

ひずみ空間多重せん断モデルによる粘性土の力学挙動の表現

Modeling of Clay through Strain Space Multiple Mechanism Model

井合 進・上田恭平

Susumu IAI and Kyohei UEDA

Synopsis

The strain space multiple mechanism model, originally developed for cyclic behavior of granular materials such as sand, is adapted for idealizing stress strain behavior of clay under monotonic and cyclic loads. The proposed model has advantages over the conventional elasto-plastic models of Cam-clay type in the facts that (1) arbitrary initial K_0 state can be analyzed by static gravity analysis, (2) stress induced anisotropy (i.e. effect of initial shear) in the steady (critical) state can be analyzed based on Shibata's dilatancy model (1963), (3) over-consolidated clay can be analyzed by defining the dilatancy at the steady state based on over-consolidation ratio, (4) strain rate effects for monotonic and cyclic shear can be analyzed based on Isotach model proposed by Tatsuoka et al (2002) in the strain rate ranging from zero to infinity in addition to the conventional strain rate effects of secondary consolidation (creep) type. Performance of the proposed model is demonstrated through simulation of drained/undrained behavior of clay under monotonic and cyclic loading.

キーワード: 粘性土, 異方性, ひずみ速度効果, 圧密沈下, 地震応答

Keywords: clay, anisotropy, strain rate effect, consolidation, earthquake response

1. はじめに

ひずみ空間多重せん断モデル(Iai et al., 2011)は, 地震時の液状化を含む地盤・構造物系の動的解析に広く利用されている. 本研究では, このモデルの粘土地盤の圧密解析とこれに引き続く地震応答解析への適用性について, 検討することとした.

ひずみ空間多重せん断モデルの構成式の観点から砂と粘土との相違点を眺めると, 両者間で本質的な相違はなく, モデルパラメータ (もしくは, モデルパラメータを状態変数とする一般化の方法) の相違に帰着する. 具体的には, 砂と異なり, 粘性土では, 以下のとおりとなる.

- (1) 接線体積剛性の拘束圧依存性を規定する指数が 1.0 となる.
- (2) 限界状態 (砂の場合の Steady state) が初期応力誘導異方性を持つ.

(3) 過圧密からのせん断において, 粘着力がゼロの場合の Mohr-Coulomb の破壊基準に対応するせん断破壊線を越える (上回る) 応力経路を辿り, 限界状態に至る.

- (4) ひずみ速度依存性 (二次圧密および地震時の粘性減衰) の影響が著しい.

また, 既往の弾塑性モデルを組み込んだ数値解析法では, 初期応力を入力パラメータとして (静止土圧係数 K_0 により) 指定するものが多い. このような数値解析法は, 水平成層地盤上に建設される盛土による圧密沈下解析のように, 初期応力が静止土圧係数と鉛直有効応力分布で規定される場合には適用性があると考えられる. しかし, 一般的な地盤・構造物系を対象とする解析では, 初期応力分布が静止土圧係数と鉛直有効応力分布のみでは規定できない. 一般には, 地盤・構造物系を対象とした静的自重解析 (重力に伴って発生する地盤・構造物内の応力分布

の解析)を行って初期応力分布を決定する必要がある。その際に、パラメタを任意に与えるのではなく、水平成層地盤で想定される静止土圧係数が同じ静的自重解析で実現できるという制約条件を満たす地盤パラメタの組合せを与えることが必要となる。

なお、本報告は、前報(Iai, 2012)における検討結果を吟味し、モデルの汎用性、安定性を拡張したものである。

2. 粘性土の圧密沈下・地震応答解析におけるモデル化での基礎的事項

粘性土の力学挙動は、正規圧密からの挙動と過圧密からの挙動とが著しく異なることが知られている。これを、弾塑性モデルでは、降伏曲面や塑性ポテンシャルを導入することにより、表現する。しかし、ひずみ空間多重せん断モデルでは、降伏曲面や塑性ポテンシャルを導入せずに、ひずみ空間における現在のひずみおよびその履歴に応じて粘性土の状態を規定していくこととなる。この点が、ひずみ空間多重せん断モデルによるモデル化の特徴であり、弾塑性モデルと共通する事項とともに、弾塑性モデルとは異なる事項も多い。

そこで、ひずみ空間多重せん断モデルによる粘性土の力学挙動のモデルの具体的な定式化に先立って、本章では、モデル化における基礎的事項を示す。

2.1 間隙比、体積ひずみ、平均有効応力の基礎的關係

粘性土の圧縮伸張成分の定式化で基本となる体積ひずみ ε は、間隙比 e と以下の関係がある。

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{e}}{1+e} \quad (1)$$

これを、体積ひずみ $\varepsilon = \varepsilon_a$, 間隙比 $e = e_a$ の点を参照点として積分して、

$$\varepsilon - \varepsilon_a = \ln \left(\frac{1+e}{1+e_a} \right) \quad (2)$$

他方、粘性土においては、間隙比と平均有効応力の関係として与えられる圧密曲線の接線勾配を以下で与える。

正規圧密：

$$\dot{e} = -\frac{\lambda}{p} \dot{p} \quad (3)$$

過圧密：

$$\dot{e} = -\frac{\kappa}{p} \dot{p} \quad (4)$$

これらを、体積ひずみに関する圧密曲線の接線勾配に書き換えると、以下となる。

正規圧密：

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = -\frac{1+e}{\lambda} p \quad (5)$$

過圧密：

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = -\frac{1+e}{\kappa} p \quad (6)$$

ここで、圧密曲線の接線勾配は圧力 p に比例すると仮定（近似）し、参照する拘束圧力 p_a における間隙比を e_a を接線勾配を規定する際の参照間隙比とすると、

正規圧密：

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = -\frac{1+e_a}{\lambda} p \quad (7)$$

過圧密：

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = -\frac{1+e_a}{\kappa} p \quad (8)$$

通常、式(5), (6)は、ダイレイタンシーが発生しない場合に適用されるので、これらの式において、体積ひずみ ε を有効体積ひずみ

$$\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_d \quad (9)$$

(ここに、 ε_d はダイレイタンシーによる体積ひずみ)に置き換え、以下を得る。

正規圧密：

$$\frac{dp}{d\varepsilon'} = -\frac{1+e_a}{\lambda} p \quad (10)$$

過圧密：

$$\frac{dp}{d\varepsilon'} = -\frac{1+e_a}{\kappa} p \quad (11)$$

よって、粘性土の接線体積剛性（以下、体積弾性係数とよぶ）は、以下のとおり与えられる。

正規圧密：

$$K_{LU} = \frac{1+e_a}{\lambda} p \quad (12)$$

過圧密：

$$K_{LU} = \frac{1+e_a}{\kappa} p \quad (13)$$

ここに,

$$K_{LU} = -\frac{dp}{d\varepsilon'} \quad (14)$$

式(10)(11)を初期条件 $\varepsilon' = \varepsilon'_0$ の時, $p = p_0$ で積分すると,
正規圧密:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\varepsilon' - \varepsilon'_0}{\varepsilon_{m0}} \quad (15)$$

過圧密:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\varepsilon' - \varepsilon'_0}{\varepsilon_{me}} \quad (16)$$

ここに,

$$\varepsilon_{m0} = \frac{\lambda}{1+e_a} \quad (17)$$

$$\varepsilon_{me} = \frac{\kappa}{1+e_a} \quad (18)$$

2.2 過圧密域

圧密沈下解析における正規圧密および過圧密での接線体積剛性（以下においては、正規圧密、過圧密によらず、体積弾性係数とよぶ）の相違を考慮するため、過圧密域（過圧密での体積弾性係数を与える領域）を、ひずみ空間内に設定する。過圧密域外の領域（正規圧密での体積弾性係数を与える領域）は、以下において、塑性域とよぶ。

この設定にあたり、過圧密状態からの解析における初期の有効体積ひずみが ε'_0 、また、これに対応する正規圧密曲線上の降伏圧密応力での有効体積ひずみが ε'_{r0} (Fig.1), で与えられるものとする。また、初期の有効体積ひずみ ε'_0 における正規圧密曲線上の圧力 p_{n0} は、初期の圧力 p_0 から、以下により与えられるものとする。

$$p_{n0} = r_{p_{n0}} p_0 \quad (19)$$

これらの条件において、過圧密域を、ひずみ空間において、 $\varepsilon'_0 \geq \varepsilon' \geq \varepsilon'_{r0}$ の範囲、すなわち、初期有効体積ひずみ ε'_0 の圧縮側に相当する $0 \leq -(\varepsilon' - \varepsilon'_0) \leq -(\varepsilon'_{r0} - \varepsilon'_0)$ の範囲、で与える。

他方、過圧密状態から、有効体積ひずみが一定の条件でせん断する場合には、土は塑性的な挙動を示

し、その際の体積弾性係数は、正規圧密での体積弾性係数に準じたものとなるとすると、既往の室内試験における過圧密粘土の非排水せん断挙動と整合するものと考えられる。

これらの体積圧縮およびせん断挙動を表現するため、初期有効体積ひずみ ε'_0 および初期偏差ひずみ $\bar{\varepsilon}_0$ を原点とし、その体積圧縮側を中心とする方向に広がる過圧密域を、過圧密域の圧縮側の限界に相当する ε'_{r*} を用いて、以下のとおり設定する (Fig.2)。

$$0 \leq \theta \leq \theta_e \text{ かつ} \\ 0 \leq -(\varepsilon' - \varepsilon'_0) \leq -(\varepsilon'_{r*} - \varepsilon'_0) : \text{elastic} \quad (20)$$

ここに,

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\gamma^*}{-(\varepsilon' - \varepsilon'_0)} \right) \quad (21)$$

$$\gamma^* = \sqrt{\left((\varepsilon_x - \varepsilon_y) - (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \right)^2 + (\gamma_{xy} - \gamma_{xy0})^2} \quad (22)$$

過圧密域内外では、体積弾性係数およびダイレイタンシー挙動は異なる（体積弾性係数は、過圧密域では式(11)、また、塑性域では式(10)で与えられる）ものとし、ダイレイタンシーを除くせん断挙動は、過圧密域内外で同じとする。

2.3 限界状態におけるダイレイタンシー

粘性土における限界状態（砂の Steady state）を表現するため、まず、初期自重解析後の初期有効体積ひずみ $\varepsilon'_0 = \varepsilon_0$ （初期自重解析では、後述のとおり、ダイレイタンシーを考慮しないため）に対応する正規圧密曲線上の初期有効拘束圧力 p_{n0} (Fig.1) を、入力パラメタを用いて、式(19)で与える。このパラメタは粘性土の室内試験結果から直接求めるか、または、粘性土の過圧密比 OCR と λ, κ から以下で求める。

$$r_{p_{n0}} = \text{OCR}^{(1-\kappa/\lambda)} \quad (23)$$

上の式より、自重解析における応力経路とは独立して、自重解析後の過圧密の状態を、以下のように与えることができる。

$r_{p_{n0}} = 1$: 正規圧密状態からの圧密沈下・地震応答解析

$r_{p_{n0}} > 1$: 過圧密状態からの圧密沈下・地震応答解析

Fig.3 のように、粘性土の挙動を、体積ひずみ－有効拘束圧力の関係で表示すると、正規圧密状態からの解析では、同図において、正規圧密曲線が収縮的ダイレイタンス ε_d^c に応じて、次第に限界状態線に近づいていき、最終的に収縮的ダイレイタンスが限界状態の値 $\varepsilon_d^c = \varepsilon_{dus}^c$ に達した時に、限界状態線に到達すると考える。

他方、過圧密状態からの解析で、非排水せん断の挙動が支配的な場合には、Fig.2 を参照すると、ひずみ空間に与えた過圧密域の外側の領域の挙動となる。この場合には、体積弾性係数は、過圧密での式(13)ではなく、正規圧密でのものと同様に、式(12)で与える。よって、過圧密域からの非排水せん断により限界状態に到達する過程では、Fig.3 に示すように、正規圧密曲線に準じた接線剛性を持つ圧密曲線が、収縮的ダイレイタンス ε_d^c と膨張的ダイレイタンス ε_d^d との和で与えられるダイレイタンスに応じて、限界状態線に近づいていき、最終的にこれらのダイレイタンスが限界状態の値 $\varepsilon_d^c = \varepsilon_{dus}^c$, $\varepsilon_d^d = \varepsilon_{dus}^d$ となったときに、限界状態線に到達すると考える。

なお、過圧密状態からの解析で、体積圧縮が支配的な場合など過圧密域を通過するひずみ経路での解析では、体積弾性係数は、過圧密でのものとなり、式(13)で与える。

限界状態でのダイレイタンスは、収縮的成分および膨張的成分の和として、以下で与えられるとする (Fig.3)。

$$\varepsilon_{dus} = \varepsilon_{dus}^c + \varepsilon_{dus}^d \quad (24)$$

これらの成分は、それぞれ以下により与える。

(1) 限界状態での膨張的ダイレイタンス

体積ひずみ－平均圧力の関係で与えられる Fig.3 を参照し、有効体積ひずみ－平均圧力の関係として式(15)で与えられる圧密曲線において、初期状態では $\varepsilon_d = 0$, 正規圧密曲線上では $\varepsilon_d = \varepsilon_{dus}^d$ となることから、正規圧密曲線は、以下で与えられる。

$$\ln \frac{p}{p_0} = - \frac{\varepsilon - \varepsilon_{dus}^d - \varepsilon_0}{\varepsilon_{m0}} \quad (25)$$

