

x のべきの大きさで零に近づく解

東京都立大学

岩野 正宏

1. 不確定型特異点をもつ連立方程式 連立方程式

$$(A) \quad x^{\sigma+1} y' = f(x, y, z), \quad x z' = g(x, y, z)$$

において, σ は正の整数; x は複素独立変数; y と z はともにスカラー; $f(x, y, z), g(x, y, z)$ は

$$|x| \leq \xi, \quad |y| \leq d, \quad |z| \leq d$$

において (x, y, z) の正則関数であり, しかも $f(0, 0, 0) = 0$, $g(0, 0, 0) = 0$.

さらに

仮定 I

$$\nu \equiv f_y(0, 0, 0) \neq 0$$

を仮定すれば, 簡単な変換を行うことにし,

$$f_x(0, 0, 0) = 0, \quad f_z(0, 0, 0) = 0, \quad g_y(0, 0, 0) = 0$$

が成り立つと仮定して一般性を失わない。さうして

仮定 II

$\mu \equiv g_x(0,0,0)$ の実部は正.

を仮定する.

形式変換に関する 福原の理論 (方法) を応用すれば,
方程式 (A) は

$$(F) \quad y \sim \sum_g \Phi(x)^g A_g(x), \quad z \sim \sum_g \Phi(x)^g B_g(x)$$

の形の形式解をもつことが証明できる。ここで $A_g(x)$, $B_g(x)$ は x のべき級数; $\Phi(x)$ は reduced equation

$$xv' = \mu v + cx^\mu$$

の一般解, したがって, C を任意定数として, $\Phi(x)$ の形は

$$\Phi(x) = Cx^\mu \quad (C=0); \quad \Phi(x) = x^\mu (C + c \log x) \quad (C \neq 0).$$

$C \neq 0$ のときは, μ は 正の整数 であることが知られている.

著者は, (F) の係数 $A_g(x)$, $B_g(x)$ が x の解析関数であるように すでに定められている ものと仮定して, 形式解 (F) は 収束 であることを, *Funkcialaj Ekvacioj* 12 (1969) 251-168 に証明した。実は この結果は, $C \neq 0$ の場合 には少し修正しなければならないことが

わかった。

まず 定理 を述べる。

定理 $\underline{\theta}$, $\bar{\theta}$ は

$$\underline{\theta} = \frac{1}{\sigma} \left(\arg v - \frac{5\pi}{2} \right) + \varepsilon, \quad \bar{\theta} = \frac{1}{\sigma} \left(\arg v + \frac{\pi}{2} \right) - \varepsilon,$$

または

$$\underline{\theta} = \frac{1}{\sigma} \left(\arg v - \frac{\pi}{2} \right) + \varepsilon, \quad \bar{\theta} = \frac{1}{\sigma} \left(\arg v + \frac{5\pi}{2} \right) - \varepsilon$$

のどちらか一方を表わす。 ε は十分小さい正の数。

領域

$$(D) \quad 0 < |x| < \xi'', \quad \underline{\theta} < \arg x < \bar{\theta}, \quad |v| < b''$$

において定義された関数 $Y(x, v)$, $Z(x, v)$ が存在し,

次の条件を満足する:

i) $Y(x, v)$, $Z(x, v)$ は (x, v) の関数として (D)

において 正則。

ii) 一様収束な展開式

$$Y(x, v) = \sum_{\ell=0}^{\infty} v^{\ell} \bar{Y}_{\ell}(x), \quad Z(x, v) = \sum_{\ell=0}^{\infty} v^{\ell} \bar{Z}_{\ell}(x)$$

が成り立ち、係数は 角領域

$$\underline{\theta} < \arg x < \bar{\theta}, \quad 0 < |x| < \xi''$$

において 正則, しかも この角領域のなから $x \rightarrow 0$

のとき, α のべき級数

$$\bar{Y}_g(x) \simeq A_g(x), \quad \bar{Z}_g(x) \simeq B_g(x)$$

に漸近展開される. ($A_g(x), B_g(x)$ は (P) に現れたものと同じもの).

iii) $(x, \Phi(x))$ が 領域 (D) の外にある限り, すなわち, 不等式

$$0 < |\alpha| < \xi'', \quad \underline{\alpha} < \arg x < \bar{\alpha}, \quad |\Phi(x)| < b''$$

を満足する限り,

$$y = Y(x, \Phi(x)), \quad z = Z(x, \Phi(x))$$

は方程式 (A) の 真の解 である.

