

# Nonlinear Ergodic Theorems for Non-Lipschitzian Semigroups

東工大 理 高橋 渉 (Watan Takahashi)

$S$  もある与えられた集合とし,  $m(S)$  を  $S$  上の有界実数値関数の全体のつくる Banach 空間とする.  $X$  を constant 1 を含む  $m(S)$  の線形部分空間とし,  $X^*$  をその dual 空間とする. このとき,  $\mu \in X^*$  は  $\|\mu\| = \mu(1) = 1$  を満たすなら,  $X$  上の mean とよばれる.  $\mu \in X^*$  が mean である必要十分条件は, 任意の  $f \in X$  に対し

$$\inf_{s \in S} f(s) \leq \mu(f) \leq \sup_{s \in S} f(s)$$

が成り立つことである. また,  $S$  が topological 半群であるとき,  $a \in S$  に対して,  $m(S)$  上の線形連続写像  $l_a$  と  $r_a$  は

$$(l_a f)(t) = f(at), \quad (r_a f)(t) = f(ta)$$

で定義される.  $X$  が 1 を含み, かつ  $l_a(X) \subset X$  ( $r_a(X) \subset X$ ) となる線形部分空間とするとき,  $X$  上の mean  $\mu$  は,  $f \in X$  と  $a \in S$  に対して

$$\mu(la f) = \mu(f) \quad (\mu(ra f) = \mu(f))$$

を満たすなら,  $X$  上の left invariant (right invariant) mean であるといわれる. また, left invariant であつ right invariant である mean を invariant mean とよぶ.

一方,  $C$  を Hilbert 空間の空でない閉凸集合とし,  $C$  上の mappings の族を  $S = \{T_s : s \in S\}$  とする. このとき,  $S$  がつぎの条件 (1), (2), (3) を満たすなら,  $S$  は nonexpansive 半群であるといわれる.

$$(1) \quad T_{st}x = T_s T_t x, \quad \forall s, t \in S, \forall x \in C;$$

$$(2) \quad \text{任意の } x \in C \text{ に対し, } s \mapsto T_s x \text{ は連続である};$$

$$(3) \quad \text{任意の } s \in S \text{ に対し, } T_s \text{ は nonexpansive 写像である.}$$

また, (3) の条件を

$$(3)' \quad \text{任意の } s \in S \text{ に対し, } T_s \text{ はリゾット係数 } k_s \text{ をもつリゾット写像であり, } \limsup_s k_s \leq 1 \text{ である,}$$

という条件でおきかえたとき,  $S$  は uniformly nonexpansive 半群であるといわれる. さらに (3) の条件を

$$(3)'' \quad \limsup_t \left\{ \sup_{y \in C} [\|T_t x - T_t y\| - \|x - y\|] \right\} \leq 0$$

という条件でおきかえたとき, asymptotically nonexpansive 半群であるといわれる [6].

ここでは, まず asymptotically nonexpansive 半群に対する非線形エルゴード定理を invariant mean を用いて Hilbert 空間の場合で証明する. つぎに submean の概念を用いて, 同じ半群に対する共通不動点定理を証明する. invariant mean の有効性をみていただければ幸いである.

## §2. 非線形エルゴード定理

Hausdorff 位相をもった半群  $S$  がつぎの条件を満たすなら, semitopological 半群であるといわれる.

任意の  $a \in S$  に対して,  $S$  から  $S$  への写像

$$s \mapsto s \cdot a, \quad s \mapsto a \cdot s$$

が連続である.

$C$  を Hilbert 空間  $H$  の空でない集合とし,  $S = \{T_t : t \in S\}$  を  $C$  上で定義され, つぎの条件を満たす写像の族とする:

- (1)  $T_{st}x = T_s T_t x$ ,  $\forall s, t \in S, \forall x \in C$ ;
- (2) 任意の  $x \in C$  に対して,  $s \mapsto T_s x$  は連続である;
- (3) 任意の  $x \in C$  に対して

$$\inf_s \sup_t \sup_{y \in C} [\|T_{ts}x - T_{ts}y\| - \|x - y\|] \leq 0.$$

このとき,  $S = \{T_s : s \in S\}$  は  $C$  上の asymptotically non-expansive 半群であるといわれる.  $S$  に対して,  $F(S)$  を  $T_s$  ( $s \in S$ ) の共通不動点集合を表す.