この曲線が、点 $p = p_{n0}$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ を通ることから、

$$\varepsilon_{dus}^d = \varepsilon_{m0} \ln \frac{p_{n0}}{p_0} \quad (26)$$

式(19)より、

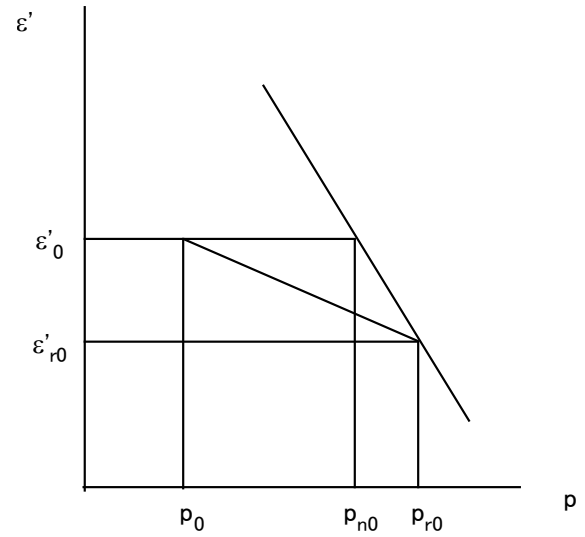


Fig.1 Effective volumetric strain at yield confining pressure ε'_{r0}

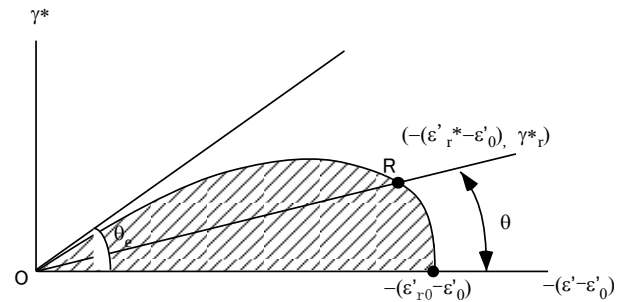


Fig.2 Over-consolidation region in strain space

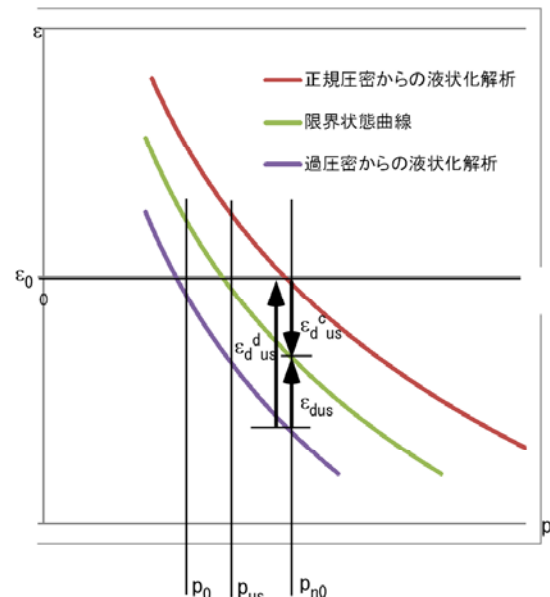


Fig.3 Normal and over consolidation curves and steady state line in volumetric strain – effective confining pressure diagram

$$\varepsilon_{\text{dus}}^{\text{d}} = (\ln r_{p_{n0}}) \varepsilon_{m0} \quad (27)$$

正規圧密からの解析は、過圧密からの解析において、 $r_{p_{n0}} = 1$ とおいた場合に相当し、上の式をそのまま適用すればよい。

(2) 限界状態での収縮的ダイレイタンシー

限界状態での収縮的ダイレイタンシーは、柴田のダイレイタンシー式(Shibata, 1963)に基づいて、以下で与える。

$$\varepsilon_{\text{dus}}^{\text{c}} = -D\eta_{\text{us}}^* \quad (28)$$

ここに、2次元解析では、Fig.4 において、初期応力点がAから半径Mの円周に向かうベクトルの長さに相当し、以下で与えられる (Sekiguchi and Ohta, 1977)

$$\eta_{\text{us}}^* = \sqrt{\left(\left(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right)_{\text{us}} - \left(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right)_0 \right)^2 + \left(\left(\frac{\tau_{xy}}{p} \right)_{\text{us}} - \left(\frac{\tau_{xy}}{p} \right)_0 \right)^2} \quad (29)$$

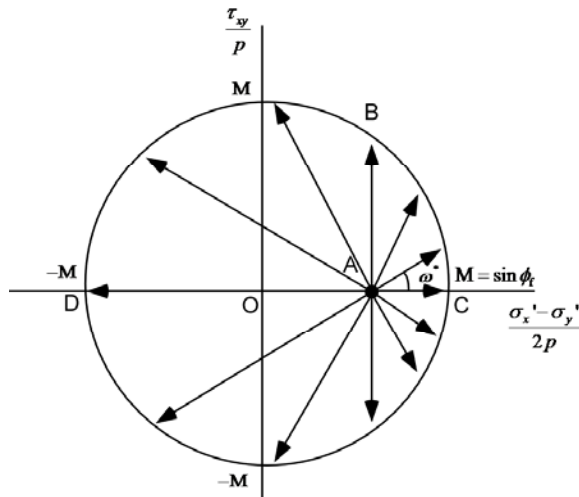


Fig.4 Shear stress ratio at steady state for a stress path from initial stress point A

柴田のダイレイタンシーパラメタ D は、ダイレイタンシーパラメタ Λ を用いて、以下のとおり書ける。

$$D = \frac{\Lambda}{M} \frac{\lambda}{1 + e_0} = \frac{\Lambda}{M} \varepsilon_{m0} \quad (30)$$

ここに、

$$M = \sqrt{\left(\left(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right)_{\text{us}} \right)^2 + \left(\left(\frac{\tau_{xy}}{p} \right)_{\text{us}} \right)^2} \quad (31)$$

これを式(28)に代入して、

$$\varepsilon_{\text{dus}}^{\text{c}} = -\frac{\eta_{\text{us}}^*}{M} \Lambda \varepsilon_{m0} \quad (32)$$

なお、弾塑性モデルでは、降伏曲面に一致する塑性ポテンシャル面の接線勾配が、限界状態においてゼロとなるという条件から、ダイレイタンシーパラメタ Λ と λ , κ の間に、以下の関係が成り立つ。

$$\Lambda = 1 - \frac{\kappa}{\lambda} \quad (33)$$

しかし、ひずみ空間多重せん断モデルでは、降伏曲面や塑性ポテンシャルを必要としないので、式(33)の関係は満たす必要がなく、ダイレイタンシーパラメタ Λ は、 λ , κ の値とは独立して、非排水せん断試験結果に基づいて得られる限界状態を適切に表現するように設定することができる。

また、上の定式化においては、限界状態に与える初期応力誘導異方性を式(29)により考慮しているが、Cam Clay 型モデルのように限界状態が等方性を持つと考える場合には、終局状態でのせん断応力比が式(31)で与えられることから、これを式(32)の分子に代入することにより、

$$\varepsilon_{\text{dus}}^{\text{c}} = -\Lambda \varepsilon_{m0} \quad (34)$$

また、Cam Clay 型モデルにおいて、初期有効体積ひずみ ε_0' での終局状態のせん断抵抗を、入力パラメタとして q_{usa} で与える場合には、この限界状態での有効拘束圧力は、以下で与えられる。

$$p_{\text{usa}} = q_{\text{usa}} / M \quad (35)$$

これより、限界状態におけるダイレイタンシーを、以下で与える。

$$\varepsilon_{\text{dus}}^{\text{c}} = \ln \left(\frac{p_{\text{usa}}}{p_{n0}} \right) \varepsilon_{m0} \quad (36)$$

2.4 限界状態におけるせん断応力比の予測値

限界状態における収縮的ダイレイタンシーを与える式(29)のせん断応力比を求めるためには、限界状態における応力が必要となる。しかし、この応力は予め与えられず、解析結果として与えられることとなる。よって、解析途中の現在の応力状態に基づいて、限界状態の応力を予測して、限界状態におけるせん断応力比を予測することとする。これを、以下のとおり与える。

まず、初期応力ベクトルの方向と横軸

$(\left(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p}\right) / 2p)$ 方向とのなす角度を, Fig.5 のとおり, 以下で定義する.

$$\cos \omega_0 = \left(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right)_0 / \eta_0 \quad (37)$$

$$\sin \omega_0 = \left(\frac{\tau_{xy}}{p} \right)_0 / \eta_0 \quad (38)$$

ここに,

$$\eta_0 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right)_0^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{p} \right)_0^2} \quad (39)$$

次に, 現在の応力ベクトルの方向 (初期応力点 A を起点とする相対的な応力ベクトルの方向) を以下で求める.

$$\cos \omega^* = \left[\left(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right) - \left(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right)_0 \right] / \eta^* \quad (40)$$

$$\cos \omega^* = \left[\left(\frac{\tau_{xy}}{p} \right) - \left(\frac{\tau_{xy}}{p} \right)_0 \right] / \eta^* \quad (41)$$

ここに,

$$\eta^* = \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right) - \left(\frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right)_0 \right]^2 + \left[\left(\frac{\tau_{xy}}{p} \right) - \left(\frac{\tau_{xy}}{p} \right)_0 \right]^2} \quad (42)$$

これを用いて, 初期応力ベクトルの方向との相対的な角度 (Fig.5) を以下で求める.

$$\omega^* = \omega^* - \omega_0 \quad (43)$$

これを, 限界状態における応力ベクトルの方向の当面の予測値とし, 以下により, 限界状態でのベクトルの方向 (原点を起点とする初期応力ベクトルの方向に対する相対的な方向) の予測値を求める.

$$M \cos \omega' = \eta_0 + \eta_{us}^* \cos \omega^* \quad (44)$$

$$M \sin \omega' = \eta_{us}^* \sin \omega^* \quad (45)$$

ここに, 2 次現解析においては,

$$M = \sin \phi_f \quad (46)$$

これを用いて, 限界状態 (B 点) での η_{us}^* の予測値を以下で与える.

$$M^2 = (\eta_0 + \eta_{us}^* \cos \omega^*)^2 + (\eta_{us}^* \sin \omega^*)^2 \quad (47)$$

これを η_{us}^* について解いて,

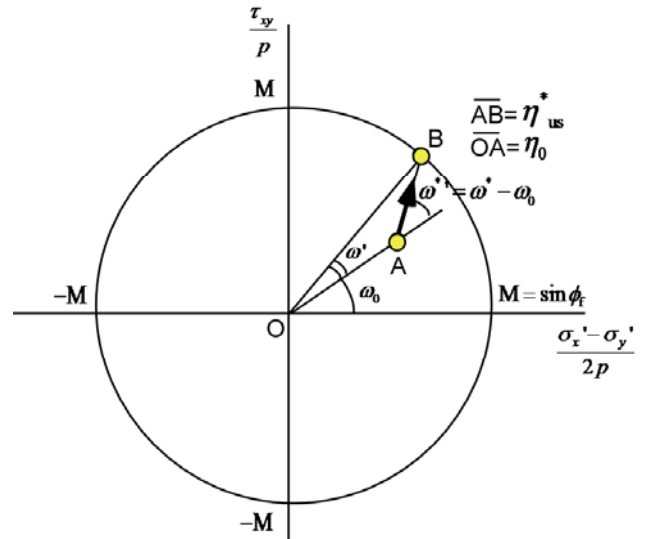


Fig.5 Prediction of shear stress ratio vector at steady state

$$\eta_{us}^* = -\eta_0 \cos \omega^* + \sqrt{(\eta_0 \cos \omega^*)^2 + M^2 - \eta_0^2} \quad (48)$$

2.5 間隙比と体積ひずみの関係

以上において, 間隙比との明示的な対応付けが必要な場合には, 以下の関係を準用する.

$$\varepsilon - \varepsilon_a = \ln \left(\frac{1+e}{1+e_a} \right) \quad (49)$$

この関係は, 初期自重解析で算定される体積ひずみが, 液状化解析で算定される体積ひずみに引き継がれることを前提とした関係であるが, 初期自重解析で算定される体積ひずみ (すなわち, 液状化解析での初期体積ひずみ ε_0) は, 明示的には使用せずに解析を行う点で, 修正が必要となる. この修正は, Fig.6 に示すとおり, 間隙比を算定する際に用いる液状化解析での初期体積ひずみを, 液状化解析での正規圧密曲線上の初期有効拘束圧力 p_{n0} に対応する体積ひずみ ε_{n0} に置換することにより行う. すなわち, 間隙比と体積ひずみの関係を以下で与える.

$$(\varepsilon - \varepsilon_0 + \varepsilon_{n0}) - \varepsilon_a = \ln \left(\frac{1+e}{1+e_a} \right) \quad (50)$$

液状化解析用の正規圧密曲線が p_a , ε_a を通るという条件から,

$$\varepsilon_{n0} - \varepsilon_a = - \left(\ln \left(\frac{p_{n0}}{p_a} \right) \right) \varepsilon_{ma} \quad (51)$$

$$\varepsilon_{ma} = p_a / (r_K K_{Ua}) = \lambda / (1+e_a) \quad (52)$$

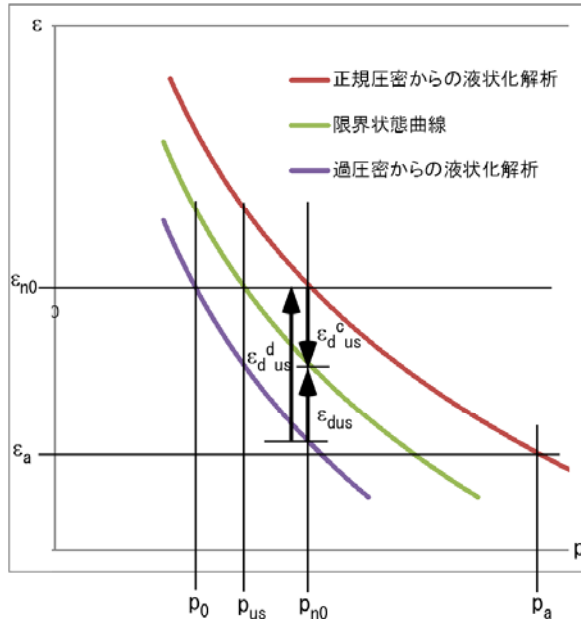


Fig.6 Volumetric strain – confining pressure dependency for computing void ratio (modifying initial volumetric strain)

