、 $W/W^\perp$ への作用を引き起こす。

この $H \longrightarrow GL(W/W^\perp) \simeq GL(2)$ への写像の

Ker を G とすると、

$$\dim(Sp(2m)/G) = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$$

であり、この等質空間 $Sp(2m)/G$ が解空間を parametrize する。

文献

- [1] M. Halphen, Sur un système d'équations différentielles,
C.R. Acad. Sc. Paris, 92 1101-1103 (1881)
- [2] J. Chazy, Sur les équations différentielles du troisième
et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points
critiques fixes, Acta Math., 34 317-385 (1911)
- [3] J. Igusa, On Jacobi's derivative formula and its
generalizations. Amer. J. Math. 102 409-446 (1980)

以上

大山 陽介 記

$$w_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} u_i u_j + u_i u_k + u_j u_k = \delta^*(u_i u_j u_k)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\delta u_0 = \frac{-1}{2} u_0^2 + \frac{1}{3} u_0 \sum_{\nu \neq 0} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{123} + w_{456} + w_{789} + w_{147} + w_{258} + w_{369}) + \frac{1}{12} (w_{159} + w_{267} + w_{348} + w_{168} + w_{249} + w_{357})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\delta u_1 = \frac{-1}{2} u_1^2 + \frac{1}{3} u_1 \sum_{\nu \neq 1} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{023} + w_{489} + w_{567} + w_{047} + w_{269} + w_{358}) + \frac{1}{12} (w_{059} + w_{278} + w_{346} + w_{068} + w_{245} + w_{379})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\delta u_2 = \frac{-1}{2} u_2^2 + \frac{1}{3} u_2 \sum_{\nu \neq 2} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{013} + w_{579} + w_{468} + w_{058} + w_{169} + w_{347}) + \frac{1}{12} (w_{049} + w_{178} + w_{356} + w_{067} + w_{145} + w_{389})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 7 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\delta u_3 = \frac{-1}{2} u_3^2 + \frac{1}{3} u_3 \sum_{\nu \neq 3} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{012} + w_{678} + w_{459} + w_{069} + w_{158} + w_{247}) + \frac{1}{12} (w_{048} + w_{179} + w_{256} + w_{057} + w_{146} + w_{289})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 5 & 9 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\delta u_4 = \frac{-1}{2} u_4^2 + \frac{1}{3} u_4 \sum_{\nu \neq 4} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{019} + w_{589} + w_{268} + w_{056} + w_{189} + w_{237}) + \frac{1}{12} (w_{029} + w_{136} + w_{578} + w_{038} + w_{125} + w_{679})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 3 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta u_5 = \frac{-1}{2} u_5^2 + \frac{1}{3} u_5 \sum_{\nu \neq 5} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{028} + w_{549} + w_{167} + w_{046} + w_{279} + w_{138}) + \frac{1}{12} (w_{019} + w_{236} + w_{478} + w_{037} + w_{124} + w_{689})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta u_6 = \frac{-1}{2} u_6^2 + \frac{1}{3} u_6 \sum_{\nu \neq 6} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{039} + w_{548} + w_{157} + w_{045} + w_{378} + w_{129}) + \frac{1}{12} (w_{018} + w_{235} + w_{479} + w_{027} + w_{134} + w_{589})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\delta u_7 = \frac{-1}{2} u_7^2 + \frac{1}{3} u_7 \sum_{\nu \neq 7} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{014} + w_{568} + w_{259} + w_{089} + w_{156} + w_{234}) + \frac{1}{12} (w_{026} + w_{139} + w_{458} + w_{035} + w_{128} + w_{469})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 3 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta u_8 = \frac{-1}{2} u_8^2 + \frac{1}{3} u_8 \sum_{\nu \neq 8} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{025} + w_{567} + w_{149} + w_{079} + w_{246} + w_{135}) + \frac{1}{12} (w_{016} + w_{239} + w_{457} + w_{034} + w_{127} + w_{589})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta u_9 = \frac{-1}{2} u_9^2 + \frac{1}{3} u_9 \sum_{\nu \neq 9} u_\nu + \frac{-1}{6} (w_{036} + w_{557} + w_{148} + w_{078} + w_{345} + w_{126}) + \frac{1}{12} (w_{015} + w_{238} + w_{467} + w_{024} + w_{137} + w_{568})$$

この $\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$ たちの行列式として得られる

10 個の 3 次型式 (u_i たち 10 元) は,

$\mathcal{G}_6: \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$ を張る.