補助定理 1.  $S$  を semitopological 半群 とし,  $C$  を Hilbert 空間  $H$  の 閉凸 集合 とする.  $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  を  $C$  上の asymptotically nonexpansive 半群 とし, 任意の  $s \in S$  に対し,  $T_s$  は 連続 である とする. このとき,  $F(\mathcal{S})$  は 閉凸 集合 である.

証明  $F(\mathcal{S})$  が 閉 集合 であることは,  $T_s$  ( $s \in S$ ) の 連続性 より 明らか である.  $F(\mathcal{S})$  が 凸 集合 であることを 証明 する. その ためには, 任意の  $x, y \in F(\mathcal{S})$  に対し,  $\frac{x+y}{2} \in F(\mathcal{S})$  であることを 示せば 十分 である. いま 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し

$$\sup_t \sup_{f \in C} [\|T_{ts_0} z - T_{ts_0} f\| - \|z - f\|] < \varepsilon_0.$$

と かつ  $\|x - y\| \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 < \varepsilon^2$  となる ような  $s_0 \in S$  と  $\varepsilon_0 > 0$  が 存在 する. よって, 任意の  $t \in S$  に対し

$$\begin{aligned} \|T_{ts_0} z - z\|^2 &= \frac{1}{2} \|T_{ts_0} z - x\|^2 + \frac{1}{2} \|T_{ts_0} z - y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} (\|z - x\| + \varepsilon_0)^2 + \frac{1}{2} (\|z - y\| + \varepsilon_0)^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 \\ &\leq \left( \frac{1}{2} \|x - y\| + \varepsilon_0 \right)^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 \\ &= \|x - y\| \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

となる. いま  $s \in S$  であり,  $\varepsilon > 0$  とする.  $T_s$  が  $z$  で 連続 である ことより

$$\|z - f\| < \delta \Rightarrow \|T_s z - T_s f\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるような  $\delta > 0$  が存在する.  $s_0 \in S$  とし

$$\|T_{ts_0} z - z\| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\right), \quad \forall t \in S$$

となるようなものを選び、任意の  $t \in S$  に対して

$$\begin{aligned} \|T_s z - z\| &\leq \|T_s z - T_s T_{ts_0} z\| + \|T_{ts_0} z - z\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となる. よって, 任意の  $s \in S$  に対して,  $T_s z = z$  となる. これは証明を完了する.

$C(S)$  を  $S$  上の有界連続関数全体からなる Banach 空間とする. そして,  $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$  を  $C(S)$  上の means のネットとする. このとき, 任意の  $f \in C(S)$  と  $s \in S$  に対して

$$\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(l_s f) \rightarrow 0, \quad \mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(r_s f) \rightarrow 0$$

をみたすなら,  $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$  は漸近的に不変であるといわれる. 例えば

$S = \{0, 1, 2, \dots\}$  とする. いま  $f = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in m(S)$  に対して,  $m(S) = C(S)$  上の means のネットもつぎのように定義する.

$$\mu_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

実際,  $\mu_n$  は線形である. また,  $f \in m(S)$  に対して

$$|\mu_n(f)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |x_k| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|f\| = \|f\|$$

であり, かつ  $\mu_n(1) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1$  であるから,

$$\|\mu_n\| = \mu_n(1) = 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

つぎに,  $f = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in m(S)$  と  $m \in S$  に対して

$$\begin{aligned} |\mu_n(f) - \mu_n(r_m f)| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+m} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot 2m \|f\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

であるから,  $\{\mu_n\}$  は漸近的に不変な means の列である.

もう 1 つ例を挙げよう.