よって、次式により、間隙比を算定すればよい。

$$\ln\left(\frac{1+e}{1+e_a}\right) = (\varepsilon - \varepsilon_0) - \left(\ln\left(\frac{p_{n0}}{p_a}\right)\right) \varepsilon_{ma} \quad (53)$$

2.6 クリープによる体積ひずみ

粘性土地盤の2次圧密挙動を表現するため、ひずみ空間多重せん断モデルにおいては、式(9)による有効体積ひずみの定義を一般化し、クリープによる体積ひずみ ε_c を用いて以下で与える。

$$\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_d - \varepsilon_c \quad (54)$$

ここに、クリープによる体積ひずみ ε_c は、二次圧密係数 α_c 、圧密解析開始時点 ($t=0$) からの経過時間 t を用いて、以下の漸化式 (時間積分において、 p ステップから、現 ($p+1$) ステップの値を求める式) により求める。(なお、現ステップは、上添字のステップ数を省略して表す)

$$\varepsilon_c = \varepsilon_c^p + \Delta\varepsilon_c \quad (55)$$

$$\Delta\varepsilon_c = -\alpha_c \left(\ln(t+t_c) - \ln(t^p+t_c) \right) \quad (56)$$

ここに、積分時間間隔を Δt とすると、

$$t = t^p + \Delta t \quad (57)$$

また、式(55)における時間パラメタ t_c は、クリープの初期体積 (圧縮) ひずみ速度 $\dot{v}_0 (= -\dot{\varepsilon}_{c0})$ から、

以下により与える。

$$t_c = \alpha_c / \dot{v}_0 \quad (58)$$

漸化式型のアルゴリズムの導入により、過圧密域での二次圧密係数の変化など、粘性土の状態に応じた二次圧密係数の変化への対応が可能となる。

他方、漸化式を用いない場合には、クリープによる体積ひずみ ε_c は、二次圧密係数 α_c 、初期体積ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{c0}$ より、

$$\varepsilon_c = -\alpha_c \left(\ln(t+t_c) - \ln t_c \right) = -\alpha_c \ln\left(\frac{t+t_c}{t_c}\right) \quad (59)$$

$$\dot{\varepsilon}_{c0} = -\frac{\alpha_c}{t_c} \quad (60)$$

$$\dot{\varepsilon}_c = -\frac{\alpha_c}{t+t_c} \quad (61)$$

これらを書き換えて、

$$\varepsilon_c = -\alpha_c \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{c0}}{\dot{\varepsilon}_c}\right) \quad (62)$$

これを書き換え、クリープに関する以下の微分方程式を得る。

$$\dot{\varepsilon}_c = \dot{\varepsilon}_{c0} \exp\left(\frac{\varepsilon_c}{\alpha_c}\right) \quad (63)$$

よって、二次圧密解析では、上を時間積分していけば、解析中に二次圧密係数が状態に応じて可変となっても対応できることとなり、式(55)による漸化式型のアルゴリズムと等価な解析が可能となる。

なお、クリープは、過圧密域においても発生可能とし、過圧密域に適用するパラメタは、塑性域のパラメタとは異なるパラメタ α_{ce} , $\dot{v}_{0e}$ を用いることができる。

3. 構成式の基本形

3.1 積分形の構成式

2次元解析の場合、応力、ひずみベクトルを以下で与える。

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \left\{ \sigma_x', \sigma_y', \tau_{xy} \right\} \quad (64)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left\{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \right\} \quad (65)$$

多重せん断モデルの積分形の基本形を、以下で与える。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{n}^{(0)} + \sum_{i=1}^I q^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \Delta\omega \quad (66)$$

ここに,

$$\mathbf{n}^{(0)T} = \{1 \quad 1 \quad 0\} \quad (67)$$

$$\mathbf{n}^{(i)T} = \{\cos \omega_i \quad -\cos \omega_i \quad \sin \omega_i\} \quad (68)$$

(for $i = 1, \dots, I$)

$$\omega_i = (i-1)\Delta\omega \quad (69)$$

$$\Delta\omega = \pi / I \quad (70)$$

式(66)の等方成分 p および仮想単純せん断応力 $q^{(i)}$ は、有効体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}'$ および仮想単純せん断ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}''$ の関数として、以下で与える.

$$p = p(\boldsymbol{\varepsilon}') \quad (71)$$

$$q^{(i)} = q^{(i)}(\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{\varepsilon}'') \quad (72)$$

なお、式(72)において、仮想単純せん断ひずみ $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ のみの関数とせず、有効体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 、仮想有効体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}''$ を含む関数としている理由は、「3. 積分形の構成式（液状化解析）」で記述するとおり、仮想単純せん断機構の拘束圧力依存性および液状化状態依存性を考慮するためである.

上の関係より、応力の等方成分 p よび体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は、以下で与えられる.

$$p = -\frac{1}{2} \mathbf{n}^{(0)T} \boldsymbol{\sigma}' = -\frac{1}{2} (\sigma'_x + \sigma'_y) \quad (73)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{n}^{(0)T} \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad (74)$$

さて、式(71)(72)における有効体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}'$ は、体積ひずみからダイレイタンシーによる体積ひずみ成分 $\boldsymbol{\varepsilon}_d$ およびクリープによる体積ひずみ成分（二次圧密の表現用） $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ を除去したものであり、以下で与える.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}' &= \mathbf{n}^{(0)T} \boldsymbol{\varepsilon}' \\ &= \mathbf{n}^{(0)T} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_c) = \varepsilon - \varepsilon_d - \varepsilon_c \end{aligned} \quad (75)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_d}{2} \mathbf{n}^{(0)} \quad (76)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_c}{2} \mathbf{n}^{(0)} \quad (77)$$

式(76)におけるダイレイタンシー成分は、以下のよう
に収縮的成分 $\boldsymbol{\varepsilon}_d^c$ および膨張的成分 $\boldsymbol{\varepsilon}_d^d$ よりなる.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \boldsymbol{\varepsilon}_d^c + \boldsymbol{\varepsilon}_d^d \quad (78)$$

すなわち,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \boldsymbol{\varepsilon}_d^c + \boldsymbol{\varepsilon}_d^d \quad (79)$$

ここに,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d^c = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_d^c}{2} \mathbf{n}^{(0)} \quad (80)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d^d = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_d^d}{2} \mathbf{n}^{(0)} \quad (81)$$

また、収縮的ダイレイタンシー増分の液状化状態依存性を表現するため、仮想有効体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}''$ を導入する. これは、有効体積ひずみから膨張的ダイレイタンシー成分を除去したものに相当するが、Cookie Model では、これをさらに一般化し、収縮的ダイレイタンシー成分に準じた仮想収縮的ダイレイタンシー $\boldsymbol{\varepsilon}_d^{c''}$ を用いて、マルチスプリングモデル (Iai et al., 1992a) の液状化フロントパラメタ S_0 に対応する有効体積ひずみを以下で与える.

$$\boldsymbol{\varepsilon}'' = \mathbf{n}^{(0)T} \boldsymbol{\varepsilon}'' = \mathbf{n}^{(0)T} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{c''} - \boldsymbol{\varepsilon}_c) = \varepsilon - \varepsilon_d^{c''} - \varepsilon_c \quad (82)$$

仮想単純せん断ひずみ $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ は、以下で与える.

$$\boldsymbol{\gamma}^{(i)} = \mathbf{n}^{(i)T} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d) = \mathbf{n}^{(i)T} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (83)$$

ダイレイタンシー成分の増分は、ひずみ増分の線形変換で与えられるものと仮定し、これを以下のとおり書く.

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d = \mathbf{n}_d^T d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (84)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d^c = \mathbf{n}_d^{cT} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (85)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d^d = \mathbf{n}_d^{dT} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (86)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{c''} = \mathbf{n}_d^{c''T} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (87)$$

よって、式(78)より,

$$\mathbf{n}_d = \mathbf{n}_d^c + \mathbf{n}_d^d \quad (88)$$

上における基本形においては、地震時における粘性減衰を考慮していない. これについては、後述するとおり (3.5 参照)、粘性減衰項を運動方程式に組み込む形で考慮する.

3.2 増分形の構成式

増分形の構成式は、式(3)の両辺の微分をとれば、
以下で与えられる。

$$d\boldsymbol{\sigma}' = -d\mathbf{p}\mathbf{n}^{(0)} + \sum_{i=1}^I dq^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \Delta\omega \quad (89)$$

$$dp = \frac{dp}{d\varepsilon'} d\varepsilon' \quad (90)$$

$$dq^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} d\gamma^{(i)} + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'} d\varepsilon' + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon''} d\varepsilon'' \quad (91)$$

式(90)(91)に、式(75)(82)(83)を代入すると、

$$dp = \frac{dp}{d\varepsilon'} \mathbf{n}^{(0)T} d(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_c) \quad (92)$$

$$dq^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} \mathbf{n}^{(i)T} d\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'} \mathbf{n}^{(0)T} d(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_c) \\ + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon''} \mathbf{n}^{(0)T} d(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d^c - \boldsymbol{\varepsilon}_c) \quad (93)$$

式(92)(93)および式(84)～(86)を式(89)に代入すれば、
増分形の構成式が以下のとおり与えられる。

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}_c d\boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (94)$$

$$\mathbf{D} = K_{LU} \mathbf{n}^{(0)} \mathbf{n}^{(0)T} + \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(i)T} \Delta\omega \\ - K_{LU} \mathbf{n}^{(0)} \mathbf{n}_d^T + \sum_{i=1}^I (H^{(i)} + L^{(i)}) \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(0)T} \Delta\omega \\ - \sum_{i=1}^I (H^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}_d^T + L^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}_d^c{}^T) \Delta\omega \quad (95)$$

$$\mathbf{D}_c = -K_{LU} \mathbf{n}^{(0)} \mathbf{n}^{(0)T} \\ - \sum_{i=1}^I (H^{(i)} + L^{(i)}) \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(0)T} \Delta\omega \quad (96)$$

ここに、

$$K_{LU} = -\frac{dp}{d\varepsilon'} \quad (97)$$

$$G_{LU}^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} \quad (98)$$

$$H^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'} \quad (99)$$

$$L^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon''} \quad (100)$$

式(95)の右辺の第1項、第2項は、それぞれ圧縮伸張およびせん断に関する増分形を表し、対称マトリクスである。第3項は圧縮伸張へのダイレイタンスの影響、第4項はせん断機構の拘束圧依存性および液状化状態依存性、第5項はせん断機構に与えるダイレイタンスの影響を表すものである。これら第3～5項は、いずれも圧縮伸張の機構とせん断に関する機構のカップリングの3種類の機構を示すもので、非対称マトリクスとなる。

簡単のため、以下においては、増分形における式(94)のクリープによる応力増分 $\mathbf{D}_c d\boldsymbol{\varepsilon}_c$ の項を無視し、積分形においてのみクリープによる体積ひずみを考慮する形で数値解析を行う。

4. 積分形の構成式 (圧密沈下・地震応答解析)

4.1 圧縮伸張成分 p の定式化

(1) 塑性域のみを考慮する解析

正規圧密からの圧密沈下・地震応答解析や過圧密からの地震応答解析のように、過圧密域を考慮しない解析が適用できることが明らかな場合には、正規圧密からの砂の液状化解析に準じて、体積弾性係数を以下で与える。

$$K_{LU} = K_{U01} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{l_k} \quad (101)$$

ここに、体積弾性係数の拘束圧依存性の指数は、式(12)類に示す $l_k = 1$ の場合を拡張し、 $l_k \neq 1$ の場合も解析できるようにしている。また、式(101)における有効拘束圧力 p_0 での体積弾性係数 K_{U01} は、既往のひずみ空間多重せん断モデルによる砂の液状化解析（カクテルグラスモデルによる）と同様に、参照拘束圧力 p_a における体積弾性係数 K_{Ua} を基に、以下で与えられる。

$$K_{U01} = r_k K_{Ua} \left(\frac{p_0}{p_a} \right)^{l_k} \quad (102)$$

これを、初期有効体積ひずみを ε'_0 、初期拘束圧力を p_0 として、 $p = p_0$ の時、 $\varepsilon' = \varepsilon'_0$ の条件で積分して、

$l_k \neq 1$ の時

$$p = p_0 (\eta + 1)^{\frac{1}{1-l_k}} \quad (103)$$

$$\eta = -(1-l_K)(\varepsilon' - \varepsilon'_0) / \varepsilon_{m0} \quad (104)$$

$l_K = 1$ の時

$$p = p_0 \exp \eta \quad (105)$$

$$\eta = -(\varepsilon' - \varepsilon'_0) / \varepsilon_{m0} \quad (106)$$

ここに、

$$\varepsilon_{m0} = p_0 / K_{U01} \quad (107)$$

なお、式(101)(102)における係数は、同式において $l_K = 1$ とおいて、式(12)と比較すると、粘性土の解析で用いられる圧密曲線の勾配 λ と、以下のとおり、関連づけられる。

$$r_K K_{Ua} = \frac{1+e}{\lambda} p_a \quad (108)$$

Fig.7 に、上の定式化による圧縮伸張成分の関係を示す。

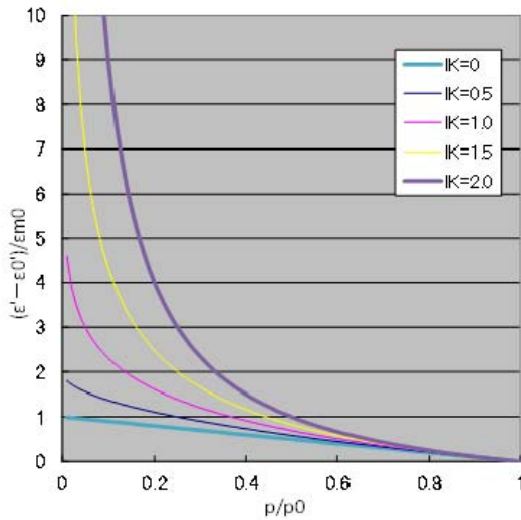


Fig.7 Volumetric relation for non-overconsolidated region

(2) 過圧密域の定式化

過圧密域を考慮する場合、式(20)における ε'_r^* は、正規圧密曲線上の降伏圧密応力での有効体積ひずみおよびパラメタ q_e を用いて、以下により与える。

$$\varepsilon'_r^* = \varepsilon'_0 + (\varepsilon'_{r0} - \varepsilon'_0) \left[\cos \left(\frac{\pi \theta}{2 \theta_e} \right) \right]^{q_e} \quad (109)$$

