

渦糸の運動 I

東大 宇宙研 橋本 英典

§ 1 序

流体中に集中した渦運動は大局的に見れば、完全流体中の渦糸と見なすことができる。これはもちろんむしろ理想化であって、実際上は粘性のきく中心部が外側におよぼす影響を特異線としてとらえた *outer expansion* である。このような渦糸の運動は古来2次元の問題ではよく知られているが、¹⁾²⁾3次元の運動については一本の渦糸をとって見ても直線渦、渦輪、らせん渦¹⁾¹⁵⁾などを除いてはその複雑さのためにほとんど知られていないのが現状である。特に前者では渦糸を真と見る抽象化が可能であつたのに後者では渦の屈曲、うねなどの現象などのために半径を0とおくことが許されないからである。たゞ渦の半径を次第に小さくして行けば、曲った渦糸の運動にもつとも影響をおよぼすのは、問題の真の近くの渦糸の部分だけであり、循環と曲率に比例し、半径の2乗に比例する速度で接法線の方に動かされることがわかる。

半径の対数による項は非常に大きいけれども一定とみなす
 ことができ、またのびの影響も無視される。これは Ames,
 Hama²⁾ に始まる近似であり、Hama^{2,3)} や Takaki & Yoshizawa⁴⁾ は
 このベクトル方程式を用いて色々な形の渦糸の運動を数值的
 に議論している。この近似が少なくとも定性的によい近似を与
 えることは数値的には Hama²⁾ によって放物線状渦に対し、渦
 輪の變形については Kambe, Takao⁵⁾ の煙による実験によつて
 確かめられている。最近著者⁶⁾ はこの近似方程式が弾性糸
 (Elastica) の形をした渦糸の剛体回転に対する厳密解を与え
 ることを見いだしたが、一般的に複雑な運動を論じるには、
 場合によつて渦糸の曲率 κ と捻率 τ を支配する方程式(自然
 方程式)を用いる方が便利である。実際 Betchov⁷⁾ はこのよう
 な方程式を導き、それが負の圧力と非線型のスプレスの項を
 含む1次元理想気体の運動方程式になることを示したが、若
 干の性質の議論と上述 elastica の中で近似の性格からはみと
 められぬ自分自身に交わる loop を持つ解を導いぬに過ぎな
 い。著者⁸⁾ は最近 κ を振幅、捻れ角を位相とする複素数 ψ を支
 配する方程式を導きその孤立伝播波解として、 τ の大小によ
 って異なるが直線渦糸に生じるらせん運動あるいは loop が
 渦糸のらせん變形をおこして、渦糸に沿つて一定速度 2τ で
 伝わるものを求めた。 ψ に対する方程式は非線型光学やプラ

ズマ物理にあらわれる波の Modulation を支配する非線型 Schrödinger 方程式⁹⁻¹⁴⁾の1種である。従ってわれわれはベクトル方程式²⁾(Hama-Ames), 仮想気体方程式⁷⁾(Betchov) および4方程式⁶⁾の三つとそれぞれの特長に応じてつかいわけ、その間の知識の交換をはかることができることに~~な~~^ならなけりである。さて、 κ , τ 一定の解はらせん渦をあらわし、波数なく κ の微小攪乱に対して不安定といわれているが、それが有限振幅となつたときにどうなるかは特に興味のあることである。ここでは Betchov の方程式と4方程式をもとにしてこれを論じ、直線渦、円環渦に対するベクトル方程式による攻撃は次の神部氏にゆずりたい。

§2. 基礎式

無限に広がった縮まない流体の中での渦糸を $X(s, t)$ (ただし s はそれに沿う長さ, t は時間, κ の強さを Γ であらわせば, それによつて流体内の点 Y に誘導される速度 V_0 は Biot-Savart の法則によつて

$$V_0 = - \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{(Y-X) \times dX}{|Y-X|^3} \quad (2.1)$$

で与えられる。 Y が渦糸上の点 X の近傍の距離に、あるとすれば、上式は漸近的に¹⁵⁾



$$V_0 = \frac{\Gamma}{2\pi\epsilon} [\dot{x} \times (y-x)] + \frac{\Gamma\kappa}{4\pi} b \log \frac{1}{\epsilon} + O(1) \quad (2.2)$$

であらわされる。ただし $(\dot{x}, \kappa, b)$ は x での接線、主法線および陪法線方向の互に直交する単位ベクトル、 κ は曲率である。式(2.2)の第1項は、渦糸のまわりの循環速度であって直線渦糸による二次元運動でもあらわれるものであるが、単一の渦糸の運動に関する限り、渦糸が重ならない限り、直接の影響はない。第2項は渦糸の曲ったための影響であり、渦糸が陪法線方向に曲率と循環に比例する速度で動かされることを示す。ただしこの項は $\epsilon=0$ としたときで対数項が無限大となり、半径0の渦糸が許されないという困難を生む。

