

定数係数の混合問題の適切性について

上智大 理工 内山康一

§ 1. 問題と結果

$\mathbb{R}^{n+1} \ni x = (x_0, x_1, \dots, x_n) = (x', x_n) = (x_0, x'') = (x_0, x''', x_n)$

と記す. $P(D)$ を m 階定数係数単独偏微分作用素とし, 同様に $B_j(D)$ は b_j 階で D_n に関しては高々 $m-1$ 階とする.

$$(P) \begin{cases} (1) & P(D)u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_n > 0\}, \\ (2) & B_j(D)u|_{x_n=0} = \sum_{k=0}^{m-1} B_{jk}(D') D_n^k u|_{x_n=0} = g_j(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^n \\ & j = 0, 1, 2, \dots, \mu' \\ (3) & \text{初期面 } \{x_0=0, x_n>0\} \text{ における } u \text{ の Cauchy data;} \end{cases}$$

を考える. 混合問題 (P) に対し, 解 u の一意存在などによって「適切性」を定義し, 適切になるような境界条件 $\{B_j(D)\}$ を特徴づけることを扱う. Heresh[3]は高階連立系 $P(D)$ が発展型のときを論じた. その後, $P(D)$ 単独のとき, 上見, 白田[1]が L^2 適切の特徴づけを与え, 坂本[8]が C^∞ 適切の特徴づけを与えた. いずれも双曲型の非一様 Lopatinski 条件を扱っている. 柴田[9]は最近, 基本解の存在によって適切性を定

め、境界 $\{x_n=0\}$ が P, B_j に対し特性的なときもこめて坂本と同様の特徴づけを与えた [9]。ここでは Chazarain-Pisier [2] と同様に、楕円型境界値問題における Calderón の方法を使って問題を境界上に帰着し、上に挙げた文献の諸結果に対する補正と拡張を与える。

1.1 定義. $P(D)$ が x_0 方向に 発展的 とは (正定数 γ_0 が存在して $\xi \in \{\operatorname{Im} \xi_0 < -\gamma_0\} \times \mathbb{R}^n$ に対し, $P(\xi) \neq 0$ が $P(\xi) = a\xi_0^p + \sum_{k=0}^{p-1} A_k(\xi')\xi_0^k$ ($a \neq 0$) の形にかけるとをいう. $P(D)$ が x_n 方向に 正規 とは $P(\xi) = P_q(\xi')\xi_n^q + \dots + P_0(\xi')$ ($q \leq m$) とかいたとき $P_q(\xi')$ が発展的であることをいう. $P(D)$ が x_0 方向に発展的で x_n 方向に正規なとき, これを (E)型 ということにする. $P(D)$ が x_0 方向に発展的で, 初期面 $\{x_0=0\}$ が $P(D)$ に關して非特性 (i.e. $P(\xi)$ の主部を $P^0(\xi)$ とするとき, $P^0(1, 0, 0) \neq 0$) のとき, (H)型 (双曲型) ということにする. このとき $P(\xi)$ は双曲型多項式に他ならず, 従ってその $(0, 0, 1)$ における局所化として得られる $P_q(\xi')$ は同じく双曲型多項式となり (笠原氏による注意 [9]), $P(\xi)$ はつねに x_n 方向に關して正規となることに注意しておく.

1.2 定義. $P(D)$ を (E)型とする. $\xi' = (\xi_0, \xi'') \in \{\operatorname{Im} \xi_0 < -\gamma_0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ に対し, λ についての方程式 $P(\xi', \lambda) = 0, \operatorname{Im} \lambda > 0$

の根を重複をこめて $\lambda_0^+(\xi'), \lambda_1^+(\xi'), \dots, \lambda_{\mu-1}^+(\xi')$ とかく。
 μ は ξ' に依らず一定である。境界条件の数については条件 (B)
 $:\mu' = \mu$ をおく。次に $P^+(\xi', \xi_n) = \prod_{j=0}^{\mu-1} (\xi_n - \lambda_j^+(\xi'))$
 とおき、 $B_j(\xi)$ を ξ_n の多項式として $P^+(\xi', \xi_n)$ で割った余り
 を $B'_j(\xi) = \sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{jk}(\xi') \xi_n^k$ とおく。 $B'(\xi') = (B'_{jk}(\xi'))_{0 \leq j, k \leq \mu-1}$
 を Lopatinskiĭ 行列 といい、その行列式 $\det B'(\xi') = R(\xi')$
 を Lopatinskiĭ 行列式 と言う。