過圧密域の範囲を規定するパラメタ $\theta_e = \pi / 2$, $q_e = 2$ の時に、Fig.8 のとおり過圧密域が半円で

表される。 $\theta = \pi / 4$ が K0 圧密に相当し、K0 圧密ないしこれより体積圧縮が卓越するモードにおいて過圧密時の体積弾性係数に対応する挙動が現れ、かつ、過圧密域では、圧密降伏応力に対応する ε'_r^* は、 ε'_{r0} とほぼ同じ値をとるものと想定し、暫定的なデフォルト値としては、Fig.8 の青色の過圧密域よりやや広い範囲に対応するパラメタ $\theta_e = 0.375\pi$, $q_e = 0.2$ として、様子を見る。

なお、入力データ（パラメタ）としては、 $r_{\theta e}$ を用いて以下で与える。

$$\theta_e = r_{\theta e} \frac{\pi}{2} \quad (110)$$

ここに、デフォルト値は、 $r_{\theta e} = 0.75$ 。

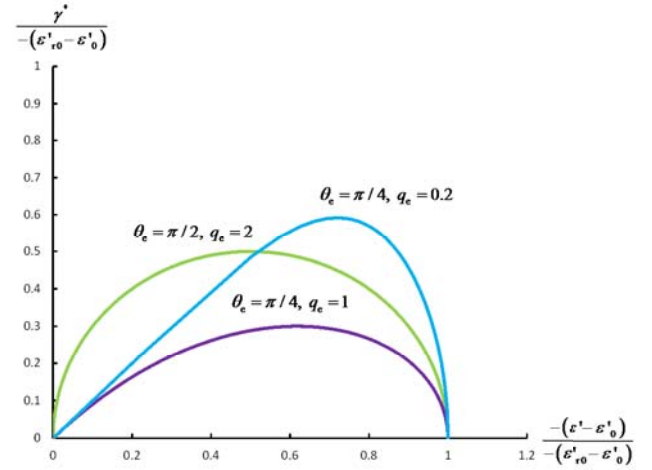


Fig.8 Overconsolidation region specified by parameters

(3) 過圧密状態を初期状態とする初期の過圧密域での解析

過圧密域では、塑性域での体積弾性係数に対する過圧密域での体積弾性係数の比に相当するパラメタ r_{Ke} を用いて、体積弾性係数を、以下で与える。

$$K_{LU} = r_{Ke} K_{U01} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{l_K} \quad (111)$$

これを、 $p = p_0$ の時、 $\varepsilon' = \varepsilon'_0$ の条件で積分して、

$l_K \neq 1$ の時

$$p = p_0 (\eta + 1)^{\frac{1}{1-l_K}} \quad (112)$$

$$\eta = -(1-l_K)(\varepsilon' - \varepsilon'_0) / \varepsilon_{m0e} \quad (113)$$

$l_K = 1$ の時

$$p = p_0 \exp \eta \quad (114)$$

$$\eta = -(\varepsilon' - \varepsilon'_0) / \varepsilon_{m0e} \quad (115)$$

ここに,

$$\varepsilon_{m0e} = p_0 / K_{U0e} \quad (116)$$

$$K_{U0e} = r_{Ke} K_{U01} \left(\frac{p_0}{p_0} \right)^{l_K} = r_{Ke} K_{U01} \quad (117)$$

なお、式(111)(102)(108)における係数は、これらの式において $l_K = 1$ とおいて、式(12)(13)と比較すると、粘性土の解析で用いられる圧密曲線の勾配 λ , κ と、以下のとおり、関連づけられる。

$$r_{Ke} = \frac{\lambda}{\kappa} \quad (118)$$

次に、過圧密域から塑性域への脱出の有無の判定を行う。

以下の3条件のうちのいずれか1つが満たされた場合、過圧密域内から塑性域に脱出した (Fig.2 の点 R の外側) と判定する。

(a) 過圧密域が存在する範囲の角度の上限を超えた場合

$$\theta > \theta_e \quad (119)$$

(b) 圧縮ひずみが限界 (降伏圧縮ひずみ) を超えた場合

$$0 \leq \theta \leq \theta_e \quad \text{かつ} \quad -(\varepsilon' - \varepsilon'_0) > -(\varepsilon'_r - \varepsilon'_0) \quad (120)$$

(c) 偏差ひずみが限界偏差ひずみを超えた場合

$$0 \leq \theta \leq \theta_e \quad \text{かつ} \quad \gamma^* > \gamma_r^* \quad (121)$$

これらの判定に必要となる限界値は、以下で求める。まず、式(109)で必要となる降伏圧密圧力 p_{r0} に対応する ε'_{r0} を、式(112)~(117)を参照して以下のように求める。

$l_K \neq 1$ の時

過圧密域での圧密曲線と塑性域での圧密曲線の交点が $(p_{r0}, \varepsilon'_{r0})$ となることから、

$$\varepsilon'_{r0} = -\frac{1}{1-l_K} \left[\left(\frac{p_{r0}}{p_0} \right)^{1-l_K} - 1 \right] \varepsilon_{m0e} + \varepsilon'_0 \quad (122)$$

$$\varepsilon'_{r0} = -\frac{1}{1-l_K} \left[\left(\frac{p_{r0}}{p_{n0}} \right)^{1-l_K} - 1 \right] \varepsilon_{m0} + \varepsilon'_0 \quad (123)$$

ここに、

$$p_{n0} = r_{p_{n0}} p_0 \quad (124)$$

$$\varepsilon_{m0} = p_0 / K_{U01} \quad (125)$$

式(111)(116)(125)より、

$$r_{Ke} = \varepsilon_{m0} / \varepsilon_{m0e} \quad (126)$$

これを用いて式(122)(123)より、降伏圧密圧力は、以下となる。

$$p_{r0} = p_{n0} \left[\frac{r_{Ke} - 1}{r_{Ke} - r_{p_{n0}}^{1-l_K}} \right]^{\frac{1}{1-l_K}} \quad (127)$$

これを、式(122)に代入して、 ε'_{r0} を求める。

$l_K = 1$ の時

過圧密域での圧密曲線と塑性域での圧密曲線の交点が $(p_{r0}, \varepsilon'_{r0})$ となることから、

$$\varepsilon'_{r0} = -\left(\ln \frac{p_{r0}}{p_0} \right) \varepsilon_{m0e} + \varepsilon'_0 \quad (128)$$

$$\varepsilon'_{r0} = -\left(\ln \frac{p_{r0}}{p_{n0}} \right) \varepsilon_{m0} + \varepsilon'_0 \quad (129)$$

式(128)(129)より、降伏圧密圧力は、

$$p_{r0} = p_{n0} r_{p_{n0}}^{\frac{1}{r_{Ke}-1}} \quad (130)$$

これを、式(128)に代入して、 ε'_{r0} を求める。

以上のように求めた ε'_{r0} を用いて、式(109)より、体積ひずみの限界値 ε'^*_{r0} を求める。

また、式(21)で求めた偏差角 θ を使って、偏差ひずみの限界値 γ_r^* を以下で求める。

$$\gamma^* = -(\varepsilon'^*_{r0} - \varepsilon'_0) \tan \theta \quad (131)$$

過圧密域から脱出した時の有効体積ひずみを ε'_r , その時の拘束圧力を p_r として、記憶しておき、塑性域での計算で用いる。

(4) 過圧密域から脱出した塑性域での解析

塑性域での解析では、正規圧密からの通常の圧密沈下・地震応答解析に準じて、体積弾性係数を以下で与える。

$$K_{L/U} = K_{U01} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{l_k} \quad (132)$$

これを、過圧密域を脱出した時の有効体積ひずみを ε'_r 、その時の拘束圧力を p_r として、 $p = p_r$ の時、 $\varepsilon' = \varepsilon'_r$ の条件で積分して、

$l_k \neq 1$ の時

$$p = p_r (\eta + 1)^{\frac{1}{1-l_k}} \quad (133)$$

$$\eta = -(1-l_k)(\varepsilon' - \varepsilon'_r) / \varepsilon_{mr} \quad (134)$$

$l_k = 1$ の時

$$p = p_r \exp \eta \quad (135)$$

$$\eta = -(\varepsilon' - \varepsilon'_r) / \varepsilon_{mr} \quad (136)$$

ここに、

$$\varepsilon_{mr} = p_r / K_{Ur} \quad (137)$$

$$K_{Ur} = K_{U01} \left(\frac{p_r}{p_0} \right)^{l_k} \quad (138)$$

次に、塑性域から過圧密域への復帰の判定を行う。以下の2条件のうちのいずれか1つが満たされた場合、塑性域から過圧密域に復帰したと判定する。

(a) 圧縮ひずみが収縮から伸張に反転した場合
この判定は、前ステップ（ステップ p （上添字））での有効体積ひずみとの比較により、以下で行う。

$0 \leq \theta \leq \theta_e$ かつ

$$-(\varepsilon' - \varepsilon'_0) < -(\varepsilon'^p - \varepsilon'_0) : \text{elastic} \quad (139)$$

(b) 偏差ひずみが限界偏差ひずみを下回った場合

$$0 \leq \theta \leq \theta_e \text{ かつ } \gamma^* < \gamma_r^* \quad (140)$$

復帰した時の有効体積ひずみを ε'_r 、拘束圧力を p_r として、記憶しておく。

また、復帰したときの偏差応力比の角度を θ_r として、新たな過圧密域を、式(109)の ε'_{r0} を更新し以下で与える。

$$\varepsilon'^*_r = \varepsilon'_0 + (\varepsilon'_{nr} - \varepsilon'_0) \left[\cos \left(\frac{\pi \theta}{2 \theta_e} \right) \right]^{q_e} \quad (141)$$

ここに、

$$\varepsilon'_{nr} = \frac{\varepsilon'_r - \varepsilon'_0}{\left[\cos \left(\frac{\pi \theta_r}{2 \theta_e} \right) \right]^{q_e}} + \varepsilon'_0 \quad (142)$$

(5) 塑性域から復帰後の過圧密域での解析

復帰後の過圧密域での挙動は、以下の体積弾性係数を用いて解析する。

$$K_{L/U} = r_{Ke} K_{U01} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{l_k} \quad (143)$$

これを、 $p = p_r$ の時、 $\varepsilon' = \varepsilon'_r$ の条件で積分して、

$l_k \neq 1$ の時

$$p = p_r (\eta + 1)^{\frac{1}{1-l_k}} \quad (144)$$

$$\eta = -(1-l_k)(\varepsilon' - \varepsilon'_r) / \varepsilon_{mre} \quad (145)$$

$l_k = 1$ の時

$$p = p_r \exp \eta \quad (146)$$

$$\eta = -(\varepsilon' - \varepsilon'_r) / \varepsilon_{mre} \quad (147)$$

ここに、

$$\varepsilon_{mre} = p_r / K_{Ure} \quad (148)$$

$$K_{Ure} = K_{U0e} \left(\frac{p_r}{p_0} \right)^{l_k} \quad (149)$$

なお、簡単のため、復帰後の過圧密域は、過圧密域への復帰した時点での領域のまま変化しないものとしておく（解析初期の有効体積ひずみの記憶が保持され続けると考える）。

塑性域からの過圧密域への復帰の解析の式(141)および(143)~(149)を、初期の過圧密域の解析における式(109)および(111)~(117)と比較すると、初期の過圧密域の解析における ε'_0 と p_0 を、それぞれ ε'_r と p_r に置き換えればよいことがわかる。数値解析アルゴリズムとしては、この点を反映して、解析初期の ε'_r と p_r を ε'_0 と p_0 に設定し、初期の過圧密域の解析も式(141)および(143)~(149)を用いる。ただし、判定基準に用いる ε'_{nr} は、初期の解析では式

(123)(128)により、また、復帰後の解析では、式(142)により求める。

4.2 セン断成分 $q^{(i)}$ の定式化

多重せん断モデルの定式化に基づき、式(72)における仮想単純せん断モデルを、骨格曲線上では、以下のように双曲線型で与える。

$$q^{(i)} = \frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{1 + \left| \gamma^{(i)} / \gamma_v \right|} q_v \quad (150)$$

ここに、 q_v 、 γ_v は、仮想単純せん断モデルのせん断強度、(せん断) 規準ひずみであり、せん断強度 τ_m およびせん断弾性係数 G_m と、以下のように関係づけられる。

$$G_m = \frac{q_v}{\gamma_v} \sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega \quad (151)$$

$$\tau_m = q_v \sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega \quad (152)$$

逆に解けば、

$$\gamma_v = \left(\frac{\sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \right) \frac{\tau_m}{G_m} = \left(\frac{\sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \right) \gamma_m \quad (153)$$

$$q_v = \frac{\tau_m}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \quad (154)$$

ここに、 γ_m は、(せん断) 規準ひずみである。

なお、 $I \rightarrow \infty$ の時、

$$\gamma_v = \frac{\pi}{4} \gamma_m \quad (155)$$

$$q_v = \tau_m / 2 \quad (156)$$

仮想単純せん断機構が履歴ループに入った際には、拡張 Masing 則を用いる。履歴ループに入った際の仮想せん断ひずみに応じて、妥当な履歴減衰を表現するように定められるパラメタ ξ 、 ζ を用いて、あらかじめ、以下の正規化を行う。

$$\tilde{q}^{(i)} = \frac{q^{(i)} / q_v}{\xi} \quad (157)$$

$$\tilde{\gamma}^{(i)} = \frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{\zeta} \quad (158)$$

