

代数の無限積と可測基数

筑波大学 数学系 江田勝哉

(Katsuya Eda)

アーベル群(以下群といえはアーベル群)あるいは環の無限積からある種の群あるいは環への準同型写像の表現定理には可測基数が関係することが知られている。ここでは、点、座標の代わりに、可算完備極大フィルター、超積を考えるとにより表現定理との他に新しい見方を与え最小の可測基数(M_c)未満において成立が示されていた群の直積に関する定理の多くから基数に関する条件をとり除く手段を示す。但し、証明及び結果の多くは引用文献にゆずる。

G をスレニダ^{スレニダ}群 ([F] の § 94), $A_i (i \in I)$ を群, I の基数を M_c 未満とするとき, $\text{Hom}(\prod_{i \in I} A_i, G) \simeq \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(A_i, G)$ はスレニダ^{スレニダ}群についての J. Los による有名な定理である。少し細かく言えば, $\pi_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i (i \in I)$ を射影とするととき, すべての準同型写像 $h: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow G$ に対して有限 n の $i_1, \dots, i_n \in I$ と $h_{i_j}: A_{i_j} \rightarrow G (1 \leq j \leq n)$ があって $h = \sum_{j=1}^n h_{i_j} \cdot \pi_{i_j}$ が成立する

この定理は次のように拡張される。

定理1. [E₂] G をスレニダ-群、 $\mathcal{F}$ を $P(I)$ 上の可算完備極大フィルター全体とすると、

$$\text{Hom}(\prod_{i \in I} A_i, G) \simeq \bigoplus_{F \in \mathcal{F}} \text{Hom}(\prod_{i \in I} A_i / F, G) \text{ が成立する。}$$

但し、 $\prod_{i \in I} A_i / F$ は超積である。

少し、細かく言うと、 $\pi_F: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} A_i / F$ を標準的準同型写像とすると、 $h: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow G$ に対して有限個の $\mathcal{F}$ の元 $F_1, \dots, F_n$ と $h_j: \prod_{i \in I} A_i / F_j \rightarrow G$ があって $h = \sum_{j=1}^n h_j \cdot \pi_{F_j}$ が成立する。

これは、点、座標、射影の代わり可算完備極大フィルター、超積、標準的準同型写像を考えるとということによる拡張である。さて無限積を定義域とする準同型写像に関する定理は S.U. Chase によるものがある。それは可算積に関するものであるが、それ及びその version は [D-Z], [G-W], [I] により M_c 未満の積に拡張されている。それは次のものである。

$|I| < M_c$ として $h: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \bigoplus_{j \in J} G_j (= G)$ とするとある $m > 0$ 有限集合 $I' \subseteq I, J' \subseteq J$ があって

$$h^m \prod_{i \in I-I'} A_i \subseteq \bigoplus_{j \in J'} G_j + \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G \text{ が成立する。}$$

ここで $\prod_{i \in I-I'} A_i, \bigoplus_{j \in J'} G_j$ は $\prod_{i \in I} A_i, \bigoplus_{j \in J} G_j$ の部分群とする。
自然な意味で

つまり、 $\prod_{i \in I-I'} A_i$ の元 x は、すべての $i \in I'$ について $\pi_i(x) = 0$

なるものである。そこで点の代わりに可算完備極大フィルターという見方で、これを書き換へ次の定理を得る。

定理2 [E₂], 準同型写像 $h: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \bigoplus_{j \in J} G_j (= G)$ に対して ある $m > 0$, 有限集合 $J' \subseteq J$ と相異なる J 上の可算完備極大フィルター $F_1, \dots, F_n$ が存在して,

$$h^m K_{F_1 \dots F_n} \subseteq \bigoplus_{j \in J'} G_j + \bigcap_{n \in N} G_n$$

が成立する。但し, $x \in K_{F_1 \dots F_n} \iff \pi_{F_j}(x) = 0$ for $1 \leq j \leq n$.