1.3 定理. $e^{-\gamma x_0}$ の重みをつけた Sobolev 空間を $H_{s;r}$
 とおき、 $\bigcap_{s \in \mathbb{R}} H_{s;r} = H_{\infty;r}$ とする。 $P(D)$ を (E) 型とし
 条件 (B) のもとで次の二条件は同値である。

(i) $\forall \gamma > \gamma_0$ に対し、 $f \in H_{\infty;r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $g = (g_j) \in H_{\infty;r}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^\mu)$, $P(D)u = f$, $B_j u = g_j$ が一意解 $u \in H_{\infty;r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ を有する。

(ii) $\xi' = (\xi_0, \xi''') \in \{\operatorname{Im} \xi_0 < -\gamma_0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ に対し、 $R(\xi') \neq 0$.
 (i) または (ii) のもとで $\operatorname{supp} f \subseteq \{x_0 \geq 0\}$, $\bigcup_j \operatorname{supp} g_j \subseteq \{x_0 \geq 0\}$ ならば $\operatorname{supp} u \subseteq \{x_0 \geq 0\}$.

1.4 注意. Hersh [3] の定式化および推論は粗い。一階連立の場合は笠原 [7] がそれを補った。単独高階は R. Melrose も厳密化を論じているが方法はちがう。定理 1.3 の $P(D)$ が正規である限り $\{x_n = 0\}$ は特性境界でもよいが、正規性がないと一般に 1.2 の μ が ξ' について一定でなくなる。発展的

だが正規でない例として $P(D) = D_0 + D_n D_1$.

1.5 定理 $P(D)$ は (H) 型とし, 条件 (B) のもとで

$Pu = f$, $B_j u = g_j$ $0 \leq j \leq \mu-1$, $D_0^k u = h_k$ $0 \leq k \leq m-1$ を考える. $\{f, g_j, h_k\}$ は $\{x_0 = x_n = 0\}$ において無限個の両立条件をみたすとする. このとき次の二条件は同値である.

(i) 上の混合問題は C^∞ 適切である (i.e. 一意に u が C^∞ で存在する. あるいは $f, g_j, h_k \in C^\infty$ とする).

(ii) Lopatinski 行列式が次の (1) (2) をみたす.

$$(1) \quad R(\xi') \neq 0 \quad \text{が} \quad \xi' \in \{\operatorname{Im} \xi_0 < -\delta_1\} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

$$(2) \quad R(\xi') \text{ の主部を } \tilde{R}_0(\xi') \text{ とすると } \tilde{R}(-i, 0) \neq 0.$$

1.6 注意. 定理 1.5 は $\{x_n = 0\}$ が $P(D)$ と $B_j(D)$ に対し非特異性という附加条件をみたすとき坂本 [8] において示された.

我々は (ii) $\Rightarrow$ "一意性" を示すとき, 其役問題を經由せず, 境界上の convolution 系を扱うのでこれらの附加条件は要らない. 更に, (ii) (2) の必要性は, $\tilde{R}(-i, 0) = 0$ のとき自明でない零解を構成することにより示される. これは白田 [10] と同様, Hersh [4] の証明を補うものである. Cauchy 問題との類比から, (ii) (2) は一意性の十分条件であることが期待される. 混合問題における Holmgren の定理としてこれを捉えるなら, まづ Cauchy - Kowalevsky の定理が必要となる. (e.g. 白田 [10]) において (ii) (1) は "存在" に関わることが予想される. Holmgren の

定理" が成り立つ範囲では十分性については Hörmander [5] の証明をたどればよいが, 必要性のためには Hörmander [6] のように条件を修正する必要があると思われる。

例. $\eta = 2$. $P(D) = D_0^2 - D_1^2 - D_2^2$, $B_0(D) = D_0 - (D_1 + i)^2$ は (ii) (i) をみたさないが, C^∞ 空間で解が存在する。

1.7 定理. $P(D)$ は狭義双曲型とし, $\{x_n = 0\}$ は $P(D)$ に対して非特性的とし, $Pu = f \in H_{0,0;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $B_j u = g_j \in H_{m-1-b_j+0;\gamma}(\mathbb{R}^n)$ を条件 (B) のもとで考える。次の (i) と (ii) は同値である。