これらを用いて、履歴ループ内での仮想せん断応力は、次のとおり与えられる ((Iai et al., 1992b))。

$$\frac{\tilde{q}^{(i)} - \tilde{q}_r^{(i)}}{2\delta} = \frac{\frac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_r^{(i)}}{2\delta}}{1 + \left| \frac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_r^{(i)}}{2\delta} \right|} \quad (159)$$

$q^{(i)}$ を規定する式(150)(153)(154)では、状態変数 S および液状化フロントパラメタ S_0 を用いて、以下のような拘束圧力依存性および液状化状態依存性を与える。

$$\tau_m = \tau_{m0} S \quad (160)$$

$$G_m = \tau_m / \gamma_m \quad (161)$$

$$\gamma_m = \gamma_{m0} / (S_0 / S_{0bd})^{q_4} \quad (162)$$

ここに、

$$S_{0bd} = 1.0 \quad (163)$$

また、パラメタ q_4 のデフォルト値は $q_4 = 1$. ただし、粘性土の解析では、 $q_4 \approx 0$ なるゼロに近い値をセットすることを推奨。

また、状態変数および液状化フロントパラメタは、以下で与える。

$$S = p / p_0 \quad (164)$$

$$S_0 = \min(p'' / p_0) \quad (165)$$

式(165)における仮想圧力 p'' は、圧力を規定する式(103)(105) (塑性域のみを考慮する場合)、式(112)(114) (解析初期での過圧密域)、式(133)(135) (塑性域)、ないし、式(144)(146) (塑性域からの復帰後の過圧密域)、に準じて、それぞれの式で、有効体積ひずみ ε' (式(75)) を仮想有効体積ひずみ ε'' (式(82)) に、また、体積弾性係数の低減パラメタ r_K を仮想低減パラメタ r_K'' に代えることにより算定する (デフォルトでは、 $r_K'' = r_K$)。

正規圧密からの解析では、せん断強度は、以下で与える。

$$\tau_m = p \sin \phi_f = m_1 p \quad (166)$$

他方、過圧密からの粘性土の非排水せん断では、応力経路が、砂の場合のせん断破壊線よりも上側を

通ることから、この挙動を表現するため、粘着力 c_a （規準拘束圧力 p_a に対応する値）を入力パラメータとして用い、以下のようにせん断強度を与える。

$$\tau_m = c^* \cos \phi_i + p \sin \phi_i \quad (167)$$

$$c^* = 4\varepsilon^* (1 - \varepsilon^*) c \quad (168)$$

$$c = \left(1 - \frac{1}{r_{p_{n0}}}\right) c_a \left(\frac{p_{n0}}{p_a}\right) \quad (169)$$

式(168)の ε^* は、限界状態における膨張的ダイレイタンシーを $\varepsilon_{\text{dus}}^d$ （式(27)）として、以下で与える。

$$\varepsilon^* = \varepsilon_d^d / \varepsilon_{\text{dus}}^d \quad (170)$$

4.3 ダイレイタンシの収縮的成分の定式化

式(78)におけるダイレイタンシの収縮的成分 ε_d^c は、収縮的ダイレイタンシおよび膨張的ダイレイタンシに共通してかかるパラメータ r_{ε_d} 、収縮的成分のみにかかるパラメータ $r_{\varepsilon_d^c}$ を用いて、仮想塑性せん断ひずみ増分 $d\gamma_p^{(i)}$ に応じて、以下で与える。

$$\varepsilon_d^c = \int d\varepsilon_d^c \quad (171)$$

$$d\varepsilon_d^c = -r_{\varepsilon_d} r_{\varepsilon_d^c} r_{S_0} r_{\text{tmp}} \sum_{i=1}^I M_v |d\gamma_p^{(i)}| \Delta \omega \quad (172)$$

仮想塑性せん断ひずみ増分 $d\gamma_p^{(i)}$ は、パラメータ c_1 を用いて、以下で与える。

$$d\gamma_p^{(i)} = d\gamma^{(i)} - c_1 d\gamma_e^{(i)} \quad (173)$$

なお、 $|d\gamma^{(i)}| \leq |c_1 d\gamma_e^{(i)}|$ の場合には、 $d\gamma_p^{(i)} = 0$ とする。

仮想弾性せん断ひずみ増分 $d\gamma_e^{(i)}$ は、微小ひずみにおける式(150)の関係により、以下で与えられる。

$$d\gamma_e^{(i)} = \left(\frac{\gamma_v}{q_v}\right) dq^{(i)} \quad (174)$$

ここで、式(150)～(159)より、

$$dq^{(i)} = G_{LU}^{(i)} d\gamma^{(i)} \quad (175)$$

また、微小ひずみ時（ $d\gamma^{(i)} \approx 0$ の時）の仮想せん断弾性係数 $G_{L0}^{(i)}$ は、

$$G_{L0}^{(i)} = G_{L0} = \frac{q_v}{\gamma_v} \quad (176)$$

となるので、式(174)は、以下のとおりにかける。

$$d\gamma_e^{(i)} = \left(\frac{G_{LU}^{(i)}}{G_{L0}}\right) d\gamma^{(i)} \quad (177)$$

ゆえに、式(173)に示す仮想塑性せん断ひずみ増分 $d\gamma_p^{(i)}$ は、全仮想せん断ひずみ増分 $d\gamma^{(i)}$ より、以下のとおり与えられる。

$$d\gamma_p^{(i)} = \left(1 - c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(i)}}{G_{L0}}\right)\right) d\gamma^{(i)} \quad (178)$$

なお、 $1 < c_1 \left(\frac{G_{LU}^{(i)}}{G_{L0}}\right)$ の場合には、 $d\gamma_p^{(i)} = 0$ とする。

式(172)における r_{S_0} は、過剰間隙水圧上昇過程の立上りの形状や後半の形状と、これに対応するひずみの伸びを制御することを目的としたもので、パラメータ q_1 、 q_2 を用いて、以下で与える。

$S_0^* > S_{bi} (= 0.8)$ の場合

$$r_{S_0} = S_0^{*q_2} \left[(S_0^* - S_{bi}) q_1 + (1 - S_0^*) \right] / (1 - S_{bi}) \quad (179)$$

$S_0^* \leq S_{bi} (= 0.8)$ の場合

$$r_{S_0} = S_0^{*q_2} \quad (180)$$

ここに、

$$S_0^* = p'' / p_0 \quad (181)$$

ただし、 $S_0^* \geq S_1$ とする。

また、 r_{tmp} は、変相線を超えた領域における収縮的ダイレイタンシの寄与度を制御するもので、小堤ら（2001）に従い、以下で与える。

$$r_{\text{tmp}} = (m_{\text{tmp}} - \tau^* / p) / (m_{\text{tmp}} - m_3) \quad (182)$$

ここに、

$$\tau^* = \frac{r_\gamma \frac{\gamma}{\gamma_m}}{1 + r_\gamma \frac{\gamma}{\gamma_m}} \tau_{m0} \quad (183)$$

$$\gamma = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (184)$$

ここに、

$$m_{\text{tmp}} = r_{m_{\text{tmp}}} m_1 + (1 - r_{m_{\text{tmp}}}) m_2 \quad (185)$$

$$m_3 = 0.67 m_2 \quad (186)$$

ここに、内部摩擦角、変相角をそれぞれ ϕ_p, ϕ_f とすると、 $m_1 = \sin \phi_f$ 、 $m_2 = \sin \phi_p$ 。粘性土の場合には、以下とする。

$$\phi_f = \phi_p \quad (187)$$

なお、 $m_{\text{tmp}} \leq \tau^* / p$ の時は $r_{\text{tmp}} = 0$ 、 $\tau^* / p \leq m_3$ の時は $r_{\text{tmp}} = 1$ とする。

また、上のアルゴリズムでは、終局状態が過大評価となる傾向がある点を改善するため、収縮的ダイレイタンシーの低減係数の評価式で低減が開始されるせん断応力比を、式(186)に代え、以下で制御可能とするオプションを導入する。

$$m_3 = r_{m_{\text{tmp}3}} m_1 \quad (188)$$

このオプションにおいて、 $r_{m_{\text{tmp}3}} = 1$ の場合には、 $r_{\text{tmp}} = 1$ とする。

式(172)において収縮的ダイレイタンシーを規定する M_v は、変相角を ϕ_p として、以下で与える値に基づいて与える。

$$M_{v0} = \frac{M_p}{\sum_{i=1}^I |\sin \omega_i| \Delta \omega} \quad (189)$$

$$M_p = \sin \phi_p \quad (190)$$

式(189)に対して、さらに、収縮的体積ひずみの極限值 $\varepsilon_d^{\text{cm}}$ 、パラメタ $q_3 (= 1.0)$ を用いて、以下のとおり与える。

$$M_v = \left(1 - \frac{(-\varepsilon_d^c)}{\varepsilon_d^{\text{cm}}} \right)^{q_3} M_{v0} \quad (191)$$

なお、 $-\varepsilon_d^c > \varepsilon_d^{\text{cm}}$ の場合には、 $M_v = 0$ とする。ここに、収縮的ダイレイタンシーの上限値は、パラメタ $r_{\varepsilon_{\text{dus}}^c}$ 、限界状態での収縮的ダイレイタンシー $\varepsilon_{\text{dus}}^c$ より、以下で与える。

$$\varepsilon_d^{\text{cm}} = -r_{\varepsilon_{\text{dus}}^c} \varepsilon_{\text{dus}}^c \quad (192)$$

パラメタ $r_{\varepsilon_{\text{dus}}}$ のデフォルトは、 $r_{\varepsilon_{\text{dus}}} = 1$ とする。

式(82)における仮想収縮的ダイレイタンシー成分 $\varepsilon_d^{\text{c}''}$ も、式(171)～(191)に準じた定式化を適用するが、式(172)(191)に代えて、仮想収縮的体積ひずみの極限值 $\varepsilon_d^{\text{cm}''}$ を用いて、以下のとおり与える。

$$d\varepsilon_d^{\text{c}''} = -r_{\varepsilon_d} r_{\varepsilon_d^c} r_{s_0} r_{\text{tmp}} \sum_{i=1}^I M_v'' |\mathrm{d}\gamma_p^{(i)}| \Delta \omega \quad (193)$$

$$M_v'' = \left(1 - \frac{(-\varepsilon_d^{\text{c}''})}{\varepsilon_d^{\text{cm}''}} \right)^{q_3} M_{v0} \quad (194)$$

ここに、仮想収縮的ダイレイタンシーの上限値は、パラメタ $r_{\varepsilon_{\text{dus}}^{\text{c}''}}$ を用いて、以下で与える。

$$\varepsilon_d^{\text{cm}''} = -r_{\varepsilon_{\text{dus}}^{\text{c}''}} \varepsilon_{\text{dus}}^c \quad (195)$$

パラメタ $r_{\varepsilon_{\text{dus}}^{\text{c}''}}$ のデフォルトは、 $r_{\varepsilon_{\text{dus}}^{\text{c}''}} = 1$ 。

なお、式(192)(195)における限界状態での収縮的ダイレイタンシー $\varepsilon_{\text{dus}}^c$ は、 $l_K = 1$ の場合には、式(32) (ただし、Cam Clay 型の場合は式(34)または(36))により与える。

$l_K \neq 1$ の場合には、限界状態での有効拘束圧力 $p_{\text{us}0}$ が、 $l_K = 1$ の場合と共通して、以下で与えられると考える。

$$p_{\text{us}0} = p_{n0} \exp \left(-\Lambda \frac{\eta_{\text{us}}^*}{M} \right) \quad (196)$$

他方、 $l_K \neq 1$ の場合の正規圧密曲線の体積弾性係数は、式(101)に準じて、以下で与えられる。

$$K_{L/U} = K_{\text{Un}0} \left(\frac{p}{p_{n0}} \right)^{l_K} \quad (197)$$

式(197)における有効拘束圧力 p_0 での体積弾性係数 $K_{\text{Un}0}$ は、既往のひずみ空間多重せん断モデルによる砂の液状化解析 (カクテルグラスモデルによる) と同様に、参照拘束圧力 p_a における体積弾性係数 K_{Ua} を基に、以下で与えられる。

$$K_{\text{Un}0} = r_K K_{\text{Ua}} \left(\frac{p_{n0}}{p_a} \right)^{l_K} \quad (198)$$

これを、 $p = p_{n0}$ の時、 $\varepsilon' = \varepsilon'_0$ の条件で積分して、

$$p = p_{n0} (\eta + 1)^{\frac{1}{1-l_K}} \quad (199)$$

$$\eta = -(1-l_K) (\varepsilon' - \varepsilon'_0) / \varepsilon_{\text{mn}0} \quad (200)$$

$$\varepsilon_{\text{mn}0} = p_{n0} / K_{\text{Un}0} \quad (201)$$

ここで、体積ひずみー平均圧力の関係で与えられる Fig.3 を参照し、有効体積ひずみー平均圧力の関係として与えられる正規圧密曲線において、初期状態では $\varepsilon_d = 0$ 、限界状態曲線上では $\varepsilon_d = \varepsilon_{\text{dus}}^c$ となることから、限界状態曲線は、以下で与えられる。

$$\frac{1}{1-l_K} \left[\left(\frac{p}{p_{n0}} \right)^{1-l_K} - 1 \right] = - \frac{\varepsilon - \varepsilon_{dus}^c - \varepsilon_0}{\varepsilon_{mn0}} \quad (202)$$