この 定理 の証明の概略を つぎに述べる.

2. $c=0$ の場合. 定理の証明は前記の論文のままでよい.

形式解 (F) を, 方程式 (A) の (y, z) の代わりに, 置き換えれば $\{A_g, B_g\}$ は 次の形の微分方程式も満足することかわかる: すなわち, $\Phi(x)$ の $0, 1, \dots, g$ 次の項の係数は等しいとすれば,

$$x^{\sigma+1} A_0' = f(x, A_0, B_0), \quad x B_0' = g(x, A_0, B_0),$$

$$\begin{cases} x^{\sigma+1} A_g' = (J(x) - gH x^{\sigma}) A_g + K(x) B_g + P_g(x), \\ x B_g' = L(x) A_g + (M(x) - gH) B_g + Q_g(x), \end{cases}$$

$$J(x) \equiv f_y(x, A_0(x), B_0(x)), \quad K(x) \equiv f_x(x, A_0(x), B_0(x)),$$

$$L(x) \equiv g_y(x, A_0(x), B_0(x)), \quad M(x) \equiv g_x(x, A_0(x), B_0(x))$$

$P_g(x), Q_g(x)$ は $A_1(x), \dots, A_{g-1}(x), B_1(x), \dots, B_{g-1}(x)$ およびこれらの導関数の多項式で、係数は $(A_0(x), B_0(x), x)$ の3変数の関数として $(0, 0, 0)$ の近傍において一価正則な関数である。したがって、逐次に $\{A_g(x), B_g(x)\}$ を, $g=0, 1, \dots$ の順に決めていけば, $P_g(x), Q_g(x)$ はともに既知関数と考えられる。さらに、これらの微分方程式は、形式解

$$(2.1)_g \quad A_g \sim \sum_{l=0}^{\infty} P_{lg} x^l, \quad B_g \sim \sum_{l=0}^{\infty} Q_{lg} x^l$$

をもつこと。および $f_y(0, 0, 0) \neq 0$ に注意すれば, 第1の方程式に存在定理を応用することによって,

角領域

$$(2.2) \quad \underline{\alpha} < \arg x < \overline{\alpha}, \quad 0 < |x| < \xi'$$

において一価正則かつべき級数 (2.1) に漸近展開可能な解がただ一つ存在する。これを $\{A_0(x), B_0(x)\}$ で表わす。また $f(0,0,0) = g(0,0,0) = 0$ を仮定しているから,

$$P_{00} = 0, \quad Q_{00} = 0$$

である。したがって

$$\lim_{x \rightarrow 0} A_0(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} B_0(x) = 0.$$

ゆえに

$$\lim_{x \rightarrow 0} J(x) \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} K(x) = 0.$$

ふたたび存在定理を応用すれば、次の結論を得る:

(F) の形の形式解において、係数 $\{A_g(x), B_g(x)\}$ は非線型 ($g=0$) または線型 ($g \neq 0$) 方程式の解として逐次にしかも一意的に定められる。このとき各係数は角領域 (2.2) において一価正則しかつこのなかから $x \rightarrow 0$ のとき形式級数 (2.1)_g に漸近展開可能である (そのような解がただ一つ存在するとき,

漸近展開は一意的であるという)。

形式解 (P) の収束の証明は、前記の論文に展開された通りにできる。 $\bar{Y}_\varepsilon(x) = A_\varepsilon(x)$, $\bar{Z}_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x)$ とおけばよい。