5 + 5

(cf. page 28)

(stabilizer H の既約表現 $F^* (= \mathcal{G}_3 \times \mathcal{G}_3$: alternating, 転置で invariant) を含む $\mathcal{G}_6$ の既約表現は $\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$ のみである.)

(cf. $\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix})$

2変数 Theta の 2 分枝 16^J に作用する $Sp(4, GF(2)) = G_6$ の共軌類
 と, $G_6 \subset G_{10}$ における G_{10} での対応する共軌類

G_6	1^6	$1^4 2$	2^3	$1^2 2^2$	$1^3 3$	$1 \cdot 2 \cdot 3$	3^2	$1^2 4$	$2 \cdot 4$	$1 \cdot 5$	6
G_{10}	1^{10}	$1^4 2^3$	$1^4 2^3$	$1^2 2^4$	$1 \cdot 3^3$	$1 \cdot 3 \cdot 6$	$1 \cdot 3^3$	$2 \cdot 4^2$	$1^2 4^2$	5^2	$1 \cdot 3 \cdot 6$

$$6! = 1 + 15 + 15 + 45 + 40 + 120 + 40 + 90 + 90 + 144 + 120$$

1	2	3	イ
4	5	6	ロ
7	8	9	ハ
ニ	ホ	ヘ	0

4	5	6	ロ
1	2	3	イ
7	8	9	ハ
ニ	ホ	ヘ	0

7	8	9	ハ
4	5	6	ロ
1	2	3	イ
ニ	ホ	ヘ	0

1	2	3	イ
7	8	9	ハ
4	5	6	ロ
ニ	ホ	ヘ	0

2	1	3	イ
5	4	6	ロ
8	7	9	ハ
ホ	ニ	ヘ	0

3	2	1	イ
6	5	4	ロ
9	8	7	ハ
ヘ	ホ	ニ	0

1	3	2	イ
4	6	5	ロ
7	9	8	ハ
ニ	ヘ	ホ	0

0	2	3	ニ
4	9	8	ロ
7	6	5	ハ
イ	ホ	ヘ	1

1	0	3	ホ
9	5	7	ロ
6	8	4	ハ
ニ	イ	ヘ	2

1	2	0	ヘ
8	7	6	ロ
5	4	9	ハ
ニ	ホ	イ	3

1	9	8	イ
0	5	6	ニ
7	3	2	ハ
ロ	ホ	ヘ	4

9	2	7	イ
4	0	6	ホ
3	8	1	ハ
ニ	ロ	ヘ	5

8	7	3	イ
4	5	0	ヘ
2	1	9	ハ
ニ	ホ	ロ	6

1	6	5	イ
4	3	2	ロ
0	8	9	ニ
ハ	ホ	ヘ	7

6	2	4	イ
3	5	1	ロ
7	0	9	ホ
ニ	ハ	ヘ	8

5	4	3	イ
2	1	6	ロ
7	8	0	ヘ
ニ	ホ	ハ	9

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9		

11	13	10	12
31	33	30	32
01	03	00	02
21	23	20	22

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
01										
02										
03										
04										
05										
06										
07										
08										
09										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
23										
24										
25										
26										
27										
28										
29										
34										
35										
36										
37										
38										
39										
45										
46										
47										
48										
49										
56										
57										
58										
59										
67										
68										
69										
78										
79										
89										
Linear										
dependencies										
relations										

説明 T: 11, 15, 0, 11 は,

$$0 = V_{\text{def}} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \text{sgn}(i,j,k,l) u_{ij} u_{kl}, \quad (5\text{次元})$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0=11										
1=33										
2=30										
3=32										
4=03										
5=00										
6=02										
7=23										
8=20										
9=22										

$$\begin{aligned}
 &= u_1 u_5 - u_1 u_6 - u_1 u_8 + u_1 u_9 - u_2 u_4 + u_2 u_6 \\
 &+ u_2 u_7 - u_2 u_9 + u_3 u_4 - u_3 u_5 - u_3 u_7 + u_3 u_8 \\
 &+ u_4 u_8 - u_4 u_9 - u_5 u_7 + u_5 u_9 + u_6 u_7 - u_6 u_8 \\
 &= u_{33} u_{00} - u_{33} u_{02} - u_{33} u_{20} + u_{33} u_{22} - u_{30} u_{03} + u_{30} u_{02} \\
 &+ u_{30} u_{23} - u_{30} u_{22} + u_{32} u_{03} - u_{32} u_{00} - u_{32} u_{23} + u_{32} u_{20} \\
 &+ u_{03} u_{20} - u_{03} u_{22} - u_{00} u_{23} + u_{00} u_{22} + u_{02} u_{23} - u_{02} u_{20}
 \end{aligned}$$