(i) 解 $u \in H_{m,-1;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ が一意に存在して

$$\gamma \|u\|_{m,-1;\gamma}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u \rangle_{m-1-j;\gamma}^2 \leq \frac{C}{\gamma^{2\theta}} \left(\frac{1}{\gamma} \|f\|_{0,0;\gamma}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j \rangle_{m-1-b_j+0;\gamma}^2 \right).$$

さらに, f, g が $x_0 < 0$ で 0 なら u も $x_0 < 0$ で 0 であり, $f \in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $g_j \in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^n)$ なら $u \in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$.
ここで γ はある定数 γ_0 より大きい任意の正数。

(ii) (L_0) : $|A_{k,j}(\xi')| \leq \frac{C |\xi'|^{k-b_j+0}}{\gamma^\theta}$ が $\xi' \in \{\operatorname{Im} \xi_0 < -\gamma_1\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_0 = \sigma - i\gamma$ について成立する。ここで

$(A_{k,j}(\xi'))$ は Lopatinskiĭ 行列の逆行列である。

1.8 注意. 定理 1.7 は $P(\xi)$, $B_j(\xi)$ が同次多項式の時

Chazarain - Pizrou [2] で示された. $\{x_n=0\}$ が特性的のときは, (この方法では) 根 $\lambda_j(\xi')$ の評価が変わる場合だけ, 評価式が変わる. 条件 (L_0) は Lopatinskiï 行列だけで記述されているという意味で見易い. その反面, L^2 不等式としては粗い. (cf. 上見 - 白田 [1]). 証明は [12] および [2].

§ 2. 方法 (Calderón 射影作用素による境界上への帰着)

2.1 跳躍公式. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ に対し, u を $x_n \geq 0$ に制限して $x_n < 0$ に 0 で拡張したものを $u^0(x)$ とかく. $P(D) = \sum_{j=0}^q P_j(D') D_n^j$ に対して

$$\begin{aligned} P(u^0) &= (Pu)^0 + \frac{1}{i} \sum_{\ell=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{q-1-\ell} P_{j+\ell+1}(D') (D_n^j \delta(x_n) \otimes \gamma_\ell u) \\ &\equiv (Pu)^0 + \frac{1}{i} \sum_{\ell=0}^{q-1} L_\ell(D) (\delta(x_n) \otimes \gamma_\ell u) \\ &\equiv (Pu)^0 + \tilde{P}(\gamma u). \end{aligned}$$

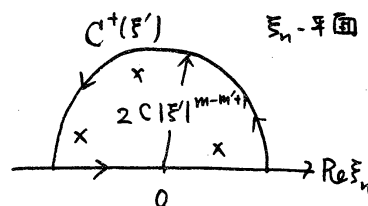
2.2 補題. $P(\xi) = \sum_{j=0}^q P_j(\xi') \xi_n^j$ が ξ_n について正規 i.e. $\xi' \in \{\operatorname{Im} \xi_0 < -\gamma_0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ に対し, $P_q(\xi') = c \xi_0^{p'} + \sum_{k=0}^{p'-1} C_k(\xi'') \xi_0^k \neq 0$ とする. このとき, 任意の $\gamma_1 > \gamma_0$ に対し, C_{γ_1} が存在して, $|\lambda_j(\xi')| \leq C_{\gamma_1} |\xi'|^{m-\gamma_1+1} / \gamma^{p'}$; ここで $\xi_0 = \sigma - i\gamma$, $\gamma_1 \leq +\gamma$, $\xi'' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $P(\xi', \lambda_j) = 0$ ($j=0, 1, \dots, q-1$).

2.3 積分路 $C^+(\xi')$. $P(\xi)$ は (E) 型とする. $C^+(\xi')$ を定義 1.2 の零点 $\lambda_j^+(\xi')$, $j=0, 1, \dots, \mu-1$ を内に囲む複素上半平面 $\{\operatorname{Im} \xi_n \geq 0\}$ 内の閉路とする. 特に以下は, 補題 2.2 に鑑み, $\{\xi_n; \operatorname{Im} \xi_n = 0, |\operatorname{Re} \xi_n| \leq 2 C_{\gamma_1} |\xi'|^{m-\gamma_1+1} / \gamma^{p'}\} \cup \{\xi_n = \frac{2 C_{\gamma_1}}{\gamma^{p'}} |\xi'|^{m-\gamma_1+1} e^{i\theta};$

; $0 \leq \theta \leq \pi$ } とする.

