

Cherlin Chain の集合論への応用

名大理 安本雅洋

$\mathcal{L}$ を集合論 ZF の言語. $A = (A, E)$ を ZF の model, $\bar{K}$ を新しい述語記号とする. A の部分集合 K に対して $[A, K]$ が $ZF(\bar{K})$ の model になる時 K を A の class と呼ぶ. ただし $ZF(\bar{K})$ は言語 $\mathcal{L}(\bar{K})$ において公理化された ZF 集合論の公理. 即ち, $\bar{K}$ を含む命題に対しても置換公理が成立するものとする.

A の class K が definable であるとは, $\bar{K}$ を含むある命題 $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n)$ と A の元 $a_1, \dots, a_n$ が存在して

$$K = \{x \in A \mid A \models \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\}$$

と表現できることとする. A の definable class の全体を $\text{def}(A)$ で表わし $K \notin \text{def}(A)$ なる class を undefinable class と呼ぶ.

κ を strongly inaccessible cardinal とすると, V_κ は ZF の model となり, V_κ の任意の部分集合は class

である。 $|\text{def}(V_n)| = |V_n| < 2^{|V_n|}$ であるから、 V_n には undefinable class が存在する。 また、 A が可算 model の場合は、forcing method により undefinable class を容易に作ることもできる。 以下において次の定理を証明する。

定理 1. A を ZF の standard model. 即ち、

$A = (A, \in)$ とすると A において undefinable class が存在する。

Remark. A を ZF の model とすると、 $[\text{def}(A), A]$ は集合論 GB (Gödel-Bernays) の model になる。 定理 1 は、 A が standard なことはある $N \models \text{def}(A)$ が存在して、 $[N, A]$ が GB の model になることを意味している。

Cherlin chain.

$\mathcal{L}$ を一階述語論理の言語。 P を $\mathcal{L}$ の structure の class とする。 P が inductive であるとは、 P の任意の列 $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_\alpha \subseteq \dots$ の union が再び P に属することとする。 $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ を $\mathcal{L}$ の命題とする。 P の任意の structures $M \subseteq M'$ と、 M の任意の元 $a_1, \dots, a_n$ に対して、 $M \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow M' \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ が成立する時、 P は P-persistent と呼ばれる。 たとえば existential formula ($\exists x_1 \dots \exists x_m \psi$ で ψ は quantifier free) は P-persistent

になる。 $M \in P$ が P -persistently complete であるとは M の任意の拡大 $M' \in P$ と、任意の P -persistent な命題 $\varphi(a_0, \dots, a_n)$ に対して、 $M' \models \varphi(a_0, \dots, a_n) \Rightarrow M \models \varphi(a_0, \dots, a_n)$ となることとする。 P -persistently complete な structure 全体のなす class を P' で表わす。 structure の列 $P \supseteq P' \supseteq \dots \supseteq P'' \supseteq \dots$ ($P^{n+1} = (P^n)'$) は Cherlin chain と呼ばれている。 P の subclass Q が cofinal with P であるとは、 P の任意の structure に対して、その拡大で Q に属するものが存在することとする。 以下、 P は inductive であると仮定する。

Lemma 1 [Cherlin] 任意の $n < \omega$ に対して、 P^n は inductive で cofinal with P である。

Proof. $n=1$ の場合だけ証明すれば十分である。 まず、 P^1 が cofinal with P であることを証明する。

M を任意の P の元、 $\kappa = \{\text{card}(M), \text{card}(L), \aleph_0\}$ 、 $\{\varphi_\beta \mid \beta < \kappa\}$ を M で定義した P -persistent sentences 全体とする。 P の元の列 $\{M_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ を次のように定義する。 まず $M_0 = M$ とおく。 $\alpha = \beta + 1$ の場合； $M_\beta \models \varphi_\beta$ 又は、 M_β の任意の拡大 $M' \in P$ に対して、 $M' \models \neg \varphi_\beta$ ならば $M_\alpha = M_\beta$ 。 それ以外の場合は M_β のある拡大 $M' \in P$ で、 $M' \models \varphi_\beta$ なるものが存在する。 M_α としてそのような M' の一

をとりとくる。 α が limit ordinal の場合; $M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$ とおく。 P は inductive 故 $M_\alpha \in P$ 。

$M^1 = \bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha$ とおくと、 $\{M_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ の作りより、 M で定義された P -persistent sentences で、 M^1 のある拡大で真になるものは、 M^1 において真になる。この操作を続けると $M \subseteq M^1 \subseteq M^2 \subseteq \dots \subseteq M^\omega \subseteq \dots$ なる P の列で、 M^1 で定義された P -persistent sentences で、 $M^{\omega+1}$ のある拡大で真になるものは、 $M^{\omega+1}$ でも真であるような列が作れる。 $M^\omega = \bigcup_{\alpha < \omega} M^\alpha$ とおくと、 M^ω は P -persistently complete になり、 $M^\omega \in P^1$ 。 $M^\omega \supset M$ であ、たか P^1 は cofinal with P になる。