age 23 :

$$W_{1,\square} \left(\equiv_{\text{def}} 2d \log \frac{\partial(\mathcal{V}_1^{\text{odd}}, \mathcal{V}_\square^{\text{odd}})}{\partial(z_0, z_1)} \right), \quad u_0 \left(\equiv_{\text{def}} 2d \log \mathcal{V}_0^{\text{even}} \right)$$

etc. $\binom{6}{2} = 15 = 1 + 9 + \textcircled{5}$ etc. $10 = 1 + 9$

$\square\square\square + \square\square + \square \rightarrow \text{vanishing}$ $\square\square\square + \square\square$

$$W_{1,\square} = u_0 + u_7 + u_8 + u_9$$

	イロ	イハ	イニ	イホ	イヘ	ロハ	ロニ	ロホ	ロヘ	ハニ	ハホ	ハヘ	ニホ	ニヘ	ホヘ
0	1	1		1	1	1	1			1			1	1	1
1				1	1	1		1		1				1	1
2			1		1	1					1			1	
3			1	1		1			1			1	1		
4		1	1				1	1	1						1
5		1		1			1	1			1			1	
6		1			1		1	1				1	1		
7	1		1				1			1	1	1			1
8	1			1			1			1	1	1	1		
9	1				1			1	1	1	1	1	1		

$$\left. \begin{aligned} W_{\square, \text{ハ}} + W_{\text{ホ}, \text{ハ}} - W_{\text{イ}, \text{ニ}} &= 2(u_0 + u_1) \\ W_{\square, \text{ハ}} + W_{\text{ニ}, \text{ハ}} - W_{\text{イ}, \text{ホ}} &= 2(u_0 + u_2) \\ W_{\square, \text{ハ}} + W_{\text{イ}, \text{ハ}} - W_{\text{ニ}, \text{ホ}} &= 2(u_1 + u_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} W_{\square, \text{ハ}} + W_{\text{ホ}, \text{ハ}} + W_{\text{ニ}, \text{ハ}} + W_{\text{ニ}, \text{ホ}} - W_{\text{イ}, \text{ニ}} - W_{\text{イ}, \text{ホ}} - W_{\text{イ}, \text{ハ}} &= 4u_0 \\ W_{\square, \text{ハ}} + W_{\text{ホ}, \text{ハ}} - W_{\text{ニ}, \text{ハ}} + W_{\text{ニ}, \text{ホ}} - W_{\text{イ}, \text{ニ}} + W_{\text{イ}, \text{ホ}} - W_{\text{イ}, \text{ハ}} &= 4u_1 \\ W_{\square, \text{ハ}} - W_{\text{ホ}, \text{ハ}} + W_{\text{ニ}, \text{ハ}} + W_{\text{ニ}, \text{ホ}} + W_{\text{イ}, \text{ニ}} - W_{\text{イ}, \text{ホ}} - W_{\text{イ}, \text{ハ}} &= 4u_2 \end{aligned}$$

	イロ	イハ	イニ	イホ	イヘ	ロハ	ロニ	ロホ	ロヘ	ハニ	ハホ	ハヘ	ニホ	ニヘ	ホヘ
	4u ₀	4u ₀	4u ₀	4u ₀	4u ₀	4u ₀	0	0	0	0	0	0	0	0	0
イロ			1	1	1	1	3	1	1	1	1				
イハ		1		1	1	1	3	1			1	1	1		
イニ	1		1	1	1	1	3	1					-1	-1	-1
イホ	-1			-1		-1	-1	0	1		1		+1	1	
イヘ	-1				-1	-1	-1	0		1			+1		1
ロハ		-1				-1	-1	0	1			-1	-1		-1
ロニ		-1				-1	-1	0		1		-1	-1		-1
ロホ			-1	-1		-1	-1	0	-1	-1	1			-1	
ロヘ			-1		-1	-1	-1	0	-1		-1	1		-1	
ハニ	1	1	1		1	3	1	-1		-1			-1	1	
ハホ	1	1	1	1		3	1	-1	-1			-1		1	
ハヘ	1	1	1	1		3	1	-1	-1			-1			1

5次元, vanishing (□□□)