Ames, Hama^{2,3)} は ϵ を渦糸の半径程度と等置することによってこの困難を避けた。これによる誤差と ϵ の渦糸に沿って変化が $\log(1/\epsilon)$ におよぼす影響は $O(1)$ の程度であるのでこれを無視することができる。

一方、渦糸がのびたり縮んだりする3次元運動における重要な効果は、この近似では無視せざるを得ない。

こうして渦糸の速度は時間の単位を適当にとれば無次元の形で

$$\dot{x} = \kappa b \quad (2.3)$$

あるいは

$$\dot{X} = X' \times X'' \quad (2.4)$$

と書くことができる。ただし・は時間微分、'は λ についての微分をあらわす。さて渦糸に沿って、接触面が回転する場合 ($b' = -2\pi$) すなわち速度を τ とすれば、(2.3)から複素変数

$$\psi = u \exp \left[i \int_0^\lambda \tau d\lambda \right] \quad (2.5)$$

が非線型の Schrödinger の方程式

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{2} (|\psi|^2 + A) \psi \quad (2.6)$$

が得られる。(8) あるいは教理研講究録(15)に、 A は時間 t だけの関数、 $\rho = X^2$, $u = 2\tau$ 。従って $\psi = \rho^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i}{2} \int u d\lambda \right]$ とおいて、実部と虚部を分けなければ負圧 $-\frac{1}{2}\rho^2$ を持つ理想気体の方程式¹⁾

$$\begin{cases} u + uu' = \rho' + \left(-\frac{1}{2} \frac{\rho'^2}{\rho^2} + \frac{\rho''}{\rho} \right)' \\ \dot{\rho} + u\rho' = -\rho u' \end{cases} \quad (2.7)$$

あるいは

$$\dot{\rho} + (\rho u)' = 0, \quad (\rho u)' + \left[\rho u^2 - \frac{1}{2} \rho^2 - \rho (\log \rho)'' \right]' = 0$$

を得る。われわれは目的に応じて、(2.3), (2.6), (2.7) を使い分け、お互いの間の知識の交換をはかることができる。

§ 3. ラセン運動の有限攪乱

(2.6), (2.7)は特解として

i) 直線渦糸: $\kappa = \tau = 0$ ii) 渦輪: $\kappa = \kappa_0 = \text{一定}, \tau = 0$ iii) ラセン: $\kappa = \kappa_0, \tau = \tau_0 = \text{一定}$ を解として持つ $\delta p, \delta u$ を無限小の量として

$$p = \kappa_0^2 + \delta p \exp i(k\delta - \omega t), \quad u = 2\tau_0 + \delta u \exp i(k\delta - \omega t)$$

を代入し、微小項を無視すれば分散関係 $\omega = k[2\tau_0 \pm \sqrt{k^2 - \kappa_0^2}]$ を得る。従って直線渦 ($\tau_0 = \kappa_0 = 0$), 渦輪 ($k = N\kappa_0$, N は 2 以上の

整数, $\tau_0 = 0$) は微小攪乱に対して安定であるが、ラセン渦の微小攪乱は $k < \kappa_0$ では不安定で渦糸上を $C_0 = 2\tau_0$ の速度で伝播する。以下では $\kappa_0 \neq 0$ のばあいについての有限振幅の攪乱が果してどうなるかをしらべて見よう。ここでラセン上を動く座標系で考え、流れの関数 $\psi = \kappa_0 \xi + \phi$, $\xi = \delta - C\tau_0$

$$p = \kappa_0^2 + \phi' = \partial \psi / \partial \xi, \quad p u = -\phi = -\partial \psi / \partial t \quad (3.2)$$

を導入すれば

$$\Delta[\phi] = \ddot{\phi} + \kappa_0^2 \phi'' + \phi^{(4)} = \left[\frac{\dot{\phi}^2 + \phi'^2}{\kappa_0^2 + \phi'} - \frac{1}{2} \phi'^2 \right]' \quad (3.3)$$

