

Equivariant isotopies of semifree G -manifolds

山口大 理 小宮克弘

[1] G を compact Lie group とする。smooth (即ち, C^∞) G -manifold M から N への smooth G -embedding が存在するとき, それらの G -isotopy class がどれくらいあるかということを考えてみたい。定理とその証明を簡潔にするために, M は closed で, N は boundary をもたず, M, N 上の G -action は semifree であるとする。smooth G -embedding $f: M \rightarrow N$ はその differential df により, fixed point set の normal bundle $\nu(M^G)$, $\nu(N^G)$ の間の G -vector bundle monomorphism を induce する。さらにこれより, 各 fibre 間の G -monomorphism より成る bundle $\mathcal{B} = \text{Mon}^G(\nu(M^G), \nu(N^G))$ の cross section が induce される。このことより 2 つの smooth G -embedding $f, g: M \rightarrow N$ が G -isotopic であるか否かという問題が, それぞれから induce される $\mathcal{B}$ の cross section が homotopic であるか否かという問題

に転換される。後者に対してわれわれは Steenrod [3] の obstruction theory を適用することができる。このようにして obstruction theory によって G -isotopy class を分類することがこの報告の主題である。

この報告では概略を述べるにとどめる。詳しくは [2] を参照されたい。とくに M が G の表現 U 内の単位球面 $S(U)$, N がもう一つの表現 V の場合は [1] を参照されたい。

[2] M から N への smooth G -embedding の G -isotopy set を $\text{Iso}^G(M, N)$ で表わす。 N が connected であっても, その fixed point set N^G は connected であるとは限らない。今, N^G が二つの disjoint な submanifold N_1^G, N_2^G の和であるとする。二つの G -embedding $f_1, f_2 : M \rightarrow N$ が $f_1(M^G) \subset N_1^G, f_2(M^G) \subset N_2^G$ であるとする, 明らかに f_1 と f_2 は G -isotopic ではない。(それどころか G -homotopic にすらなり得ない。) このような f_1 と f_2 は初めから区別して考える方がよい。よってわれわれは $\text{Iso}^G(M, N)$ 全体を考えるのではなく, その部分集合で次のような $\text{Iso}_f^G(M, N)$ について考えることにする。ここに, $\text{Iso}_f^G(M, N)$ は一つの固定され

た smooth G -embedding $f: M \rightarrow N$ に対し, f と G -homotopic な smooth G -embedding の G -isotopy set である。

fixed point $x \in M^G$ に対し, x を含む M^G の連結成分を M_x^G で表わす。 M^G の各連結成分より 1 点ずつを任意にとり出しその全体を $C(M^G)$ で表わす。 このとき, M^G は連結成分の disjoint union $\bigcup_{x \in C(M^G)} M_x^G$ に分割される。 任意の $y \in M_x^G$ に対し, $\Delta(M_x^G)$ の y 上の fibre $\Delta_y(M_x^G)$ から $\Delta(N_{f(x)}^G)$ の $f(y)$ 上の fibre $\Delta_{f(y)}(N_{f(x)}^G)$ への G -monomorphism の全体

$$\bigcup_{y \in M_x^G} \text{Mon}^G(\Delta_y(M_x^G), \Delta_{f(y)}(N_{f(x)}^G))$$

を考える。 これは標準的な方法で M_x^G 上の fibre bundle になる。 これを

$$\text{Mon}_f^G(\Delta(M_x^G), \Delta(N_{f(x)}^G))$$

あるいはもっと簡単に $\mathcal{B}$ で表わす。 このとき $\mathcal{B}$ の cross section と

$$f_x^G = f|_{M_x^G} : M_x^G \rightarrow N_{f(x)}^G$$

を cover する $\Delta(M_x^G)$ から $\Delta(N_{f(x)}^G)$ への G -vector bundle monomorphism とは bijective に対応する。