3. $C \neq 0$ の場合. まえと同じ方法を応用してみる。

$C \neq 0$ であるから、

$$x \Phi'(x) = \mu \Phi(x) + C x^\mu$$

となることも注意する。(P) を (A) に代入して、 $\Phi(x)$ の 0 次の項、すなわち $\Phi(x)$ に無関係な項の係数は等しいとおくことにより、連立方程式

$$\begin{cases} x^{\sigma+1} A_0' = f(x, A_0, B_0) - C x^{\mu+\sigma} A_1, \\ x B_0' = g(x, A_0, B_0) - C x^\mu B_1, \end{cases}$$

を得る。この連立方程式は、係数 $\{A_0(x), B_0(x)\}$ を決めることを期待されているが、方程式の右辺にもう一組の未知数 $\{A_1, B_1\}$ を含んでいる。同じような不都合は、 $\{A_1(x), B_1(x)\}$ を定義することを目指す方程式において、あらたに一組の未知数 $\{A_2, B_2\}$ が含まれているという理由から生ずる以下同様。したがって (P) の形の

形式級数も考えても、その各係数はただ形式的な意味しかもたないから、級数 (F) 自身の解析的意味を調べることはできない!

そこで (F) の代わりに、 (F) を x のべき級数に形式的に並べかえて得られる新しい形式解

$$(F') \quad y \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell} a_{\ell}(\Phi(x)), \quad z \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell} b_{\ell}(\Phi(x))$$

を考える。(8.1)_q を考慮すれば、 $a_{\ell}(v)$, $b_{\ell}(v)$ は

$$(8.1)_{\ell} \quad a_{\ell}(v) \sim \sum_{g=0}^{\infty} P_{\ell g} v^g, \quad b_{\ell}(v) \sim \sum_{g=0}^{\infty} Q_{\ell g} v^g$$

の形の形式べき級数であらわされる。

方程式 (A) の $\{y, z\}$ の代りに (F') の右辺を代入する。 $x^0, x^1, \dots, x^{\ell}, \dots$ の項の係数をそれぞれ等しいとあければ次の形の方程式を得る:

$$f(0, a_0, b_0) = 0, \quad \mu v \frac{db_0}{dv} = g(0, a_0, b_0),$$

$$\begin{cases} E(v) a_{\ell} + F(v) b_{\ell} = S_{\ell}(v), \\ \mu v \frac{db_{\ell}}{dv} = G(v) a_{\ell} + (H(v) - \ell) b_{\ell} + T_{\ell}(v), \end{cases}$$

$$E(v) = f_y(0, a_0(v), b_0(v)), \quad F(v) = f_x(0, a_0(v), b_0(v)),$$

$$G(v) = g_y(0, a_0(v), b_0(v)), \quad H(v) = g_x(0, a_0(v), b_0(v)),$$

$S_\ell(v), T_\ell(v)$ は $a_1(v), \dots, a_{\ell-1}(v), b_1(v), \dots, b_{\ell-1}(v)$ および これらの導関数の多項式で、各係数は $(a_0(v), b_0(v), v)$ の 3 変数の関数として $(0, 0, 0)$ の近傍で一価正則である。上記の方程式はすべて形式解として $(3, 1)_\ell$ の形の v のべき級数であらわされるものもっていることを注意しておく。

$f_y(0, 0, 0) \neq 0, f_x(0, 0, 0) = 0$ であると仮定されておるから、第 1 の微分方程式のはじめの式から a_0 を解いて

$$a_0 = U(b_0), \quad U(0) = 0.$$

ここで $U(b_0)$ は $b_0 = 0$ において一価正則。あとの式の a_0 の代りに $U(b_0)$ を代入して、

$$\mu v \frac{db_0}{dv} = g(0, U(b_0), b_0) = \hat{g}(b_0), \quad \hat{g}(0) = 0$$