$S = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  とする.  $f \in C(\mathbb{R}_+)$  と  $\lambda > 0$  に対して,

$$\mu_\lambda(f) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t) dt$$

とする. すると  $\{\mu_\lambda : 0 < \lambda < \infty\}$  は  $C(\mathbb{R}_+)$  上の漸近的に不変な means のネットになる. まず  $\mu_\lambda$  が mean であることを示す.  $\mu_\lambda(1) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda 1 dt = 1$  であり, かつ任意の  $f \in C(\mathbb{R}_+)$  に対して,

$$|\mu_\lambda(f)| = \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \|f\| dt = \|f\|$$

であるから,  $\|\mu_\lambda\| = \mu_\lambda(1) = 1$  である.  $f \mapsto \mu_\lambda$  は mean である. つぎに  $h \in \mathbb{R}_+$  に対して

$$\begin{aligned} |\mu_\lambda(f) - \mu_\lambda(r_h f)| &= \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t) dt - \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t+h) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t) dt - \frac{1}{\lambda} \int_h^{\lambda+h} f(t) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^h f(t) dt - \frac{1}{\lambda} \int_\lambda^{\lambda+h} f(t) dt \right| \\ &\leq \frac{2\|f\| \cdot h}{\lambda} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

より,  $\{\mu_\lambda : 0 < \lambda < \infty\}$  は漸近的に不変な means のネットである.

いまや非線形エルゴード定理を証明しよう.

定理1.  $C$  を Hilbert 空間の空でない集合とし,  $S$  を  $C(S)$  が invariant mean をもつような semitopological 半群とする.  $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  を  $C$  上の asymptotically nonexpansive 半群とし, 任意の  $s \in S$  に対して,  $T_s$  は連続であるとする. このとき, もし  $\{T_t x : t \in S\}$  が有界であり,

$$\bigcap_s \overline{\text{co}} \{T_{st} x : t \in S\} \subset C$$

となるような  $x \in C$  が存在するならば,  $F(S) \neq \emptyset$  である. さらに  $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$  が  $C(S)$  上の漸近的に不変な means のネットとするならば,  $x_{\mu_\alpha}$  は  $F(S)$  の元  $x_0$  に弱収束する.

ただし,  $x_{\mu_\alpha}$  は

$$(\mu_\alpha)_t(T_t x, y) = (x_{\mu_\alpha}, y), \quad \forall y \in H$$

を満たすような唯一の元である.

証明  $\mu$  を  $C(S)$  上の invariant mean とする. このとき, リースの表現定理によって

$$\mu_t(T_t x, y) = (x_\mu, y), \quad \forall y \in H$$

となる  $x_\mu \in H$  が存在する.  $\mu$  が invariant なので, 分離定理によって

$$x_\mu \in \bigcap_S \overline{\text{co}}\{T_{st}x : t \in S\} \subset C$$

となる. 一方, 任意の  $y \in H$  に対して, 実数値関数

$$t \mapsto \|T_t x - y\|^2$$

は  $C(S)$  の元となるので, この関数に対する  $\mu$  の値  $\mu_t \|T_t x - y\|^2$  を定義できる.

$$r = \inf_{y \in H} \mu_t \|T_t x - y\|^2$$

とし,

$$M = \{z \in H : \mu_t \|T_t x - z\|^2 = r\}$$

とする. このとき, 任意の  $y \in H$  と  $s \in S$  に対して

$$\|x_\mu - y\|^2 = \|T_t x - y\|^2 - \|T_t x - x_\mu\|^2 - 2(T_t x - x_\mu, x_\mu - y)$$

なので,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_\mu - y\|^2 &= \mu_t (\|T_t x - y\|^2 - \|T_t x - x_\mu\|^2 - 2(T_t x - x_\mu, x_\mu - y)) \\ &= \mu_t \|T_t x - y\|^2 - \mu_t \|T_t x - x_\mu\|^2 - 2(x_\mu - x_\mu, x_\mu - y) \\ &= \mu_t \|T_t x - y\|^2 - \mu_t \|T_t x - x_\mu\|^2 \end{aligned}$$

を得る. これは  $M$  が一点  $x_\mu$  からなることを示している.