ここで, $\prod_{i \in I} A_i / K_{F_1 \dots F_n} \simeq \prod_{i \in I} A_i / F_1 \oplus \dots \oplus \prod_{i \in I} A_i / F_n$ である。

定理1, 定理2と同じような考え方を便するものについては, [E₃] を参照されたい。さてこのような見方は既に位相代数に関しては, 明白にはないが知られていたといえる。そのことを少し説明しよう。

X を チュノフ空間とし, νX をその実コンパクト化とする。すると νX 上の連続関数 f について, 図式

$$\begin{array}{ccc} \nu X & \xrightarrow{\exists! \tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \uparrow & \searrow & \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$$

が成立する。

任意の非自明な環準同型写像 $\varphi: C(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して νX の元が一意的に存在して, $\varphi(f) = \tilde{f}(p)$ が成立することはよく知られている。ここで X をディスクリートな I とすれば, νI は $P(I)$ 上の可算完備極大フィルター全体である。よってここには点から可算完備極大フィルターという図式はある。

何故超積は現われないのであろうか。それは $F \in \mathcal{F}$ に対して、 R^I/F は R の濃度が M_c 未満であるため R と同型となり、又 R から R への非自明環準同型写像は、同型写像のみであるので、 R^I/F と R と同一視しているためである。実際次のような状況では超積が環についても現われる。

乗法の単位 1 をもつ環 $R_i (i \in I)$ 及びある条件を満たす環 R (例えば、 $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ 上の多項式環 など) に対して、
 $\varphi: \prod_{i \in I} R_i \rightarrow R$ を ~~非自明~~ 環準同型写像 (但し $\varphi(1) = 1$) とする。すると $P(I)$ 上の可算完備極大フィルター F と環準同型写像 $h_F: \prod_{i \in I} R_i / F \rightarrow R$ が一意に存在して、 $\varphi = h_F \circ \pi_F$ が成立する。

ここで、 R の条件とは、乗法の単位 1 をもち、任意の環準同型写像 $\varphi: \mathbb{Z}^N \rightarrow R$ (但し $\varphi(1) = 1$) について、 $n \in \mathbb{N}$ が一意的に存在して、 $\varphi(x) = \varphi(e_n \cdot x)$ が成立することである。但し、 $e_n(m) = \delta_{mn}$ 。この条件は群の場合のスレーンジャー群の定義を環の場合に変形したものである。スレーンジャー群の特徴付けは Nunke ([F] の §95) によるきれいなものがある。筆者は上記の環の特徴付けを知らない。

問題 1) 上記の環の特徴付けをせよ。

さて再び群の場合にもどろう。射影 $\pi_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$ が超積への標準的準同型写像に比べ扱いやすいのは、 A_i が $\prod_{i \in I} A_i$ の

直和因子となるからである。後者の場合一般には $\prod_{i \in I} A_i$ の直和因子と見なすことができない。しかし次のような場合、それが可能になる。つまりある $\kappa < M_c$ があって A_i の濃度がすべて κ より小さい場合である。すると I の部分集合 J で J の濃度が $2^\kappa (< M_c)$ より小さいものがあり、どんな $i \in I$ についてもある $j \in J$ について $A_i \simeq A_j$ が成立する。とくに、

$j, j' \in J$ $j \neq j'$ なら $A_j \not\simeq A_{j'}$ とし、 $i \in I_j \iff A_i \simeq A_j$ とすれば $\{I_j : j \in J\}$ は I の互いに交わらない分割となる。可算完備極大フィルター F について、 $I_j \in F$ なる j が一意的に存在することに注意しよう。又そのとき $\prod_{i \in I} A_i / F \simeq A_j$ である。よって π_F と $\pi_F : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$ とする。次に $\prod_{i \in I} A_i$ の部分群 C_j と $x \in C_j \iff \begin{cases} x(i) = 0 \text{ for } i \in \bigcup_{k \neq j} I_k \\ x(i) = x(i') \text{ for } i, i' \in I_j \end{cases}$ とする。

但し、ここで $i \in I_j$ について $A_i = A_j$ とみなす。

さて、 $\pi_F^* : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow C_j$ と $\pi_F^*(x)(i) = \begin{cases} \pi_F(x) & i \in I_j \\ 0 & i \notin I_j \end{cases}$

とすれば $A_j \simeq C_j$ であるから $\prod_{i \in I} A_i / F$ を直和因子とみなすことができる。 $\kappa < M_c$ で $F_\alpha (\alpha < \kappa)$ が相異なる可算完備極大フィルターとすれば、 I の分割 $I_\alpha (\alpha < \kappa)$ があって $I_\alpha \in F_\alpha$ $I_\alpha \notin F_\beta (\alpha \neq \beta)$ となる。よって上の方法で $\pi_{F_\alpha} (\alpha < \kappa)$ を $\prod_{i \in I} A_i$ の直和因子への射影と見なすことができる。この方法によ