この曲線が、式(196)で与えられる限界状態での有効拘束圧力点 $p = p_{us0}$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ を通ることから、 $l_K \neq 1$ の場合の限界状態における収縮的ダイレイタンシーが以下で与えられる。

$$\varepsilon_{dus}^c = \frac{1}{1-l_K} \left[\left(\frac{p_{us0}}{p_{n0}} \right)^{1-l_K} - 1 \right] \varepsilon_{mn0} \quad (203)$$

以上においては、初期応力誘導異方性を式(196)により、考慮しているが、Cam Clay 型モデルのように限界状態が等方性を持つと考える場合には、

$$p_{us0} = p_{n0} \exp(-\Lambda) \quad (204)$$

また、Cam Clay 型モデルにおいて、初期有効体積ひずみ ε'_0 の限界状態のせん断抵抗を入力パラメ

タとして q_{usa} で与える場合には、

$$p_{us0} = p_{usa} \quad (205)$$

とにおいて、これを式(203)に代入することにより、限界状態における収縮的ダイレイタンシーが求まる。

なお、過圧密域においても、収縮的ダイレイタンシーは発生可能としておき、その際に用いるパラメタの r_{ε_d} , $r_{\varepsilon_d}^c$ は、過圧密域に適用される値として、塑性域で用いるパラメタとは異なるパラメタ $r_{\varepsilon_{de}}$, $r_{\varepsilon_{de}}^c$ を用いることができるようにしておく。

4.4 ダイレイタンシの膨張的成分の定式化

式(78)におけるダイレイタンシの膨張的成分 ε_d^d は、砂の解で Steady State を考慮する場合の定式化に順じて定式化を行う。その際、粘性土解析用に S_0^* の減少に応じて、膨張的ダイレイタンシーを低減するための係数 r_{S_0} を導入して、以下で与える。

$$\varepsilon_d^d = r_{\varepsilon_d} r_{S_0} \sum_{i=1}^I \left[\left| \frac{\tilde{\gamma}^{(i)}}{\gamma_v} \right| - \ln \left(1 + \left| \frac{\tilde{\gamma}^{(i)}}{\gamma_v} \right| \right) \right] \gamma_v m_{lv} \Delta \omega \quad (206)$$

ここに、

$$\left| \frac{\tilde{\gamma}^{(i)}}{\gamma_v} \right| = \left(1 - \exp \left(- \left| \frac{\gamma^{(i)}}{\gamma_{vus}} \right| \right) \right) \frac{\gamma_{vus}}{\gamma_v} \quad (207)$$

$$m_{lv} = \frac{m_1}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \quad (208)$$

$$r_{S_0} = (1 - r_{S_0}^{d \min}) (S_0^*)^{q_5} + r_{S_0}^{d \min} \quad (209)$$

デフォルト $r_{S_0}^{d \min} = 1$ の場合は、現在のカクテルグラスモデルの膨張的ダイレイタンシーの定式化に還元される。

限界状態では、式(207)で $|\gamma^{(i)}| \approx \infty$ となるので、これを式(206)に代入し、 $\varepsilon_d^d = \varepsilon_{dus}^{d*}$ とおいて、逆算により、 γ_{vus} を算定する。その際、解析の安定上の観点から、 ε_{dus}^{d*} を以下で与えて、逐次更新していく。

$$\varepsilon_{dus}^{d*} = \varepsilon_{dus} - \varepsilon_d^c \quad (210)$$

ここに、限界状態のダイレイタンシー ε_{dus} は、 $l_K = 1$ の場合には、式(24)(27)(32) (ただし、Cam Clay 型の場合は式(34)または(36)) により与える。

$l_K \neq 1$ の場合には、限界状態における膨張的ダイレイタンシーを以下のとおり求める。まず、体積ひずみ-平均圧力の関係で与えられる Fig.3 を参照し、有効体積ひずみ-平均圧力の関係として式(103)(104)で与えられる圧密曲線において、初期状態では $\varepsilon_d = 0$, 正規圧密曲線上では $\varepsilon_d = \varepsilon_{dus}^d$ となることから、正規圧密曲線は、以下で与えられる。

$$\frac{1}{1-l_K} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{1-l_K} - 1 \right] = - \frac{\varepsilon - \varepsilon_{dus}^d - \varepsilon_0}{\varepsilon_{m0}} \quad (211)$$

この曲線が、点 $p = p_{n0}$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ を通ることから、

$$\varepsilon_{dus}^d = \frac{1}{1-l_K} \left[\left(\frac{p_{n0}}{p_0} \right)^{1-l_K} - 1 \right] \varepsilon_{m0} \quad (212)$$

式(19)より、

$$\varepsilon_{dus}^d = \frac{1}{1-l_K} \left[r_{p_{n0}}^{1-l_K} - 1 \right] \varepsilon_{m0} \quad (213)$$

正規圧密からの解析は、過圧密からの解析において、 $r_{p_{n0}} = 1$ とおいた場合に相当し、上の式をそのまま適用すればよい。

よって、 $l_K \neq 1$ の場合には、限界状態のダイレイタンシー ε_{dus} は、式(24)(203)(213)により与える。

4.5 せん断ひずみ速度依存項

ひずみ空間多重せん断モデルの構成式は、せん断ひずみ速度依存性を考慮しない場合には、2次元解析でのベクトルマトリクス表示で、式(66)で与えられる。この構成式に Tatsuoka et al(2002)の3要素モデル (Tatsuoka et al., 2002)を参考として、Isotach 型の粘性項（ひずみ速度依存項）を、ひずみ空間多重せん断モデルに導入する。

まず、せん断ひずみ速度依存性を考慮しない式(66)に Isotach 型のせん断ひずみ速度依存項を追加して、以下とする。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{n}^{(0)} + \sum_{i=1}^I q^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \Delta\omega + \boldsymbol{\sigma}^* \quad (214)$$

ここに、せん断ひずみ速度依存項 $\boldsymbol{\sigma}^*$ は、以下のとおり与える。

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sum_{i=1}^I q^{*(i)} \mathbf{n}^{(i)} \Delta\omega \quad (215)$$

多重せん断機構の各せん断機構におけるせん断ひずみ速度依存項は、Isotach 特性を規定するパラメタ r_{Iso} , $r_{\dot{\gamma}}$, q_{Iso} を用いて、以下で与える。

$$q^{*(i)} = r_{\text{Iso}} r_q \frac{\dot{\gamma}^{*(i)}}{\max|\dot{\gamma}^{*(i)}|} \left(q_v \frac{\max|\gamma^{(i)} / \gamma_v|}{1 + \max|\gamma^{(i)} / \gamma_v|} \right) \frac{\gamma_m}{\gamma_v} \quad (216)$$

ここに、

$$r_q = 1 - \exp\left(1 - \left(1 + \max|\dot{\gamma}^{*(i)}|\right)^{q_{\text{Iso}}}\right) \quad (217)$$

また、正規化仮想せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{*(i)}$ は、以下で与える。

$$\dot{\gamma}^{*(i)} = r_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}^{(i)} \quad (218)$$

$\max|\dot{\gamma}^{*(i)}|$ および $\max|\gamma^{(i)} / \gamma_v|$ の max は、全ての多重せん断機構および経過時間を通じての最大値とする。せん断ひずみ速度は、数値解析で得られる全体速度ベクトル $\dot{\mathbf{u}}$ を直接参照し、有限要素解析における $\mathbf{B}$ マトリクスを用いて、以下で計算する。

$$\dot{\gamma}^{(i)} = \mathbf{n}^{(i)\text{T}} \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} \quad (219)$$

式(216)において、第1項と第2項の積 $r_{\text{Iso}} r_q$ は、Isotach 型のひずみ速度依存項の上限値を規定する。また、第3項 $\dot{\gamma}^{*(i)} / \max|\dot{\gamma}^{*(i)}|$ は正規化した線形減衰を表す。

また、第4項 $q_v \max|\gamma^{(i)} / \gamma_v| / (1 + \max|\gamma^{(i)} / \gamma_v|)$

は、せん断応力への依存性を近似的に表現する。

式(215)(216)(218)より、

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \left[\sum_{i=1}^I \beta_{\text{Iso}}^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(i)\text{T}} \Delta\omega \right] \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} \quad (220)$$

ここに、

$$\beta_{\text{Iso}}^{(i)} = r_{\text{Iso}} r_q \frac{r_{\dot{\gamma}}}{\max|\dot{\gamma}^{*(i)}|} \left(q_v \frac{\max|\gamma^{(i)} / \gamma_v|}{1 + \max|\gamma^{(i)} / \gamma_v|} \right) \frac{\gamma_m}{\gamma_v} \quad (221)$$

他方、運動方程式における線形減衰としてのレーレー減衰のうち、接線せん断剛性に比例する粘性項（レーレー減衰係数 β が掛かる項）は、以下で表せる。

$$\left[\beta \int \mathbf{B}^{\text{T}} \left(\sum_{i=1}^I G_{\text{LU}}^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(i)\text{T}} \Delta\omega \right) \mathbf{B} d\mathbf{v} \right] \dot{\mathbf{u}} \equiv \int \mathbf{B}^{\text{T}} \boldsymbol{\sigma}^{**} d\mathbf{v} \quad (222)$$

よって、

$$\boldsymbol{\sigma}^{**} = \left[\sum_{i=1}^I \beta G_{\text{LU}}^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(i)\text{T}} \Delta\omega \right] \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} \quad (223)$$

式(220)と式(223)を比較すると、レーレー減衰項において、 $\beta G_{\text{LU}}^{(i)}$ の係数を、式(221)の $\beta_{\text{Iso}}^{(i)}$ により置換することにより、Isotach 型の減衰項が、近似的に表現されることとなる。

上に示す定式化において、(Tatsuoka et al., 2002)におけるパラメタとの関係は、 $r_{\text{Iso}} = \alpha$, $r_{\dot{\gamma}} = 1 / \dot{\epsilon}_{\text{r}}^{\text{ir}}$, $q_{\text{Iso}} = m$ となる。

Fig.9 に、Kaolin の場合の Isotach 型レーレー減衰のを示す。同図に示すとおり、せん断ひずみ速度のレベルが 10^{-5} から 10^7 という 12 オーダーの範囲で、 r_q が 0.1~0.9 に変化する、という感度レベルであり、線形減衰と比較して、著しく感度が鈍いのが特徴である。

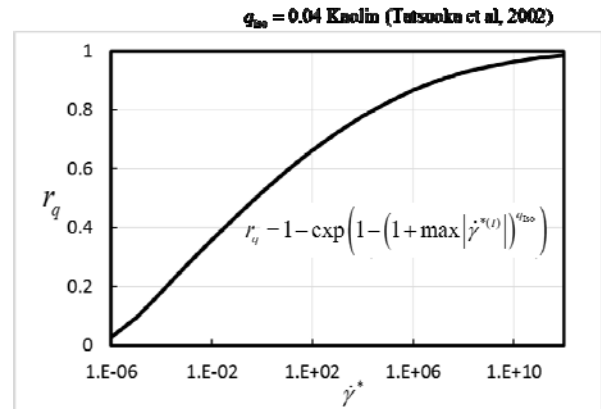


Fig.9 Strain rate dependency of Isotach Model

4.6 間隙比と体積ひずみの関係 ($l_K \neq 1$ の場合)

以上において、間隙比との明示的な対応付けが必要な場合には、2.5 に準じて行う。ただし、2.5 においては、 $l_K = 1$ の場合に限定していたが、ここでは、 $l_K \neq 1$ の場合を対象として、定式化を示す。Fig.6 に示すとおり、間隙比を算定する際に用いる液状化解析での初期体積ひずみを、液状化解析での正規圧密曲線上の初期有効拘束圧力 p_{n0} に対応する体積ひずみ ε_{n0} に置換することにより行う。すなわち、間隙比と体積ひずみの関係を、2.5 に準じて、式(50)で与える。

液状化解析用の正規圧密曲線が p_a , ε_a を通るという条件から、 $l_K \neq 1$ の場合には、

$$\varepsilon_{n0} - \varepsilon_a = -\frac{1}{1-l_K} \left[\left(\frac{p_{n0}}{p_a} \right)^{1-l_K} - 1 \right] \varepsilon_{ma} \quad (224)$$

ここに、 ε_{ma} は、式(52)で与えられる。

よって、 $l_K \neq 1$ の場合には、次式により、間隙比を算定すればよい。

$$\ln \left(\frac{1+e}{1+e_a} \right) = (\varepsilon - \varepsilon_0) - \frac{1}{1-l_K} \left[\left(\frac{p_{n0}}{p_a} \right)^{1-l_K} - 1 \right] \varepsilon_{ma} \quad (225)$$

5. 初期自重解析による水平成層地盤（1次元）での静止土圧係数 K_0 について

はじめにで触れたとおり、地震応答解析に先立って、初期自重解析を行い、地盤・構造物系の初期応力を的確に評価することが重要である。この際の解析は、基本的には、第4章に示す圧密沈下・地震応答解析に準じ、ダイレイタンシーを無視して行う。その際の水平成層地盤での静止土圧係数 K_0 は、以下のようにして制御し、所要の K_0 を満たす自重解析が可能となる。

まず、内部摩擦角 ϕ_f の双曲線モデルにおいて、体積弾性係数、せん断弾性係数の拘束圧依存性を、同一の指数 m を用いて以下で与える。

$$K = K_{La} \left(\frac{p}{p_a} \right)^m \quad (226)$$

$$G_m = G_{ma} \left(\frac{p}{p_a} \right)^m \quad (227)$$

1次元初期自重解析（1次元正規圧密）では、側

方へのひずみが拘束されているので、

$$\varepsilon_x = 0 \quad (228)$$

よって、体積ひずみ、軸差ひずみは、以下で与えられる。

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_y \quad (229)$$

$$\gamma = \varepsilon_x - \varepsilon_y = -\varepsilon_y \quad (230)$$

よって、1次元圧密においては、

$$\gamma = -\varepsilon \quad (231)$$

カクテルグラスモデルによる初期自重解析では、せん断応力-せん断ひずみの関係が以下の双曲線で近似できる。

$$\frac{\tau}{\tau_m} = \frac{Q}{1+Q} \quad (232)$$

ここに、

$$Q = \frac{\gamma}{\gamma_m} \quad (233)$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x' - \sigma_y') \quad (234)$$

$$\tau_m = p \sin \phi_f \quad (235)$$

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G_m} \quad (236)$$

静止土圧係数は、初期自重解析の結果として、以下で与えられる。

$$K_0 = \frac{\sigma_x'}{\sigma_y'} \quad (237)$$

これを用いて、式(232)の左辺は、以下のとおり書ける。

$$\frac{\tau}{\tau_m} = \frac{\frac{1}{2} (\sigma_x' - \sigma_y')}{-\frac{1}{2} (\sigma_x' + \sigma_y') \sin \phi_f} = \frac{1 - K_0}{(1 + K_0) \sin \phi_f} \quad (238)$$

式(232)(238)を静止土圧係数について解くと、

$$K_0 = \frac{1 - \sin \phi_f + (1/Q)}{1 + \sin \phi_f + (1/Q)} \quad (239)$$

他方、式(226)を、初期条件を考慮して、式(103)に準じて積分し、ダイレイタンシーが発生しない

($\varepsilon = \varepsilon'$) 条件で, 体積ひずみについて解くと,

$$\varepsilon = -\frac{1}{1-m} \left(\frac{p}{p_a} \right)^{1-m} \frac{p_a}{K_{La}} \quad (240)$$

よって, 式(227)(231)(233)(235)より,

$$Q = \frac{G_{ma}}{(1-m)K_{La} \sin \phi_f} \quad (241)$$

これを式(239)に代入し, さらに展開すると,

$$(1-m)K_{La} = \frac{(1+\sin \phi_f)K_0 - (1-\sin \phi_f)}{(1-K_0)\sin \phi_f} G_{ma} \quad (242)$$

よって, 初期自重解析後の所用の K_0 状態を与えるには, 式(242)を満たす初期自重解析用の m と K_{La} の組合せを与えればよい.