を得る。

i) $k > \kappa_0$ (安定) のばあい

$$\phi = k \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n(k\xi, \tau), \quad \kappa_0 = \nu k \quad (\nu < 1) \quad (3.4)$$

$$\tau = k^2 t (1 + \varepsilon^2 \sigma + \dots), \quad \varepsilon \ll 1$$

と置いて ε の各べきを等置すれば

$$L[\phi_1] \equiv \ddot{\phi}_1 + \phi_1^{(0)} + \nu^2 \phi_1'' = 0, \quad (3.5)$$

$$L[\phi_2] = \left[\frac{1}{\nu^2} (\dot{\phi}_1^2 + \phi_1'^2) - \frac{1}{2} \phi_1'^2 \right]'$$

$$L[\phi_3] = \{Q[\phi_1, \phi_2]\}' - 2\sigma \ddot{\phi}_1$$

を得る。こゝでは Q は ϕ_1 と ϕ_2 の 2 次形式である。

第 1 近似解

$$\phi_1 = A_+ Z_+ + A_- Z_- + c. c. \quad (3.6)$$

$$Z_{\pm} = \exp i(kx \pm \omega_0 T), \quad \omega_0 = (1 - \nu^2)^{1/2}$$

から出発し、第 2 式から得られる第 2 近似

$$\phi_2 = \frac{i}{4} [A_+^2 Z_+^2 + A_-^2 Z_-^2 + \frac{2}{\nu^2} A_+ A_- Z_+ Z_-] \quad (3.7)$$

と共に、第 3 式の右辺に代入し、 Q から出る *secular term* は 0 にすれば有限振幅による振動数のずれ

$$\delta\omega/\omega_0 = (\omega - \omega_0)/\omega_0 = \varepsilon^2 \sigma \quad (3.8)$$

に対して、 $\nu_1 = 1/\nu = k/\kappa_0$ とおけば

$$\textcircled{A} \text{ 進行波 : } \delta\omega/\omega_0 = \varepsilon^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \nu_1^2 \right) |A_+|^2 / (1 - \nu_1^2) \quad (3.9)$$

($A_- = 0$)

$$\textcircled{B} \text{ 停在波 : } \delta\omega/\omega_0 = \frac{1}{2} \varepsilon^2 (4\nu_1^4 - 2\nu_1^2 - \frac{1}{2}) A^2 / (1 - \nu_1^2) \quad (3.10)$$

($|A_+| = |A_-| = A$)

を得る。①では $\delta\omega/\omega_0$ が $(k/k_0)^2 = \frac{3}{2}$ で負から正に変わり、②はいつも負である。

ii) $k \sim k_0$ ($k < k_0$: 不安定)

$$k_0^2/k^2 = 1 + \varepsilon^2 \gamma + \dots \quad (\gamma > 0: \text{不安定}), \quad (3.11)$$

$$\phi = k \sum_n \varepsilon^n \phi_n(kz, \varepsilon k^2 t)$$

とおくは

$$L_0[\phi_1] \equiv \phi_1'' + \phi_1^{(iv)} = 0, \quad L_0[\phi_2] = [\phi_1'^2 - \frac{1}{2}\phi_1'^2]', \quad (3.12)$$

$$L_0[\phi_3] = Q[\phi, \phi_2] - \Lambda[\phi] \dots \dots,$$

ただし $L\Lambda[\phi] \equiv \ddot{\phi} + \gamma\phi''$ を得る。

方程式の解

$$\phi_1 = a e^{i\xi} + \bar{a} e^{-i\xi}, \quad \xi = kz \quad (3.13)$$

$$\phi_2 = \frac{i}{4} (a^2 e^{2i\xi} - c.c.) \quad (3.14)$$

に対して $L[\phi_3]$ の secular term = 0 とすれば $a = A e^{i\varphi}$

に対して

$$\ddot{a} - \gamma a + \frac{1}{2}|a|^2 a = 0 \quad (3.15)$$

or

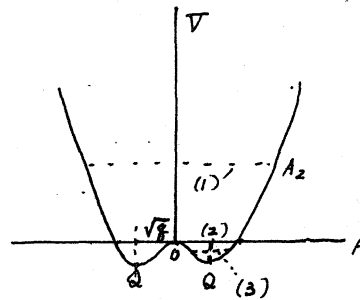
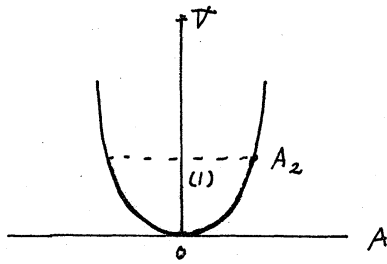
$$A^2 \dot{\varphi} = \pi (\text{一定}), \quad \ddot{A} = -V' + A \dot{\varphi}^2 \quad (3.16)$$

を得る。 $V = -\frac{1}{2}\gamma A^2 + \frac{1}{4}A^4$ は中心場の有効ポテンシャル、 π は角運動量と解釈できる。

以下では $\pi = 0$ 従って $\dot{\varphi} = 0$ の場合と $\pi \neq 0$ 従って $\dot{\varphi} \neq 0$ の場合とに分けて考えよう。

④ $m = 0$

このばあいは V の形と (3.16) の積分定数 (全エネルギーに相当) によって (1), (1'), (2), (3) のばあいには割できる (下図E参照)



