

三角型ノルムを用いたファジィ配置問題について: Part II

弘前大学 理工学部 金 正道 (Masamichi KON)
Faculty of Science and Technology, Hirosaki University

概要 ファジィ max- T 型配置問題を考える。ファジィ max- T 型配置問題は、目的関数に minimum 演算で定義される三角型ノルムの代わりに任意の三角型ノルムを用いることによって、ファジィ maximin 型配置問題を一般化した問題である。そして、三角型ノルムのいくつかの性質を与え、ファジィ max- T 型配置問題の最適解の存在性および安定性について調べる。

1. 準備 連続型配置モデルは、一般に需要点とよばれる $\mathbb{R}^n$ の点の有限集合が与えられていると仮定される。需要点は既存の施設または顧客の位置をモデル化したものである。 $d_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, \ell (\ell \geq 2)$ を需要点とし、 $I \equiv \{1, 2, \dots, \ell\}$ とする。このとき、新たに単一の施設を $\mathbb{R}^n$ に配置する問題は、単一施設配置問題とよばれる。各需要点から施設までの距離が小さいほど望ましいならば、それは各需要点から施設までの距離を含む関数の最小化問題として次のように定式化される。

$$(1) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(\gamma_1(x - d_1), \gamma_2(x - d_2), \dots, \gamma_\ell(x - d_\ell))$$

ここで、 $x \in \mathbb{R}^n$ は施設の位置を表す変数である。 f は通常 $\mathbb{R}^\ell$ から $\mathbb{R}$ への非減少凸関数と仮定される。各 $i \in I$ に対して、 $\gamma_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は通常ノルムやゲージと仮定され、 $\gamma_i(x - d_i)$ は d_i から x までの距離を表す。以下、 $\gamma_i, i \in I$ はゲージとする。

B は原点をその内部に含む $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合とする。 B に対するゲージ (gauge) $\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\gamma(x) \equiv \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\}$ と定義される。ゲージに関する詳細は [4,12] 参照。

各需要点から施設までの距離が小さいほど望ましいならば、(1) の定式化は自然である。施設のある位置に対して、ある 2 つの需要点から施設までの距離が等しいとしても、それぞれの需要点に関する満足度は異なるかもしれない。また、配置する施設が飛行場ならば、飛行場が需要点に近すぎると騒音のため望ましくないだろう。このような状況も考慮するために、需要点に関する施設の位置に対する満足度を表すメンバーシップ関数を与え、目的関数にメンバーシップ関数を含む最大化問題を考える。メンバーシップ関数 $\mu_i: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \equiv \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}, i \in I$ が与えられていると仮定する。各 $x \in \mathbb{R}^n$ と $i \in I$ に対して、 $\mu_i(\gamma_i(x - d_i))$ は需要点 d_i に関する施設の位置 x に対する満足度を表す。便宜上、 $x < 0$ に対して $\mu_i(x) = 0, i \in I$ と仮定する。各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\bar{\mu}_i(x) \equiv \mu_i(\gamma_i(x - d_i)), i \in I$ とする。各 $i \in I$ に対して、 A_i をメンバーシップ関数 μ_i をもつ $\mathbb{R}$ 上のファジィ集合とし、 $\bar{A}_i$ をメンバーシップ関数 $\bar{\mu}_i$ をもつ $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合とする。このとき、各 $i \in I$ に対して、 A_i は需要点 d_i に関する施設までの望ましい距離を表すと解釈されるファジィ集合であり、 $\bar{A}_i$ は需要点 d_i に関する施設の望まし

い位置を表すと解釈されるファジィ集合である。ファジィ maximin 型配置問題 (fuzzy maximin location problem, FMMP) は次のように定式化される。

$$(2) \quad \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mu_{\text{FMMP}}(\mathbf{x}) \equiv \min \{ \mu_1(\gamma_1(\mathbf{x} - \mathbf{d}_1)), \mu_2(\gamma_2(\mathbf{x} - \mathbf{d}_2)), \dots, \mu_\ell(\gamma_\ell(\mathbf{x} - \mathbf{d}_\ell)) \}$$