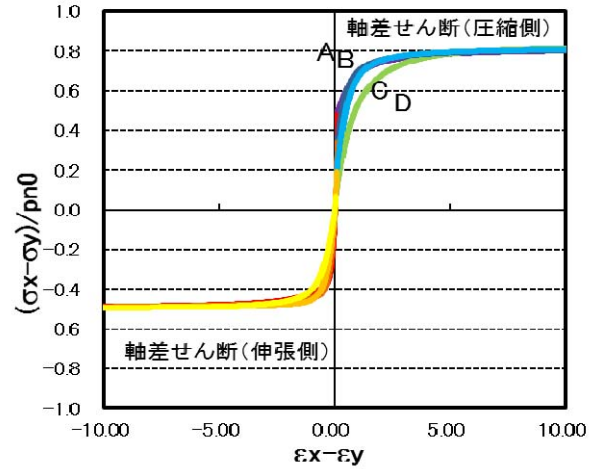
6. 適用例

6.1 非排水単調せん断挙動

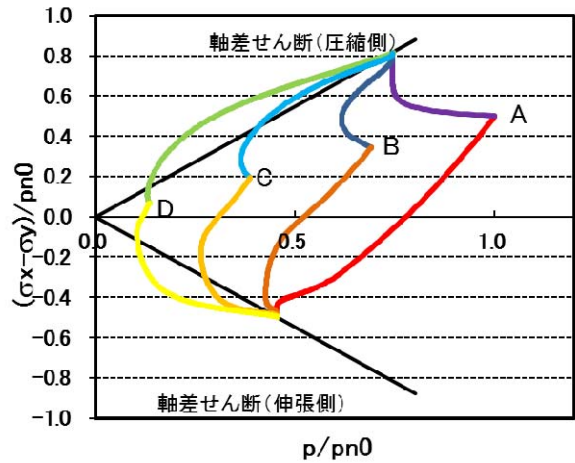
以上に述べた定式化による提案モデルの基本的な挙動を検討するため, 過圧密比を $OCR=1, 2, 6, 40$, $K_0=0.6$ とし, $\lambda=0.596$, $\kappa=0.272$ の条件で, 同一の間隙比 $e_1=2.3$ の状態からの非排水単調せん断を行った. 解析では, せん断ひずみ増分に比例して発生する収縮的ダイレイタンスー増分の比例係数に相当するパラメタ $r_{e_0}^*$ と, 限界状態における収縮的ダイレイタンスーを規定するパラメタ Λ を変化させた. 第2章で述べたとおり, 弾塑性モデルの場合には, 塑性ポテンシャル面を有するため, $0 \leq \Lambda < 1$ などの制約条件があるが, 提案モデルの場合にはこのような制約条件がなく, 対象とする粘土の挙動に即して適切な値に設定することができる. 解析の結果は, Fig.10~13 に示すとおりとなり, 提案モデルは, 構造を有する粘土での巻返し (Fig.11) やクイックレーの挙動 (Fig.12, 13)を含め, 粘性土の非排水単調せん断挙動を, 柔軟かつ精緻に表現することが確認された.

また, 比較のため, 粘性土の弾塑性モデルとして代表的な関口・太田モデル (Sekiguchi and Ohta, 1977) を適用し, 提案モデルの Fig.10 に示す解析条件と同様の $\Lambda=0.544$, $\lambda=0.596$, $\kappa=0.272$, 初期間隙比を $e_1=2.3$ として, 解析プログラム DACSAR (Iizuka and Ohta, 1987) を用いて解析した. 解析の結果は, Fig.14 に示すとおりとなり, 限界状態は, Fig.10 に示す解析結果の限界状態と一致することが確認された. また, 提案モデルは, 関口・太田

モデルと比較して, 過圧密状態からの非排水せん断であっても, その初期において収縮的ダイレイタンスーを示す特徴ある挙動を示すことが確認された.

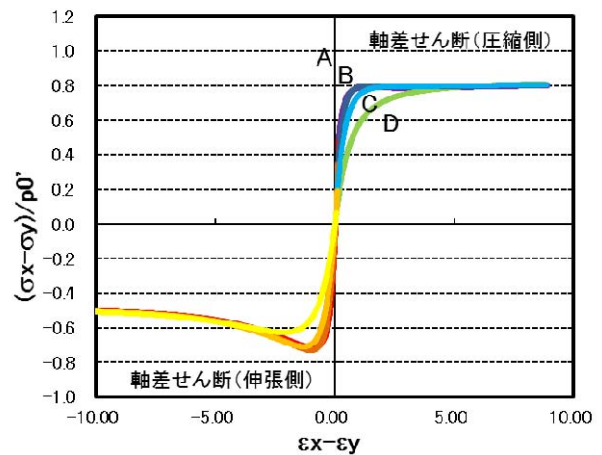


(a) stress-strain relation

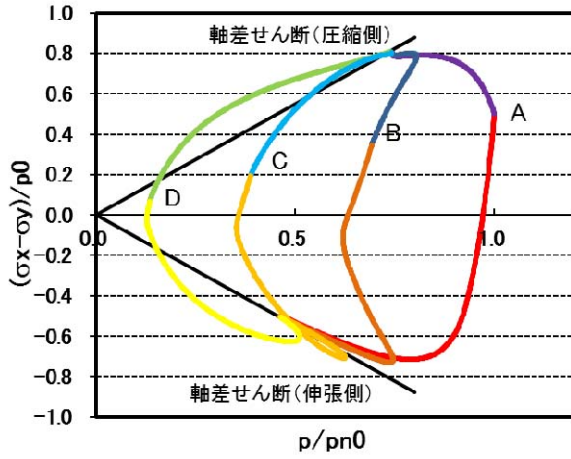


(b) stress path

Fig.10 Computed results for undrained monotonic shear with $r_{e_0}^*=0.85$, $\Lambda=0.554$

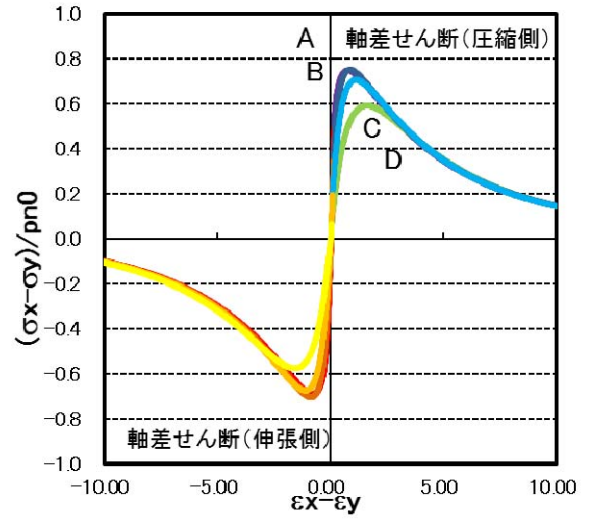


(a) stress-strain relation

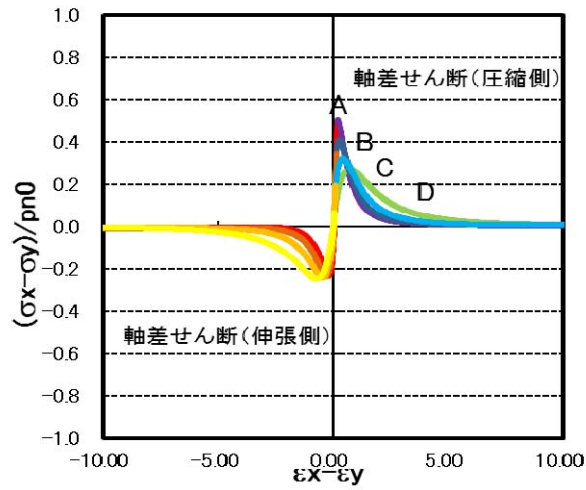


(b) stress path

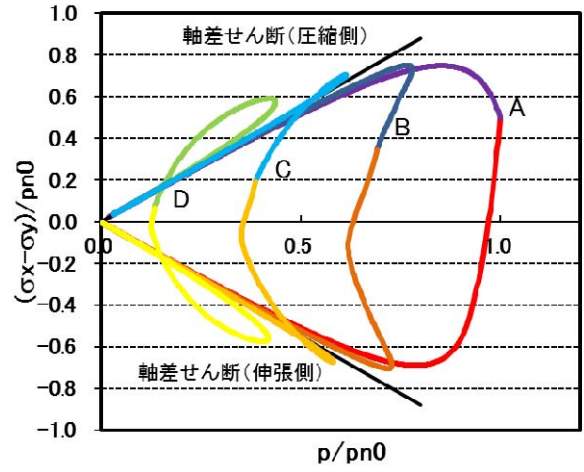
Fig.11 Computed results for undrained monotonic shear of structured clay with $r_{\varepsilon_d^c} = 0.085$, $\Lambda = 0.554$



(a) stress-strain relation

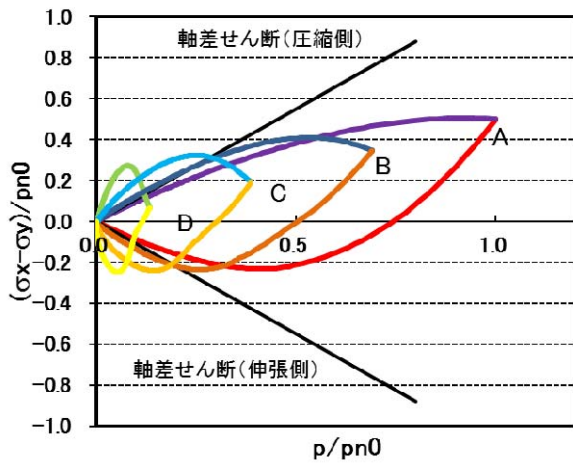


(a) stress-strain relation



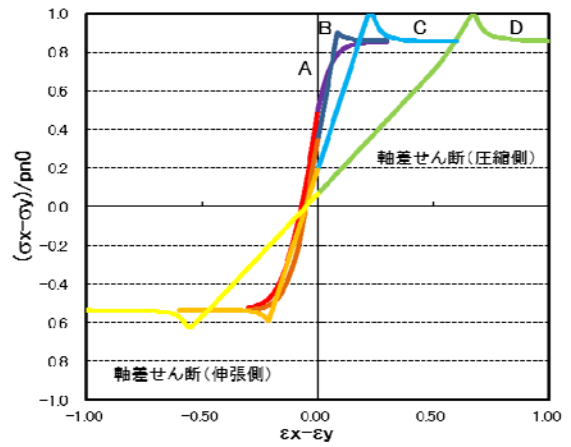
(b) stress path

Fig.13 Computed results for undrained monotonic shear of structured quick clay with $r_{\varepsilon_d^c} = 0.085$, $\Lambda = 10$

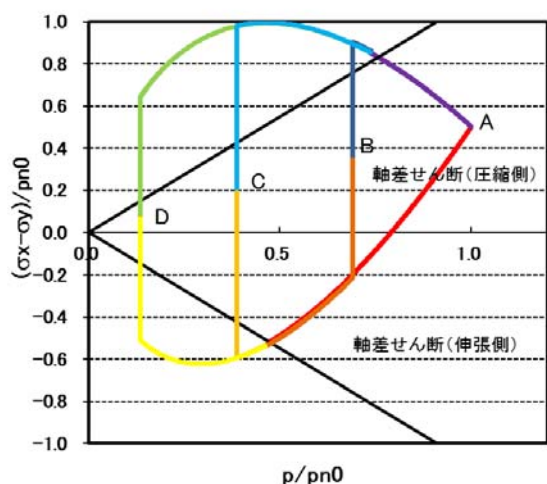


(b) stress path

Fig.12 Computed results for undrained monotonic shear of quick clay with $r_{\varepsilon_d^c} = 0.85$, $\Lambda = 10$