2.4 Calderón 射影作用素.

$$\xi' = (\xi_0, \xi'') \in \{ \operatorname{Im} \xi_0 < -r_0 \} \times \mathbb{R}^{n-1}$$



に対して

$$Q_{k,e}(\xi') \equiv \int_{C^+(\xi')} \frac{1}{P(\xi', \lambda)} L_e(\xi', \lambda) \lambda^k \frac{d\lambda}{2\pi i}$$

とおけば, $Q_{k,e}(\xi')$ は一意に定まる超関数 $Q_{k,e} \in \bigcap_{r > r_0} H_{-\infty, r}(\mathbb{R}^n)$

の Fourier-Laplace 像である. convolution 作用素 $Q_{k,e} *$ を成分とする行列 $\{Q_{k,e} * \}_{0 \leq k, e \leq q-1}$ を Calderón 射影作用素 とする.

$P^+(\xi) = \prod_{j=0}^{\mu-1} (\xi_n - \lambda_j^+(\xi'))$ は ξ_n については多項式だから跳躍公式 2.1 が考えられ, $L_e^+(\xi', \lambda)$ が定義できるから,

$$Q_{k,e}^+(\xi') \equiv \int_{C^+(\xi')} \frac{1}{P^+(\xi', \lambda)} L_e^+(\xi', \lambda) \lambda^k \frac{d\lambda}{2\pi i}$$

とおく. $0 \leq k \leq q-1$, $0 \leq e \leq \mu-1$ だが, $Q^+ = (Q_{k,e}^+)_{\substack{0 \leq k \leq q-1 \\ 0 \leq e \leq \mu-1}}$ とおく.

2.5 命題. $P(D)$ を (E) 型とする. $\xi' \in \{ \operatorname{Im} \xi_0 < -r_0 \} \times \mathbb{R}^{n-1}$ に対し, 次の (i) (ii) (iii) は同値である.

(i) $Q(\xi') w = w$. ここで $w = (w', w'') \in \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^{q-M} = \mathbb{C}^q$.

(ii)
$$\begin{cases} P(\xi', D_n) U(x_n) = 0 \\ \gamma U = (U(0), D_n U(0), \dots, D_n^{q-1} U(0)) = w \end{cases}$$

の解が $\{x_n \geq 0\}$ で有界である.

$$(iii) \quad Q^+(\xi') w' = w''.$$

2.6 命題. $P(D)$ は (E) 型とする. 次の (i), (ii), (iii) は同値である.

- (i) $v \in \prod_{j=0}^{s-1} H_{m+s-j-1/2; r}(\mathbb{R}^n)$ が $Q * v = v$ をみたす.
- (ii) $u \in H_{m, s; r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ があって $P(D)u = 0$, $v = ru$ をみたす.
- (iii) $v = (v', v'') \in \prod_{j=0}^{s-1} \times \prod_{j=\mu}^{s-1} H_{m+s-j-1/2; r}$ が $Q^+ * v' = v''$ をみたす.

更に, (i), (ii) または (iii) が成り立つなら, $P(D)u = 0$, $v = ru$ の解は $u = E * \tilde{P}v|_{x_n \geq 0}$ で与えられる. ただし, E は $P(D)$ の基本解 $E = \mathcal{F}^{-1}[P(\xi)^{-1}]$ である.

2.7 命題 $P(D)$ は (H) 型とする. 次の (i), (ii), (iii) は同値.

- (i) $v \in \prod_{j=0}^{s-1} C_+^\infty(\mathbb{R}^n)$ が $Q * v = v$ をみたす.
- (ii) $u \in C_+^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ があって $P(D)u = 0$, $v = ru$ をみたす.
- (iii) $v = (v', v'') \in \prod_{j=0}^{s-1} \times \prod_{j=\mu}^{s-1} C_+^\infty(\mathbb{R}^n)$ が $Q^+ * v' = v''$ をみたす.

更に (i), (ii) または (iii) が成り立てば (ii) の解 u は $u = E * \tilde{P}v|_{x_n \geq 0}$ とかける.

$$\text{ここで } C_+^\infty(\mathbb{R}^n) \equiv \{v \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \text{supp } v \subseteq \{x_0 \geq 0\}\}.$$

$$C_+^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}) \equiv \{u|_{\mathbb{R}_+^{n+1}}; u \in C_+^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\}.$$

2.8 境界への帰着. $P(D)$ は (H) 型とし, 条件 (B) のもとで C^∞ 適切に $\mathcal{F}$ を考える. $P(D)u = f \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$,

$$B_j(D)u|_{x_n=0} = g_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad D_0^k u(0, x'') = h_k \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$$