を行う。 $\hat{g}(b_0)$ は $b_0 = 0$ の近傍で一価正則。形式解として v のべき級数の形のものをもつから、Briot-Bouquet 理論から、この形式級数は 0 である収束半径をも

ち その和 $b_0(v)$ は $v=0$ の近傍で一価正則な解となる。
 $a_0(v) \equiv U(b_0(v))$ もまた $v=0$ で一価正則。かくし
 て, 第1の方程式は $v=0$ の近傍 $|v| < b'$ において
一価正則な解 $\{a_0(v), b_0(v)\}$ をもつ。 $\hat{g}(0)=0, U(0)=0$
より, $a_0(0)=0, b_0(0)=0$.

$f_y(0,0,0) \neq 0$ より, $E(v)$ および $E(v)^{\pm}$ は
 ともに $|v| < b'$ において 一価正則 であると仮定し
 ても 一般性を失わない。同じような議論を, 第2, ... 以下
 の方程式 に応用すれば, 次の結果を得る:

(F') の形の形式解を考えると, 係数 $\{a_\ell(v), b_\ell(v)\}$ は
非線型 ($g=0$) または 線型 ($g \neq 0$) 方程式の解として,
逐次に, ' $v=0$ の近傍 $|v| < b'$ において一価正則な
関数であるように定められる。

(F') は 形式解として意味をもつから, (F') 自身の
 解析的な意味を問へることが出来る。前記の論文において,
 形式解

$$y \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} \Phi(x)^{\ell} A_{\ell}(x), \quad x \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} \Phi(x)^{\ell} B_{\ell}(x)$$

の代りに, 形式解

$$y \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell} a_{\ell}(\Phi(x)), \quad x \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell} b_{\ell}(\Phi(x))$$

も考え、全く同じ推論を行う。次の定理を証明することもできる。

領域 (D) において一価正則な関数 $Y(x, v)$, $Z(x, v)$ が存在し、次の性質をもつ。

α) $Y(x, v)$, $Z(x, v)$ は $x \rightarrow 0$, $\underline{\theta} < \arg x < \overline{\theta}$ のとき、一様に漸近展開

$$Y(x, v) \sim \sum_{l=0}^{\infty} x^l a_l(v), \quad Z(x, v) \sim \sum_{l=0}^{\infty} x^l b_l(v)$$

が成り立つ、すなわち任意の自然数 N に対して v に無関係に

$$\left| Y(x, v) - \sum_{l=0}^{N-1} x^l a_l(v) \right| = O(x^N).$$

β) $(x, \Phi(x))$ の値が不等式

$$0 < |x| < \xi'', \quad \underline{\theta} < \arg x < \overline{\theta}, \quad |\Phi(x)| < b''$$

を満足する限り、

$$y = Y(x, \Phi(x)), \quad z = Z(x, \Phi(x))$$

は方程式 (A) の解である。

この定理の証明できれば最初の定理は次のようにして証明される。まず $Y(x, v)$, $Z(x, v)$ は $v=0$ におい

て一価正則であるから, Cauchy の積分定理により

$$Y(x, v) = \sum_{\ell=0}^{\infty} v^{\ell} \bar{Y}_{\ell}(x), \quad Z(x, v) = \sum_{\ell=0}^{\infty} v^{\ell} \bar{Z}_{\ell}(x),$$

ここで

$$\bar{Y}_{\ell}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|v|=b''} \frac{Y(x, v)}{v^{\ell+1}} dv.$$

$Y(x, v)$, $Z(x, v)$ は (D) の閉包

$$\underline{a} \leq \arg x \leq \overline{a}, \quad 0 \leq |x| \leq \xi'', \quad |v| \leq b''$$

において連続であると仮定してよい. 一方, $Q_{\ell}(v)$ は $v=0$ で一価正則であるから, Cauchy の積分定理により

$$P_{\ell\ell} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|v|=b''} \frac{Q_{\ell}(v)}{v^{\ell+1}} dv.$$