いま  $x_\mu \in F(S)$  であることを示そう. 実際,  $\varepsilon > 0$  とすると,  $\{T_t x : t \in S\}$  の有界性より,

$$\|T_{su} x_\mu - T_{su} T_t x\|^2 \leq \|x_\mu - T_t x\|^2 + \varepsilon, \quad \forall t, s \in S$$

となるような  $u \in S$  が存在する. よって

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq \|x_\mu - T_t x\|^2 - \|T_{su} x_\mu - T_{su} T_t x\|^2 \\ &= \|x_\mu - T_{su} x_\mu\|^2 + \|T_{su} x_\mu - T_t x\|^2 \\ &\quad + 2(x_\mu - T_{su} x_\mu, T_{su} x_\mu - T_t x) - \|T_{su} x_\mu - T_{su} T_t x\|^2 \end{aligned}$$

である。そこで

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq \|x_\mu - T_{su}x_\mu\|^2 + \mu_t \|T_{su}x_\mu - T_tx\|^2 \\ &\quad + 2(x_\mu - T_{su}x_\mu, T_{su}x_\mu - T_tx) - \mu_t \|T_{su}x_\mu - T_tx\|^2 \\ &= -\|x_\mu - T_{su}x_\mu\|^2 \end{aligned}$$

となり，すべての  $s \in S$  に対して  $\|x_\mu - T_{su}x_\mu\|^2 < \varepsilon$  を得る。  $T_t$  の連続性と補助定理1の方法によって，

$$x_\mu = T_s x_\mu, \quad \forall s \in S$$

を得る。つぎに，この  $x_\mu$  が invariant mean  $\mu$  によらないことを証明する。  $\mu$  を  $C(S)$  上の invariant mean とする。このとき，すべての  $z \in H$  に対して

$$\mu_t \|T_tx - z\|^2 \leq \inf_s \sup_t \|T_{ts}x - z\|^2$$

を得る。一方，  $z \in F(\mathcal{S})$  と  $s \in S$  に対して

$$\inf_u \sup_t (\|z - T_{tu}T_sx\|^2 - \|z - T_sx\|^2) \leq 0$$

である。よって

$$\inf_u \sup_t \|T_{tu}x - z\|^2 \leq \inf_u \sup_t \|T_{tus}x - z\|^2$$

$$= \inf_u \sup_t \|T_{tu} T_s x - z\|^2 \leq \|T_s x - z\|^2$$

である。そこで、 $z \in F(S)$  に対して

$$\mu_t \|T_t x - z\|^2 = \inf_S \sup_t \|T_{ts} x - z\|^2$$

を得る。これは  $x_\mu$  が  $\mu$  によらないことを意味している。いま  $x_0 = x_\mu$  とおくと、 $x_{\mu_\alpha}$  が  $x_0$  に弱収束することを示そう。 $\mu$  をネット  $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$  の cluster point (弱\*位相の意味での) とする。このとき、[15] によつて、 $\mu$  は invariant mean である。 $\{x_{\mu_\alpha}\}$  を  $x_{\mu_\alpha}$  が  $H$  の元  $z$  に弱収束するような  $\{x_{\mu_\alpha}\}$  の部分ネットとすると、ネット  $\{\mu_\alpha\}$  の cluster point  $\lambda$  はネット  $\{\mu_\alpha\}$  の cluster point でもあるので、 $\lambda$  は invariant mean である。そこで、 $z = x_\lambda = x_0$  を得る。これは、 $x_{\mu_\alpha}$  が  $F(S)$  の元  $x_0$  に弱収束すること意味する。

### §3. 不動点定理

$X$  を constant 1 を含む  $m(S)$  の線形部分空間とする。このとき、 $X$  上の実数値関数  $\mu$  はつぎの条件を満たすなら、 $X$  上の submean であるといわれる [9]。

- (1)  $\mu(f+g) \leq \mu(f) + \mu(g)$ ,  $\forall f, g \in X$ ;
- (2)  $\mu(\alpha f) = \alpha \mu(f)$ ,  $\forall f \in X, \alpha \geq 0$ ;
- (3)  $f \leq g \Rightarrow \mu(f) \leq \mu(g)$ ;

(4) constant  $c$  に対して,  $\mu(c) = c$ .

つぎの補助定理は溝口-高橋[9]によって得られた.