例えば、ブロックノルムおよび非対称直角距離を用いた FMMP が、それぞれ [7] および [9] において扱われている。各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mu_{\text{FMMP}}(\mathbf{x})$ の値は施設の位置 $\mathbf{x}$ に対する総合満足度 (すべての需要点に関する満足度) を表すと解釈される。 μ_{FMMP} をメンバーシップ関数としてもつ $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合は $\bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$ と表され、それはファジィ集合 $\bar{A}_i, i \in I$ の通常の共通部分を表し、すべての需要点に関する施設の望ましい位置を表すと解釈されるファジィ集合である。よって、FMMP は総合満足度を最大にするような施設の位置を求める問題と解釈される。ファジィ max- T 型配置問題 (fuzzy max- T location problem, FMTP) は FMMP の一般化であり、次のように定式化される。

$$(3) \quad \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mu_{\text{FMTP}}(\mathbf{x}) \equiv T(\mu_1(\gamma_1(\mathbf{x} - \mathbf{d}_1)), \mu_2(\gamma_2(\mathbf{x} - \mathbf{d}_2)), \dots, \mu_\ell(\gamma_\ell(\mathbf{x} - \mathbf{d}_\ell)))$$

ここで、 $T: [0, 1]^\ell \rightarrow [0, 1]$ は $[0, 1]$ 上の二項演算である三角型ノルムの ℓ 項演算への拡張 (正確な定義は 2 節において与える) であり、FMMP で用いられている minimum 演算を一般化したものである。各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mu_{\text{FMTP}}(\mathbf{x})$ の値は施設の位置 $\mathbf{x}$ に対する T を演算として用いたときの総合満足度を表すと解釈される。 μ_{FMTP} をメンバーシップ関数としてもつ $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合は $(\bigcap_T)_{i \in I} \bar{A}_i$ と表され、それはファジィ集合 $\bar{A}_i, i \in I$ の T を用いたときの共通部分を表し、すべての需要点に関する T を用いたときの施設の望ましい位置を表すと解釈されるファジィ集合である。よって、FMTP は T を用いたときの総合満足度を最大にするような施設の位置を求める問題と解釈される。FMMP および FMTP のすべての最適解の集合をそれぞれ S_{FMMP}^* および S_{FMTP}^* とする。

[10, 11] において、 $\mu_i, i \in I$ を $\mathbb{R}^n$ から $[0, 1]$ への関数とし、(2) および (3) において $\mu_i(\gamma_i(\mathbf{x} - \mathbf{d}_i)), i \in I$ を $\mu_i(\mathbf{x}), i \in I$ で置き換えたファジィ maximin 型および max- T 型問題が扱われている。

本稿では、ファジィ max- T 型配置問題を主に扱う。そして、三角型ノルムのいくつかの性質を与え、ファジィ max- T 型配置問題の最適解の存在性および安定性について調べる。

2. 三角型ノルム 本節では、FMTP に用いられる三角型ノルムのいくつかの性質を与える。三角型ノルムに関する詳細は [5] 参照。

三角型ノルム (triangular norm) (または単に **t-ノルム (t-norm)**) は $[0, 1]$ 上の二項演算 T 、すなわち、関数 $T: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ で任意の $x, y, z \in [0, 1]$ に対して次の 4 つの条件 (T1) $T(x, y) = T(y, x)$ (可換性), (T2) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (結合性), (T3) $T(x, y) \leq T(x, z)$ whenever $y \leq z$, (単調性) および (T4) $T(x, 1) = x$ (境界条件) をみたすものをいう。

次の 4 つの t-ノルム T_M, T_P, T_L, T_D は基本的 t-ノルムとして知られていて、各 $x, y \in [0, 1]$

に対して次のように定義される。

$$\begin{aligned}
 T_M(x, y) &\equiv \min\{x, y\} && \text{(minimum)} \\
 T_P(x, y) &\equiv x \cdot y && \text{(product)} \\
 T_L(x, y) &\equiv \max\{x + y - 1, 0\} && \text{(Lukasiewicz t-norm)} \\
 T_D(x, y) &\equiv \begin{cases} \min\{x, y\} & \text{if } \max\{x, y\} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} && \text{(drastic product)}
 \end{aligned}$$

任意の t -ノルム T は、すべての $x, y \in [0, 1]$ に対して $T_D(x, y) \leq T(x, y) \leq T_M(x, y)$ となることが容易にわかる。

定義における可換性 (T1) と結合性 (T2) より、 t -ノルム T は ℓ 項演算に拡張できる。すなわち、 $x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, k+2$ に対して

$$T^{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{k+2}) \equiv T(T^k(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}), x_{k+2})$$

とする。ここで、 $T^1(x_1, x_2) \equiv T(x_1, x_2)$ である。混乱する恐れがないと思われるときは特に断らず、 $T^{\ell-1}$ の添字 $\ell-1$ は省略して T と書くことにする。