	φ	A	S
(1)	$\varphi \leq 0$	$A_2 \operatorname{cn}(\frac{A_2}{2S}t, S)$	$S^2 \leq \frac{1}{2}$
(2)	$\varphi > 0$	$A_2 \operatorname{cn}(\frac{A_2}{2S}t, S)$	$\frac{1}{2} < S^2 < 1$
(3)	$\varphi > 0$	$2\sqrt{\varphi} \operatorname{sech} \sqrt{\varphi} t$	$S^2 = 1$
(4)	$\varphi > 0$	$A_2 \operatorname{dn}(\frac{A_2}{2}t, S)$	$S^2 = 1 - A_1^2/A_2^2$

ただし cn , dn は Jacobi の楕円関数 S は modulus である。また (3) は (2) と (4) の特別なばあいである。

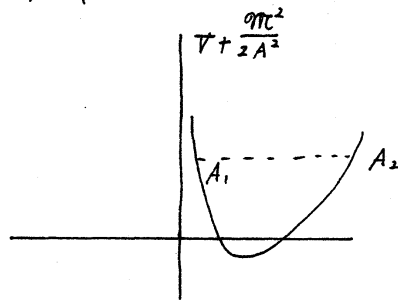
以上の結果は $\varphi < 0$ に対しては微小振中のばあいとわづかなずれを示すに過ぎないが、 $\varphi > 0$ に対しては新たな平衡状態のまわりの有限振幅の振動に移行する (super-critical な

平衡状態への振分れ) ことの可能性を示している。特に(3)の
ばあいには $A = 2\sqrt{g}$ の状態から $A = 0$ にもどるには無限の時
間を、(4)のばあいには $A = \sqrt{g}$ の点のまわりの振動が生じてい
る。実際、このばあいの平衡点は上記の計算で時間変化の項
を0において逐次代入を行なえばその高ベキの項まで次々求
められるが、よくしらべて見ると、(3.3)の定常厳密解

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= P^{(0)}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K^2(s) d\pi^2 \left(\frac{2}{\pi} K(s) z, s\right) \quad (3.17) \\ &= g^2 \left[1 + \frac{1}{2} \sum \alpha_n \cos n\theta z\right]^2, \quad \alpha_n = \frac{8g^n}{1+g^{2n}} \end{aligned}$$

を微小振幅として展開した結果に他ならないことがわかる。

③ $m \neq 0$



方程式(3.16)の右1式から
ある $\varphi = m/A^2$ を右2式に
代入すれば A の変化は
 $V + m^2/(2A^2)$ のポテンシヤ

ルの場での質点の振動と同様に一般に

$$A = A_2 [1 - \epsilon^2 \sin^2(\Omega t, s)]^{1/2}$$

ただし

$$\epsilon^2 = 1 - A_1^2/A_2^2, \quad S^2 = \frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2^2 + \alpha^2} < \epsilon^2$$

$$\Omega = \frac{1}{2} A_2 \left[1 + \frac{m^2}{A_1^2}\right]^{1/2}$$

を得る。このときは A と φ が互にかみ合っで変化し平衡振動は $\pi = 0$ のときとは異なった速さで移動する

$$u^2 = \gamma^{(0)}(\xi - c_1 t) - \beta^2 k^2, \quad v = c_1 - \text{const} / p^{(0)}(\xi - c_1 t)$$

であることがわかる。

References

- 1) H. Lamb : Hydrodynamics (Cambridge Univ. Press 1932) 202.
- 2) F. R. Hama : Phys. of Fluids 5 (1962) 1156.
- 3) F. R. Hama : Phys. of Fluids 6 (1963) 526.
- 4) R. Takaki & A. Yoshizawa : 数理解析研講録125 (1971) 82.
- 5) T. Kambe & T. Takao : J. Phys. Soc. Japan 31 (1971) 591.
- 6) H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Japan 31 (1971) 293.
- 7) R. Betchov : J. Fluid Mech. 22 (1965) 471.
- 8) H. Hasimoto : J. Fluid Mech. 51 (1972) 447.
- 9) L. P. Pitaevski : Sov. Phys. JETP 13 (1961) 451.
- 10) E. P. Gross : J. math. Phys. 4 (1963) 195.
- 11) V. I. Karpman & E. M. Krushkal : Sov. Phys. JETP 28 (1969) 277.
- 12) T. Taniuti & N. Yajima : J. math. Phys. 10 (1969) 1369.

- 13) N. Asano, T. Taniuti & N. Yajima : ibid 10 (1969) 2020.
- 14) V. E. Zakharov : Sov. Phys. JETP 26 (1968) 994.
- 15) G. K. Batchelor : An Introduction to fluid Dynamics (Cambridge Univ.
Press 1967) 509.