B の cross section の homotopy set を $\Gamma_f(M_x^G)$ で表す。

G -isotopy class $[g] \in \text{Iso}_f^G(M, N)$ をとる。 g と f が G -homotopic であることより, homotopy

$$H : M_x^G \times [0, 1] \rightarrow N_{f(x)}^G = N_{g(x)}^G$$

で $H_0 = g_x^G$, $H_1 = f_x^G$ なるものが存在する。 H を lift して, G -vector bundle monomorphism の homotopy

$$\tilde{H} : \Delta(M_x^G) \times [0, 1] \rightarrow \Delta(N_{f(x)}^G)$$

で $\tilde{H}_0 = dg$ なるものが得られる。このとき, $\tilde{H}_1$ は f_x^G を cover する。よって, $\tilde{H}_1$ は B の cross section を induce する。それを $\Phi_x(g)$ で表す。対応

$$\Phi : \text{Iso}_f^G(M, N) \rightarrow \prod_{x \in C(M^G)} \Gamma_f(M_x^G)$$

を

$$\Phi([g]) = \prod [\Phi_x(g)]$$

と定める。ただし、これは任意の $x \in C(M^G)$ に対し $N_{f(x)}^G$ が $(\dim M_x^G + 1)$ -connected のとき well-defined である。例えば、 N が G の表現 V の場合、 V は G -contractible であるから Φ が定義される。

この Φ に対し次の定理が得られる:

定理 1. M, N を smooth semifree G -manifold で boundary はないとする。さらに、 $M^G \neq \emptyset$, M , $N^G \neq \emptyset$, N で M は compact であるとする。任意の $x \in C(M^G)$ に対し $N_{f(x)}^G$ が $(\dim M_x^G + 1)$ -connected であるとき,

(1) $\dim M + \max\{\dim M, \dim N^G\} < \dim N + \dim G$ ならば Φ は全射である。

(2) $\dim M + \max\{\dim M, \dim N^G\} + 1 < \dim N + \dim G$,

かつ, 任意の $x \in C(M^G)$ に対し

$$2 \dim M_x^G + 1 < \dim N_{f(x)}^G$$

ならば π は全単射である。

全射であることの証明は具体的に G -embedding を構成することによって, 単射であることの証明は具体的に G -isotopy を構成することによって為される。

注意: 定理 1 において, M, N 上の G -action は semifree で, $M^G \neq \emptyset, M, N^G \neq \emptyset, N$ とした。
このとき normal bundle $\mathcal{L}(M^G), \mathcal{L}(N^G)$ の各 fibre は G の表現で原点を除いてはその action は free である。
このような表現をどんな G でももつとは限らない。

$\dim G = 0$ (即ち, 有限群) のときはかなり多く G が
上のような表現をもつ (Wolf [4]) が, $\dim G > 0$ の
ときは, $S^1, S^3, N_{S^3}(S^1)$ (S^3 における S^1 の
normalizer) の3つしかない。 (したがって定理 1 で考
える G は有限群, $S^1, S^3, N_{S^3}(S^1)$ の場合のみである。

[3] 次に $\Gamma_f(M_x^G)$ について考察しよう。

G の既約実表現で原点を除いてはその action が free であ

るようなもののひとつの complete set を $\{V_j \mid j \in J(G)\}$ とする。各 $j \in J(G)$ に対し

$$F_j = \text{Hom}^G(V_j, V_j)$$

とすると, $F_j =$ 実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$, 又は 4 元数体 $\mathbb{H}$ である。 V_j は, $F_j = \mathbb{C}$ のとき複素表現を, $F_j = \mathbb{H}$ のとき 4 元数表現と実表現とみたものである。

整数 $0 \leq m \leq n$ に対して, F_j 上の n 次元ベクトル空間 nF_j における m -frame (orthonormal とは限らない) の全体より成る Stiefel manifold を $V(m, n; F_j)$ で表す。これは $\text{Hom}^G(mV_j, nV_j)$ と同一視される。

$y \in M_x^G$ に対し

$$\angle_y(M_x^G) \cong \bigoplus_{j \in J(G)} m_{x,j} V_j,$$

$$\angle_{f(y)}(N_{f(x)}^G) \cong \bigoplus_{j \in J(G)} n_{f(x),j} V_j.$$

と分解される。ここに, $m_{x,j}$, $n_{f(x),j}$ は x と j へのみ依存し y には依存せずに決まる非負整数である。

次の定理は容易に得られる:

定理 2. $\angle(M_x^G)$ と $\angle(N_{f(x)}^G)$ がともに product

bundle なら、

$$\Gamma_f(M_x^G) \approx \prod_{j \in J(G)} [M_x^G, V(m_{x,j}, n_{f(x),j}; \mathbb{F}_j)]$$

ここに, $[,]$ は homotopy set.

trivial G -space 上の G -vector bundle $\angle(M_x^G)$, $\angle(N_{f(x)}^G)$ は次のような Whitney sum に分解される:

$$\angle(M_x^G) \cong \bigoplus_{j \in J(G)} (\xi_j \otimes_{\mathbb{F}_j} V_j),$$

$$\angle(N_{f(x)}^G) \cong \bigoplus_{j \in J(G)} (\eta_j \otimes_{\mathbb{F}_j} V_j),$$

ここに, ξ_j, η_j は $\mathbb{F}_j$ 上の $m_{x,j}$ 次元, $n_{f(x),j}$ 次元の vector bundle である. このことより fibre bundle

$$\mathcal{B} = \text{Mon}_f^G(\angle(M_x^G), \angle(N_{f(x)}^G))$$

は次のような Whitney sum に分解されることがわかる:

$$\mathcal{B} \cong \bigoplus_{j \in J(G)} \mathcal{B}_j$$

ここに, B_j の fibre は $V(m_{x,j}, n_{f(x,j)}; \mathbb{F}_j)$ である。

$$d_j = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}_j,$$

$$q_j = d_j (n_{f(x,j)} - m_{x,j} + 1) - 1$$

とし, $B_j(\pi_{q_j})$ を B_j の fibre の q_j -th homotopy group を fibre に持ち B_j に associate した bundle とする (詳しくは Steenrod [3] 30.2 参照)。Steenrod [3] の 37.2 および 37.5 より次の定理が得られる:

定理 3. (1) $m_{x,j} \neq 0$ なる $j \in J(G)$ に対して

$$\dim M_x^G \leq q_j + 1$$

のとき, $\overline{\Gamma}_f(M_x^G)$ から

$$\prod_{j \in J(G)} H^{q_j}(M_x^G; B_j(\pi_{q_j}))$$

への全射が存在する。

(2) $m_{x,j} \neq 0$ なる $j \in J(G)$ に対して

$$\dim M_x^G \leq g_j$$

のとき, $\Gamma_f(M_x^G)$ から

$$\prod_{j \in J(G)} H^{g_j}(M_x^G; \mathcal{B}_j(\pi_{g_j}))$$

への全単射が存在する。

係数の bundle $\mathcal{B}_j(\pi_{g_j})$ は多くの場合に product bundle となる。よってこの場合, 定理 3 において換れ係数の cohomology group $H^{g_j}(M_x^G; \mathcal{B}_j(\pi_{g_j}))$ は

$$\Lambda_j = \pi_{g_j}(V(m_{x,j}, n_{f(x),j}; \mathbb{F}_j))$$

を係数とする通常の cohomology group $H^{g_j}(M_x^G; \Lambda_j)$ で置換えることができる。 $\mathcal{B}_j(\pi_{g_j})$ が product bundle になる場合を次の命題にまとめておく:

命題 4. 次の (i) ~ (iv) の場合は $\mathcal{B}_j(\pi_{g_j})$ は product bundle である:

- (i) G の位数が 2 でない.
- (ii) $\angle(M_x^G)$ と $\angle(N_{f(x)}^G)$ がともに orientable.

- (iii) G の位数が 2 で, $m_{x,j} \geq 2$, さらに,
 $q_j = n_{f(x,j)} - m_{x,j}$ が奇数.
 (iv) M_x^G が単連結.

(i), (ii), (iii) の場合は $B_j(\pi_{q_j})$ の structure group が trivial になることよりわかる. (iv) の場合は $B_j(\pi_{q_j})$ の fibre が discrete であることより明らか.

文 献

- [1] K. Komiya; Equivariant embeddings and isotopies of a sphere in a representation, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [2] K. Komiya; Equivariant isotopies of semifree G -manifolds, to be submitted to Osaka J. Math.
- [3] N. Steenrod; The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.
- [4] J. A. Wolf; Spaces of constant curvature (4-th edition), Publish or Perish Inc, 1977.