T_M を用いた FMTP は FMMP となることに注意。 T を t -ノルムとし、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $x_i = \mu_i(\gamma_i(\mathbf{x} - \mathbf{d}_i))$, $i \in I$ と置くと、 $T(x_1, x_2, \dots, x_\ell)$ の値は施設の位置 $\mathbf{x}$ に対する総合満足度を表す。

定理 1 $\Lambda \subset [-\infty, \infty]$ を空でない区間とし、 $T_\lambda : [0, 1]^\ell \rightarrow [0, 1], \lambda \in \Lambda$ および $T : [0, 1]^\ell \rightarrow [0, 1]$ を t -ノルムとする。 T が連続であり、 $\lambda \rightarrow \lambda_0$ のとき T_λ が T に (各点) 収束するならば $\lambda \rightarrow \lambda_0$ のとき T_λ は T に一様収束する。ここで、 $\lambda, \lambda_0 \in \Lambda$ である。

定理 2 $\Lambda \subset [-\infty, \infty]$ を空でない区間とし、 $T_\lambda^1 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1], \lambda \in \Lambda$ および $T^1 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ を t -ノルムとする。 T^1 が連続であり、 $\lambda \rightarrow \lambda_0$ のとき T_λ^1 が T^1 に収束するならば $\lambda \rightarrow \lambda_0$ のとき $T_\lambda^{\ell-1}$ は $T^{\ell-1}$ に収束する。ここで、 $\lambda, \lambda_0 \in \Lambda$ である。

定理 3 $T^1 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ を t -ノルムとする。このとき、次が成り立つ。

- (i) T^1 が上半連続ならば $T^{\ell-1}$ も上半連続になる。
- (ii) T^1 が下半連続ならば $T^{\ell-1}$ も下半連続になる。
- (iii) T^1 が連続ならば $T^{\ell-1}$ も連続になる。

3. FMTP の最適解の存在性と安定性 本節では、 S_{FMTP}^* が空にならないための条件を与え、 t -ノルムに対する FMTP の最適解の安定性を調べる。

μ を $\mathbb{R}^n$ から $[0, 1]$ への関数とする。各 $\alpha \in (0, 1] \equiv \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ に対して、 μ の上方レベル集合 $[\mu]_\alpha \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x) \geq \alpha\}$ を μ の α -カット (α -cut) とよぶ。任意の $\alpha \in (0, 1]$ に対して μ の α -カットが有界であるとき μ をメンバーシップ関数としてもつファジィ集合は有界 (bounded) であるという。

次の定理は、FMTP の最適解が存在するための十分条件を与える。

定理4 すべての $\mu_i, i \in I$ が上半連続であり、ある $j \in I$ に対して A_j が有界であり、 T が上半連続 t-ノルムならば $S_{\text{FMTP}}^* \neq \emptyset$ となる。

次の系は、FMMP の最適解が存在するための十分条件を与える。

系1 すべての $\mu_i, i \in I$ が上半連続であり、ある $j \in I$ に対して A_j が有界であるならば $S_{\text{FMMP}}^* \neq \emptyset$ となる。

$\Lambda \subset [-\infty, \infty]$ を空でない区間とし、 $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を t-ノルムの族とする。 $g: \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow [0, 1]$ を各 $x \in \mathbb{R}^n$ と $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$g(x, \lambda) \equiv T_\lambda(\mu_1(\gamma_1(x - d_1)), \dots, \mu_\ell(\gamma_\ell(x - d_\ell)))$$

と定義する。各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、 $g(\cdot, \lambda): \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ は t-ノルム T_λ を用いた FMTP の目的関数である。最適値関数 $\phi: \Lambda \rightarrow [0, 1]$ および最適解写像 $\Phi: \Lambda \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ (集合値写像) を各 $\lambda \in \Lambda$ に対してそれぞれ

$$\phi(\lambda) \equiv \sup\{g(x, \lambda) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

および

$$\Phi(\lambda) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(\lambda) = g(x, \lambda)\}$$

と定義する。各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、 $\phi(\lambda) = g(x, \lambda)$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在するならば、 $\phi(\lambda)$ は t-ノルム T_λ を用いた FMTP の最適値になり、 $\Phi(\lambda)$ は t-ノルム T_λ を用いた FMTP のすべての最適解の集合になる。

定理5 $\lambda \rightarrow \lambda_0$ のとき T_λ が T_{λ_0} に収束し、 T_{λ_0} が連続ならば ϕ は λ_0 において連続になる。ここで、 $\lambda, \lambda_0 \in \Lambda$ である。