ていくつかの定理における“最小の可測基数未満”という条件を落すことができる。 $([E_1], [E_3], [E_4])$

しかし π_F を射影と見なす方法は、今の元すべての問題に
する場合及び前記の κ が M_c をこえると通用しない。例えば
次のような場合である。今、ある群が $\mathbb{Z}^J$ に同型るとき仮
に $\mathbb{Z}$ -積と呼ぶことにしよう。I の濃度が M_c 未満のとき、
 $\mathbb{Z}^I$ の直和因子は $\mathbb{Z}$ -積であるというのは Nunkel の証明
したことである。ところで、I の濃度についての条件を落し
たらどうであろうか。

問題2) 任意の I について、 $\mathbb{Z}^I$ の直和因子は $\mathbb{Z}$ -積か?

直和因子 A の濃度が M_c 未満である場合、 $A \oplus B = \mathbb{Z}^I$
とすれば、上記の方法が使えて、A も B も $\mathbb{Z}$ -積である。 $([E_4])$
けれどもこれは部分解にすぎない。

定理 1.2 及びその version はもっと一般の群についても成
立する。とくに可算完備ゲル代数の上に構造をもつ群に対し
て成立する。 $([E_5])$ その応用については、 $[E_1]$ 及び $[E_3]$
にある。最後に問題を3つあげ、終りにする。

問題3) 可算完備極大フィルターをもち $\mathcal{A}$ のない完備ゲル
代数の存在を可測基数の存在から導けるか?

逆は知られており、 $\aleph_\kappa$ を強コンパクト基数とし、 $\aleph_\kappa$ を
 $(\lambda, 2)$ -DL $(\lambda < \kappa)$ が成立する完備ゲル代数とすれば、可算

完備極大フィルターが $\mathcal{B}$ に存在するので強コンパクト基数の存在からは導ける。

問題4) 可算完備極大フィルターをもつアトムのないブール代数の存在を~~ZFC~~ ZFC から導けるか?

これについては、 $\mathcal{B}$ をアトムのない (ω, ∞) -DL の成立する完備ブール代数とすれば、 $V^{(\mathcal{B})}$ で $\mathcal{B}$ はアトムのない可算完備ブール代数であり、標準的 Generic フィルターは $\mathcal{B}$ の可算完備極大フィルターであることが成立している。

問題5) $\mathbb{R}$ を実数の通常加法についての位相群とし、 $\mathbb{R}^N$ を群 $\mathbb{R}^N$ に ボックス位相 (つまり 開集合 $U_n \subseteq \mathbb{R}$ について $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$ を開集合の基とする。) を入れた位相群とする。"任意の $\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ (φ は位相群としての準同型写像) について $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j x(i_j) \quad \text{は成立するか?}$$

これは 群について $\mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}$ に関する E. Specker の定理の類比である。

参考文献

[D-Z] M. Dugas and B. Zimmermann-Huisgen, Iterated direct sums and products of modules, in L.N. in Math. 874 Springer, 1981, pp. 179-193.

- [E₁] ~~On~~ K. Eda, On a Boolean power of a torsion-free abelian group.
J. Algebra to appear.
- [E₂] K. Eda, A Boolean power and a direct product of abelian groups.
Tsukuba, J. Math. to appear.
- [E₃] K. Eda, Almost-slender groups and Fuchs-44-groups.
Comment. Math. Sancti Pauli, to appear.
- [E₄] K. Eda, A note on a direct power of abelian groups, to appear.
- [E₅] K. Eda, A generalized direct product of abelian groups
and a measurable cardinal, to appear.
- [F] L. Fuchs, Infinite abelian groups, II, Academic Press (1973)
- [G~~R~~W] R. Göbel, - S.V. Richkov - B. Wald; A general theory of
slender groups and Fuchs-44-groups, in L. N. in Math. 874
Springer, 1981, pp. 194-201.
- [I] A. V. Ivanov, — Вестник Московский университет,
Сер. 1. Математика, Том. 6, 1979, стр. 96.