(a) stress-strain relation



(b)stress path

Fig.14 Computed results for undrained monotonic shear by Sekiguchi-Ohta Model through DACSAR

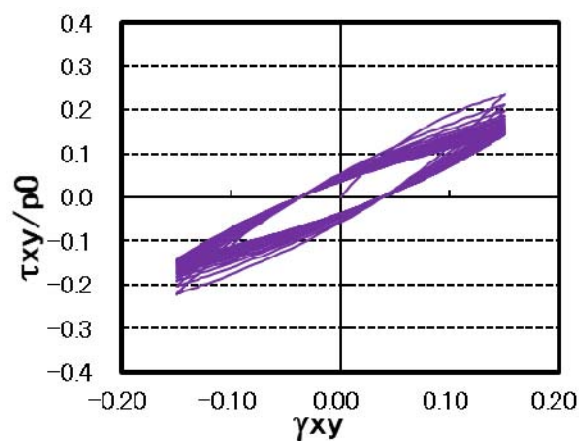
6.2 非排水繰返しせん断挙動 (Isotach/Rayleigh型減衰)

提案モデルの特徴である Isotach/Rayleigh 型減衰についての適用性を確認するため、等方圧密の後、ひずみ制御によりせん断ひずみ振幅 0.15, 1 Hz の正弦波 (ピークでのせん断ひずみ速度は 15%/s に相当) にて非排水せん断の解析を行った。用いた Isotach パラメタは, Kaolin のパラメタを参照して, $r_{so}=0.5$, $r_{\dot{\gamma}}=10^6$ s, $q_{iso}=0.04$ とした。解析において、体積ひずみクリープは無視した。その他のひずみ空間多重せん断モデルのパラメタは, Table 1 に示すとおりである。解析の結果は, Fig.15 に示すとおりとなり、提案モデルは, Isotach/Rayleigh 減衰型のせん断ひずみ速度依存性の特徴を適切に表現することが確認された。

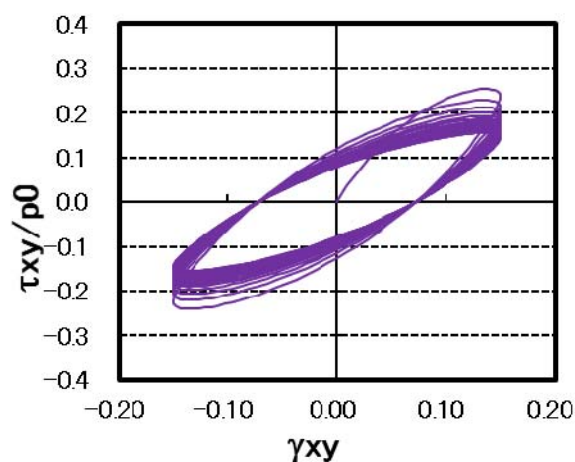
Table 1 Model parameters for analysis ($p_a = 135.5\text{kPa}$).

$r_K K_{Ua}$	G_{ma}	ϕ_f	h_{max}	$r_{\varepsilon_d^c}$	q_2
750	352	33.3°	0.24	0.085	2.0
kPa	kPa				

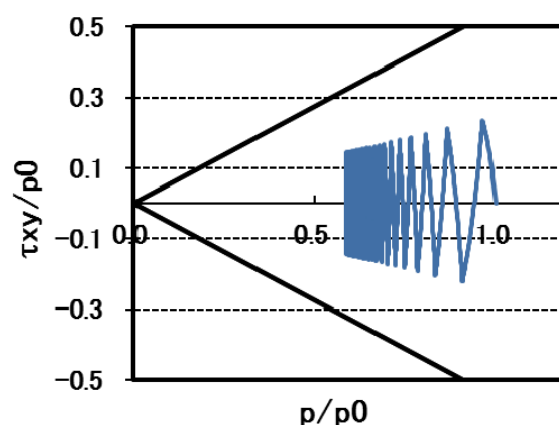
where $\Lambda = 0.544$



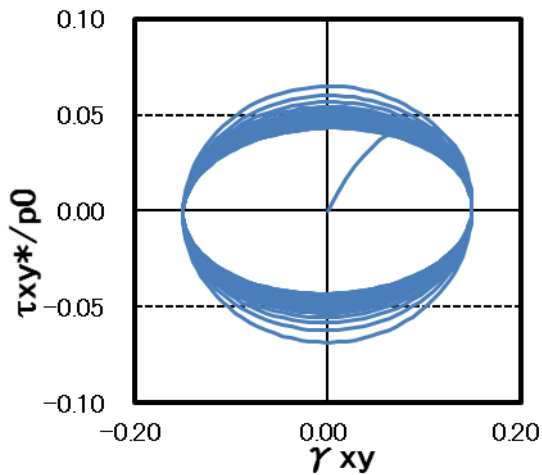
(a)stress-strain relation (without the viscous term)



(b)stress-strain relation with the viscous term



(c)stress path



(d)stress strain relation for viscous term (Isotach/Rayleigh type)

Fig.15 Computed results for undrained cyclic loading with viscous term of Isotach/Rayleigh type

6.3 圧密沈下・地震応答挙動

さらに、粘土地盤の圧密沈下解析とその後の地震応答解析への適用性を検討した一例を Fig.16～19 に示す。解析対象は、Fig.16 に示すとおり、港湾・海岸地域の堤防に準じた盛土断面で、地盤工学会主催の関口・太田モデルを用いた一斉解析で用いられている（地盤工学会,2005）。地震前の圧密沈下解析による盛土中央の沈下および過剰間隙水圧は、Fig.17, 18 で FLIP と表示した結果のとおりとなった。同図には、比較のため、コンピュータープログラム DACSAR(Iizuka and Ohta, 1987)を用い、関口・太田モデル(Sekiguchi and Ohta, 1977)より解析した結果も示している。圧密沈下終了後（約 50 年後）に地震が襲来した場合の結果は Fig.19 に示すとおりとなり、地震動の影響で、さらなる沈下が発生することが分かる。

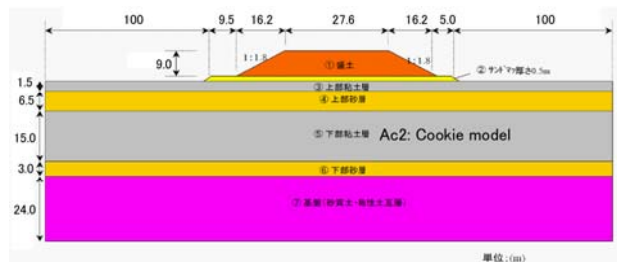
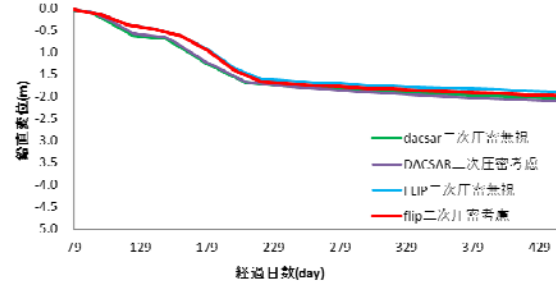


Fig.16 Cross section of embankment model

鉛直変位 (P2:0m地点) 短期



鉛直変位 (P2:0m地点) 長期

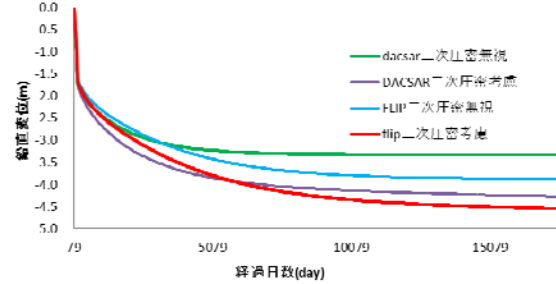
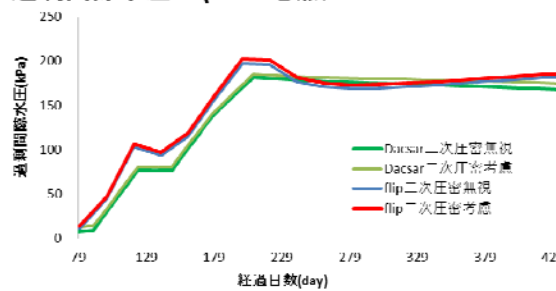


Fig.17 Computed settlement due to consolidation before earthquake

過剰間隙水圧 E4(-15m地点)



過剰間隙水圧 E4(-15m地点)

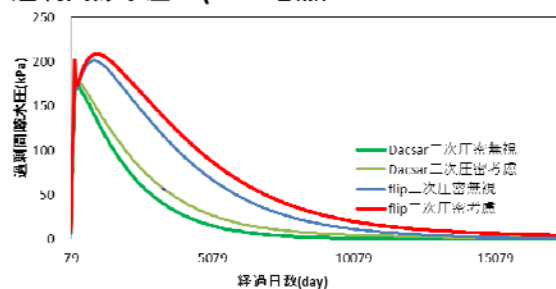


Fig.18 Computed excess pore water pressures due to consolidation before earthquake

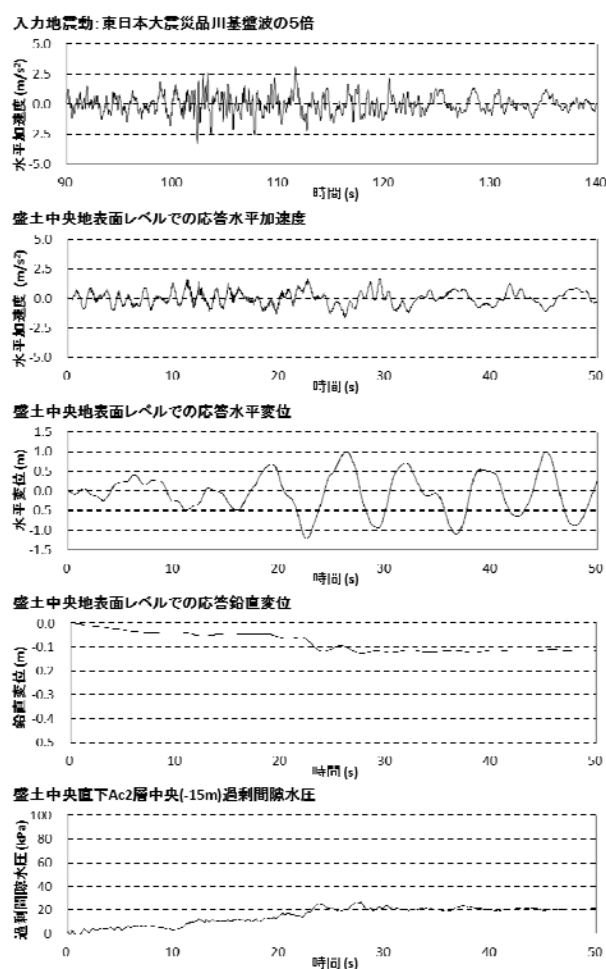


Fig.19 Settlement and excess pore water pressure increase due to earthquake

7. 結論

ひずみ空間多重せん断モデル(Iai et al., 2011)は、地震時の液状化を含む地盤・構造物系の動的解析に広く利用されている。本研究では、このモデルの粘土地盤の圧密解析とこれに引き続く地震応答解析への適用性について、検討した。

提案モデルは、砂と異なり、以下のような特徴を有する粘性土の力学的特長を反映している。

- (1) 接線体積剛性の拘束圧依存性を規定する指数が1.0となる。
- (2) 限界状態（砂の場合の Steady state）が初期応力誘導異方性を持つ。
- (3) 過圧密からのせん断において、粘着力がゼロの場合の Mohr-Coulomb の破壊基準に対応するせん断破壊線を越える（上回る）応力経路を辿り、限界状態に至る。
- (4) ひずみ速度依存性（二次圧密および地震時の粘性減衰）の影響が著しい。

また、初期応力の決定においては、一般には、地

盤・構造物系を対象とした静的自重解析（重力に伴って発生する地盤・構造物内の応力分布の解析）を行って初期応力分布を決定する必要がある。その際に、パラメタを任意に与えるのではなく、水平成層地盤で想定される静止土圧係数が同じ静的自重解析で実現できるという制約条件を満たすものとなっている。

提案モデルの基礎的な挙動を、いくつかの例題に即して検討した結果、汎用性、安定性の面で、すぐれたモデルとなっていることについて、一定の見通しが得られた。

参考文献

- Iai, S., Matsunaga, Y., Kameoka, T. (1992a): Strain space plasticity model for cyclic mobility. *Soils and Foundations*. 32 (2), pp.1-15.
- Iai, S., Matsunaga, Y., Kameoka, T. (1992b): Analysis of undrained cyclic behavior of sand under anisotropic consolidation. *Soils and Foundations*. 32 (2), pp.16-20.
- Iai, S., Tobita, T., Ozutsumi, O., Ueda, K. (2011): Dilatancy of granular materials in a strain space multiple mechanism model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 35 (3), pp.360-392.
- Iai, S. (2012): Consolidation analysis of clayey ground through strain space multiple mechanism model for granular materials. *Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Annuals*, 55. pp.183-194 (in Japanese).
- Iizuka A and Ohta H. (1987): A determination procedure of input parameters in elasto-viscoplastic finite element analysis, *Soils and Foundations*, 27 (3), pp.71-87.
- Sekiguchi, H., Ohta, H. (1977): Induced anisotropy and time dependency in clays. 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Tokyo, pp.306-315.
- Shibata, T. (1963): On the volume change of normally consolidated clays. *Annuals, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Annuals*, 6 pp.128-134 (in Japanese).
- Tatsuoka, F., Ishihara, M., Di Benedetto, H., Kuwano, R. (2002): Time-dependent shear deformation characteristics of geomaterials and their simulation. *Soils and Foundations*. 42 (2), pp.103-129.
- 地盤工学会(2005):地盤工学における FEM の設計への適用に関する研究委員会成果報告書。

（論文受理日：2016年6月13日）