μ を $\mathbb{R}$ から $[0, 1]$ への関数とする。集合 $\text{supp}(\mu) \equiv \{x \in \mathbb{R} : \mu(x) > 0\}$ を μ のサポート (support) という。 $\text{supp}(\mu)$ が有界であるとき、 μ をメンバーシップ関数としてもつ $\mathbb{R}$ 上のファジィ集合はサポート有界 (support bounded) であるという。 $\lambda_0 \in \Lambda$ の適当な近傍 $V \subset \Lambda$ に対して和集合 $\bigcup_{\lambda \in V} \Phi(\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ が有界となるとき、 Φ は λ_0 のまわりで一様有界 (uniformly bounded) であるという。 Φ が $\lambda_0 \in \Lambda$ のまわりで一様有界であり、さらに $\lambda_k \rightarrow \lambda_0, x_k \rightarrow x_0$ かつ $x_k \in \Phi(\lambda_k) (k = 1, 2, \dots)$ であるような任意の列 $\{\lambda_k\} \subset \Lambda$ および $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ に対して $x_0 \in \Phi(\lambda_0)$ が成立するとき、 Φ は λ_0 において上半連続 (upper semicontinuous) であるという。また、 $\lambda_k \rightarrow \lambda_0 \in \Lambda$ となる任意の列 $\{\lambda_k\} \subset \Lambda$ と任意の点 $x_0 \in \Phi(\lambda_0)$ に対して、 $x_k \rightarrow x_0$ かつ $x_k \in \Phi(\lambda_k) (k \geq k_0)$ となるような整数 $k_0 > 0$ と点列 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ が存在するとき、 Φ は λ_0 において下半連続 (lower semicontinuous) であるという。 Φ は $\lambda_0 \in \Lambda$ において上半かつ下半連続であるとき、 λ_0 において連続 (continuous) であるという。

定理6 すべての $\mu_i, i \in I$ は $[0, \infty)$ 上で連続で、ある $j \in I$ に対して A_j はサポート有界であり、 $\lambda \rightarrow \lambda_0$ のとき T_λ は T_{λ_0} に収束し、 T_{λ_0} は連続とする。ここで、 $\lambda, \lambda_0 \in \Lambda$ である。このとき、 $\Phi(\lambda_0) \neq \emptyset, \phi(\lambda_0) > 0$ ならば Φ は λ_0 において上半連続になる。さらに、 λ_0 のある近傍 $V \subset \Lambda$ が存在して任意の $\lambda \in V$ に対して $\Phi(\lambda) \neq \emptyset$ となり、 $\Phi(\lambda_0)$ が単

集合ならば Φ は λ_0 において連続になる。

4. 結論 本稿では、ファジィ maximin および max- T 型配置問題を考え、主に、ファジィ max- T 型配置問題を扱った。まず、三角型ノルムのいくつかの性質を与えた。次に、ファジィ maximin および max- T 型配置問題の最適解が存在するための十分条件を与えた。最後に、三角型ノルムに対するファジィ max- T 型配置問題の最適解の安定性について調べた。

参考文献

- [1] M. Avriel, W. E. Diewert, S. Schaible and I. Zang, *Generalized concavity*, Plenum Press, N. Y., London, 1988.
- [2] R. Bellman and L. Zadeh, *Decision making in fuzzy environment*, Manage. Sci., **17**, 1970, 141-164.
- [3] M. Fukushima, *Fundamentals of nonlinear optimization* (in Japanese), Asakura-Syoten, Japan, 2001.
- [4] J. -B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [5] E. P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, *Triangular norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2000.
- [6] M. Kon, *On fuzzy multicriteria location problems*, to appear in Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis edited by W. Takahashi and T. Tanaka, Yokohama Publishers, Japan, 2004, 227-232.
- [7] M. Kon and S. Kushimoto, *On efficient solutions of multicriteria location problems with the block norm*, Scientiae Mathematicae, **2**, 1999, 245-254.
- [8] T. Maeda, *Multiobjective decision making theory and economic analysis* (in Japanese), Makino-Syoten, Japan, 1996.
- [9] T. Matsutomi and H. Ishii, *Fuzzy facility location problem with asymmetric rectilinear distance* (in Japanese), Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems, **8**, 1996, 57-64.
- [10] J. Ramík and M. Vlach, *Pareto-optimality of compromise decisions*, Fuzzy Sets and Systems, **129**, 2002, 119-127.
- [11] J. Ramík and M. Vlach, *Generalized concavity in fuzzy optimization and decision analysis*, Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, 2002.

- [12] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.
- [13] R. T. Rockafellar and R. J-B. Wets, *Variational analysis*, Springer-Verlag, New York, 1998.