ゆえに

$$\bar{Y}_{\ell}(x) - \sum_{l=0}^{N-1} x^l P_{\ell\ell} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|v|=b''} \frac{Y(x, v) - \sum_{l=0}^{N-1} x^l Q_{\ell}(v)}{v^{\ell+1}} dv,$$

$Y(x, v)$ の x のべき級数への漸近展開は v について一様であるから, この右辺の被積分関数の大きさは

$O(x^N)$, $x^{-1-\epsilon}$ とある. ゆえに

$$\left| \bar{Y}_f(x) - \sum_{l=0}^{N-1} x^l P_{lf} \right| = O(x^N).$$

N は任意であったから, この不等式は 漸近展開

$$\bar{Y}_f(x) \simeq \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_{lf}$$

が成り立つことを示す. すなわち $\bar{Y}_f(x)$ の漸近展開と,
 $A_f(x)$ のそれとは一致する.

4. ベクトル方程式への拡張 方程式 (A) に対する定理
 は, y および z が ベクトル の場合に拡張される:

$$(B) \quad x I_m(x^\sigma) y' = f(x, y, z), \quad x z' = g(x, y, z)$$

$$I_m(x^\sigma) = \text{diag} \{ x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \dots, x^{\sigma_m} \},$$

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ は および 正の整数; y は m 次,
 z は n 次のベクトル; f は m 次, g は n 次の
 ベクトル関数で 各成分は 複素 x, y, z 平面の
 $m+n+1$ 次元複素空間の原点の近傍で一価正則 かつ

$$f(0, 0, 0) = 0, \quad g(0, 0, 0) = 0.$$

仮定 I の代りに

仮定 I 関数行列式

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) \right) \neq 0.$$

もしくは 行列 $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) \right)$ の 固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ はすべて 零 と異なる.

この行列を Q でかけば, もし必要であれば変換

$$\begin{cases} y = Y - Q^{-1} f_z(0) Z - Q^{-1} f_x(0) x, \\ z = x^* Q^{-1} g_y(0) Y + Z \end{cases}$$

を行うことにより,

$$f_z(0,0,0) = 0, \quad f_x(0,0,0) = 0, \quad g_y(0,0,0) = 0$$

と仮定して一般性を失わない. 仮定 II に対応して.

仮定 II 行列

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$$

の 固有値 $\mu_1, \dots, \mu_n$ の 実部 は すべて正.

これらの仮定のもとに, 同いような定理が得られる. くに
し $\Phi(x)$ は n 次のベクトルで x の k 成分 $\Phi_k(x)$

$$\Phi_k(x) = x^{H_k} \{C_k + (C_1, \dots, C_{k-1}, \log x \text{ の多項式})\}.$$

とく $C_1 = \dots = C_n = 0$ のとき, $\Phi(x) \equiv 0$ のとき
は,

$$y = \sum_{\ell} \Phi(x)^{\ell} A_{\ell}(x), \quad z = \sum_{\ell} \Phi(x)^{\ell} B_{\ell}(x)$$

の形で展開できる 収束な解 の存在が すでに証明され
ている. 展開式の有効な範囲は

$$\underline{\theta} < \arg x < \overline{\theta}, \quad 0 < |x| < \xi'', \quad \|\Phi(x)\| < b''$$

の形であらわされる. ただし $\|\cdot\|$ は maximum norm,

$\underline{\theta} < \arg x < \overline{\theta}$ は, すべての番号 j に対して

$$\left| \arg(-y_j) - \sigma_j \arg x \right| < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon'$$

$\varepsilon' > 0$ 十分小

が 同時に成り立つような最大の角領域. しかも この角
領域のなかに, $x \rightarrow 0$ のとき指数関数

$$\exp\left(\operatorname{Re} \frac{y_j}{\sigma_j x^{\sigma_j}}\right)$$

が ∞ となるような x の方向 が含まれている ことを
仮定しなければならない.