は両方条件をみたすことから、結局、

$$Pu=0, \quad B_j u = g_j \in C_+^\infty(\mathbb{R}^n), \quad u \in C_+^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$$

という問題と同値になる。 $Pu=0$ は $v = \gamma u$ において、命題 2.7 を使うと $Q * v = v$ あるいは $Q^+ * v' = v''$ と同値である。境界条件は

$$\begin{aligned} B_j u|_{x_n=0} &= \sum_{k=0}^{j-1} B_{j,k}(D) \gamma_k u = \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{\ell=0}^{j-1} B_{j,k} Q_{k\ell} * v_\ell \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{\ell=0}^{j-1} B'_{j,k} * Q_{k\ell} * v_\ell \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} B'_{j,k} * v_k = g_j \end{aligned}$$

とかける。こうして、境界上の convolution 系 $B' * v' = g$ に帰着された。

2.9 定理 1.5 の証明. (ii) $\Rightarrow$ (i). 双曲型函数についての補題 (坂本 [8]) により $B' *$ は $C_+^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^M)$ の同型となることがわかる。一意性は、 $g=0 \Rightarrow v'=0 \Rightarrow v''=Q^+ * v' = 0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow u = E * \tilde{P}(v) = 0$ 。存在も同様の順でわかる。(i) $\Rightarrow$ (ii). (i) $\Rightarrow$ (ii) (1) は坂本 [8] による。[$B' * v' = g$ の一意存在から直接に (ii) (1) が云えれば方法論として首尾一貫するのだが、 $B' *$ が微分作用素でないため難しいと思われる。] (i) $\Rightarrow$ (ii) (2). $\tilde{R}_0(-i, 0) = 0$ のとき零解を構成する。Cauchy 問題における Hörmander の構成にならう。 s を複素パラメータ

として, $R(\xi'(s)) \equiv 0$ となる $\xi'(s)$ をうまくとって, $B'(\xi'(s)) \cdot v(s) \equiv 0$ となる非自明解 $v(s)$ で s について整型, 高々多項式の増大度をもち, μ 個の成分のうちひとつは定数となるものを構成する.

$$V(x; s) = \int_{C^+(\xi'(s))} \frac{e^{i(\xi'(s) \cdot x' + \lambda x_n)}}{P^+(\xi'(s), \lambda)} \sum_{j=0}^{\mu-1} L_j^+(\xi'(s), \lambda) \tilde{v}_j(s) \frac{d\lambda}{2\pi i}$$

$$U(x) = \int_{M_1 - i\infty}^{M_1 + i\infty} V(x; s) e^{-s^2} ds \quad (q \text{ は定数})$$

とみると, $U(x) \in C_+^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$, $P(D)U = 0$, $B_j U = 0$ がすぐわかり, 作り方から $U(x) \neq 0$ がわかる. (詳しくは [11]).

Holmgren の定理とその応用については別の機会にゆずる.

参考文献

- [1] R. Agemi and T. Shirota, On necessary and sufficient conditions for L^2 -well posedness of mixed problems for hyperbolic equations, J. Fac. Sc. Hokkaido Univ. 21 (1970) 133-151.
- [2] J. Chazarain and A. Piriou, Caractérisation des problèmes mixtes hyperboliques bien posés, Ann. Inst. Fourier, 22 (1972), 193-237.
- [3] R. Hersh, Boundary conditions for equations of evolution, Arch. Rat. Mech. Anal. 16 (1964), 243-263.
- [4] —, On surface waves with finite and infinite

speed of propagation, Arch. Rat. Mech. Anal 19 (1965)

[5] L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, Springer, 1969.

[6] —, On the characteristic Cauchy problem, Ann. Math. 88 (1968) 341-370

[7] K. Kasahara, On weak well posedness of mixed problems for hyperbolic systems, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 6 (1971) 503-514.

[8] R. Sakamoto, E-well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients, J. Math. Kyoto U. 14 (1974) 93-118.

[9] Y. Shibata, A characterization of the hyperbolic mixed problems in a quarter space for differential operators with constant coefficients (to appear)

[10] 白田 平, 双曲型方程式の混合問題の波の伝播速度について, 数理研講究録 122 (1971)

[11] K. Uchiyama, Caractérisation des problèmes mixtes bien posés pour des opérateurs à coefficients constants, Thèse, (Dr d'Univ. de Nice) (1977)

[12] —, —, I. (to appear in Tokyo J. of Math.)