補助定理2.  $S$  を semitopological 半群とし,  $X$  を constant 1 を含む  $m(S)$  の線形部分空間とする.  $\mu$  を  $X$  上の submean とする.  $\{x_t : t \in S\}$  を Hilbert 空間  $H$  の有界部分集合とし,  $D$  を  $H$  の閉凸集合とする. 任意の  $x \in D$  に対して,

$$f(t) = \|x_t - x\|^2, \quad \forall t \in S$$

で定義される  $S$  上の実数値関数  $f$  は  $X$  に属するとする. このとき,

$$g(x) = \mu_t \|x_t - x\|^2, \quad \forall x \in D,$$

$$r = \inf_{x \in D} g(x)$$

とおくならば,

$$g(z) = r, \quad r + \|z - x\|^2 \leq g(x), \quad \forall x \in D$$

となるような  $z \in D$  が一意に存在する.

$X$  を constant 1 を含む,  $l_s, s \in S$  のもとで不変となるような  $m(S)$  の線形部分空間とする. このとき,  $X$  上の submean  $\mu$  は

$$\mu(f) = \mu(l_s f), \quad \forall s \in S, \forall f \in X$$

を満たすなら left invariant であるといわれる。

定理2.  $C$  は Hilbert 空間  $H$  の空でない集合とし,  $S$  を semitopological 半群とする.  $X$  は constant 1 を含む  $m(S)$  の線形部分空間とし,  $l_s, s \in S$  のもとで不変のものとする.  $\mu$  は  $X$  上の left invariant な submean とし,  $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  をすべての  $T_t$  が連続となるような  $C$  上の asymptotically nonexpansive 半群とする. もし,  $\{T_t x : t \in S\}$  が有界となり, かつ

$$\bigcap_s \overline{\text{co}} \{T_{st} x : t \in S\} \subset C$$

となるような  $x \in C$  が存在し, 任意の  $v \in H$  に対し

$$f(t) = \|T_t x - v\|^2, \quad \forall t \in S$$

で定義される実数値関数  $f$  が  $X$  に属するならば,  $T_s z = z$  となるような  $T_s$  の共通な不動点  $z$  が存在する.

証明 まず,  $H$  上の実数値関数  $g$  を

$$g(y) = \mu_t \|T_t x - y\|^2, \quad \forall y \in H$$

で定義しよう.  $r = \inf_{y \in H} g(y)$  とおくと, 補助定理2によつて,

$$g(z) = r, \quad r + \|z - y\|^2 \leq g(y), \quad \forall y \in H$$

となるような  $z \in H$  が一意に存在する. 任意の  $s \in S$  に対して,  $Q_s$  を  $H$  から  $\overline{\{T_{st}x : t \in S\}}$  の上への metric projection としよう. このとき, [10] に よって,  $Q_s$  は nonexpansive であり, 任意の  $t \in S$  に対して

$$\|T_{st}x - Q_s z\|^2 = \|Q_s T_{st}x - Q_s z\|^2 \leq \|T_{st}x - z\|^2$$

となる. そこで,

$$\begin{aligned} \mu_t \|T_t x - Q_s z\|^2 &= \mu_t \|T_{st} x - Q_s z\|^2 \\ &\leq \mu_t \|T_{st} x - z\|^2 = \mu_t \|T_t x - z\|^2 \end{aligned}$$

となり,  $Q_s z = z$  を得る. これは  $z \in \overline{\{T_{st}x : t \in S\}}$  であることを意味する. これはすべての  $s \in S$  についていえるので

$$z \in \bigcap_s \overline{\{T_{st}x : t \in S\}} \subset C$$

となる. この  $z$  について,  $T_s z = z, \forall s \in S$  となることを示そう. 実際,  $\{T_t x : t \in S\}$  は有界なので, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\|T_{ss_0} z - T_{ss_0} T_t x\|^2 < \|z - T_t x\|^2 + \varepsilon, \forall s, t \in S$$

となるような  $s_0 \in S$  を選ぶことができる. このとき,

$$\begin{aligned}
\mu_t \|T_{ss_0} z - T_t x\|^2 &= \mu_t \|T_{ss_0} z - T_{ss_0 t} x\|^2 \\
&= \mu_t \|T_{ss_0} z - T_{ss_0} T_t x\|^2 \\
&\leq \mu_t \|z - T_t x\|^2 + \varepsilon
\end{aligned}$$

となる。一方,

$$\|z - y\|^2 \leq \mu_t \|T_t x - y\|^2 - \mu_t \|T_t x - z\|^2, \quad \forall y \in H$$

なので, すべての  $s \in S$  に対して,

$$\begin{aligned}
\|z - T_{ss_0} z\|^2 &\leq \mu_t \|T_t x - T_{ss_0} z\|^2 - \mu_t \|T_t x - z\|^2 \\
&\leq \mu_t \|z - T_t x\|^2 + \varepsilon - \mu_t \|T_t x - z\|^2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

を得る。このあとは, 補助定理1と同様な手法によって,  $z$  が  $T_s, s \in S$  の共通の不動点であることが証明できる。

定理2の直接的な結果として, 定理1の中の  $F(s)$  が空でないことが証明できる。さらにつぎの不動点定理を証明するのに直接使用できる。semitopological 半群  $S$  が left reversible であるとは,  $S$  の任意の2つの閉右イデアルが空でない共通部分をもつときをいう。このケースでは,  $(S, \leq)$

が

$$a \leq b \iff \{a\} \cup \overline{aS} \supset \{b\} \cup \overline{bS}$$

により directed system になる。

系.  $C$  を Hilbert 空間  $H$  の空でない部分集合とし,  $S$  を left reversible な半群とする.  $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  をすべての  $T_t$  が連続であるような  $C$  上の asymptotically nonexpansive 半群とし, ある  $x \in C$  が存在して,  $\{T_t x : t \in S\}$  が有界であり,

$$\bigcap_s \overline{\{T_{st} x : t \in S\}} \subset C$$

となるものとする. このとき, すべての  $T_s$  に対して,  $T_s z = z$  となるような  $z \in C$  が存在する.

証明  $m(S)$  上の実数値関数  $\mu$  を

$$\mu(f) = \limsup_s f(s), \quad \forall f \in m(S)$$

で定義する. すると,  $\mu$  は  $m(S)$  上の left invariant な submean である. そこで, 定理 2 を使えばその証明は完了する.

以上, 抽象的な非線形エルゴード定理と不動点定理を証明したが, これらはすべて,  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  の場合や,

$$S = [0, \infty), \quad S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \dots$$

の場合に利用できる.

## References

- [1] Baillon, J. B., Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroups de contractions impaires, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 283 (1976), 75-78.
- [2] Brézis, H. and F. E. Browder, Remarks on nonlinear ergodic theory, Adv. in Math., 25 (1977), 165-177.
- [3] Hirano, N. and W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert space, Kodai Math. J., 2 (1979), 11-25.
- [4] Ishihara, H., Fixed point theorems for lipschitzian semigroups, Canad. Math. Bull., 32 (1989), 90-97.
- [5] Ishihara, H. and W. Takahashi, Fixed point theorems for uniformly lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl., 127 (1987), 206-210.
- [6] Kirk, W. A. and R. Torrejón, Asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces, Nonlinear Analysis 3 (1979), 111-121.
- [7] Kiuchi, H. and W. Takahashi, Asymptotic behavior of almost-orbits of non-Lipschitzian semigroups in Hilbert space, to appear.
- [8] Lau, A. T., Semigroup of nonexpansive mappings on a

- Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.*, 105 (1985), 514-522.
- [9] Mizoguchi, N. and W. Takahashi, On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, *Nonlinear Analysis*, 14 (1990), 69-80.
- [10] Phelps, R.P., Convex sets and nearest points, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 790-797.
- [11] Rodé, G., An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.*, 85 (1982), 172-178.
- [12] Takahashi, W., A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81 (1981), 253-256.
- [13] ———, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, *J. Math. Soc. Japan*, 36 (1984), 543-553.
- [14] ———, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 96 (1986), 55-58.
- [15] ———, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, *Canad. J. Math.*, 35 (1992), 1-8.