次に、 P^1 が inductive になることを証明する。それには $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_\alpha \subseteq \dots$ ($\alpha < \lambda$) なる P^1 の列に対して $\bigcup_{\alpha < \lambda} M_\alpha \in P^1$ をいえる。 $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_m)$ を P -persistent な命題、 $a_1, a_2, \dots, a_m \in M_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} M_\alpha$ の元とする。 M_λ のある拡大 $M' \in P$ で

$$M' \models \varphi(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

と可る。ある $\alpha < \lambda$ が存在して、 $a_1, \dots, a_m \in M_\alpha$ 。 $M_\alpha \in P^1$ だか M_α は P -persistently complete。 (したがって

$$M_\alpha \models \varphi(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

φ は P -persistent であ、たか

$$M_\lambda \models \varphi(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

よって M_λ は P -persistently complete となり $M_\lambda \in P'$.

Lemma 2. Σ_{n+1} 命題は P^n -persistent である。

Proof. n に関する induction. φ が P^n -persistent なるは $\exists x \varphi$ も P^n -persistent であり $\rightarrow \varphi$ は P^{n+1} -persistent になる。 Σ_1 命題が P -persistent になることは明らか。 Σ_n 命題が P^{n-1} -persistent になる。 したがって。 全ての Π_n 命題は P -persistent になり。 従って Σ_{n+1} 命題も P^n -persistent になる。

M が M' の Σ_n -elementary substructure になる時。 すなわち。 全ての Σ_n 命題 $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_m)$ と $a_1, a_2, \dots, a_m \in M$ に対して $M \models \varphi(a_1, a_2, \dots, a_m) \Leftrightarrow M' \models \varphi(a_1, a_2, \dots, a_m)$ となる時。 $M \prec_n M'$ と書く。

Lemma 3. 任意の $M, M' \in P^n$ に対して $M \subseteq M'$ ならば $M \prec_n M'$

Proof. Lemma 2 より明らか。

集合 A が κ -complete であるとは。 A の任意の subset B に対して。 $|B| < \kappa$ ならば $\bigcup B \in A$ のことである。

Proposition 1. $A = (A, \in)$ を ZF の standard transitive model とする。 A が $(\text{cf}(A))^A$ -complete ならば。 A の

undefinable class が存在する。

Proof. $\mathcal{L} = (\in, \bar{K})$ を集合論 $ZF(\bar{K})$ の言語、

$$P = \{(a, b) \mid a: \text{transitive}, b \subseteq a, a, b \in A\}.$$

$\lambda = \text{cf}(O_n^A)$ とする。明らかに P は A の inductive class になる、という。 f を λ から O_n^A への cofinal function 可能なもの。 $\text{dom}(f) = \lambda$ で $\bigcup_{\alpha < \lambda} f(\alpha) = O_n^A$ とする。 (a, b) が (a', b') の substructure である時、可能なもの、 $a \subseteq a'$ かつ $b = a \cap b'$ の時 $(a, b) \subseteq (a', b')$ と書くことにする。

各 $\alpha < \lambda$ に対して (a_α, b_α) を定義する。 まず (a_0, b_0) は P から任意にとってくる。 $(a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1})$ は次の条件を満たすようにとる。(1) $(a_\alpha, b_\alpha) \subseteq (a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1})$ (2) $a_\alpha \in a_{\alpha+1}$ (3) $V_{f(\alpha)}^A \cap A = V_{f(\alpha)}^A \subseteq a_{\alpha+1}$ (4) $(a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1}) \in P$, ただし $\alpha+1 = \beta+m$ で β は limit ordinal とする $\beta < \alpha$ なる m 。
 α が limit ordinal である場合は、 $(a_\alpha, b_\alpha) = (\bigcup_{\beta < \alpha} a_\beta, \bigcup_{\beta < \alpha} b_\beta)$ とする。

A が λ -complete であることから、任意の $\alpha < \lambda$ に対して $a_\alpha, b_\alpha \in A$ 。(λ -completeness の条件が使用されているのはこの部分だけであることに注意)

$V_{f(\alpha)}^A \subseteq a_{\alpha+1}$ と f が λ から O_n^A への cofinal function であることにより、 $\bigcup_{\alpha < \lambda} a_\alpha = A$ となる。 $K = \bigcup_{\alpha < \lambda} b_\alpha$ とおく。
この K が A の undefinable class になることを証明する。

いま K が A の class になること. 可能な $[A, K]$ が $ZF(\bar{K})$ の model になることを証明する. $\varphi(v_1, v_2)$ を言語 $\mathcal{L}_A = (\in, \bar{K}, c, \dots)_{c \in A}$ の命題とし. ある $a \in A$ が存在して

$$[A, K] \models \forall x \in a, \exists y \varphi(x, y)$$

と可る. Lemma 3 より 十分大なる n と α をとると $a \in a_{\alpha+n}$

$$(a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \models \forall x \in a \exists y \varphi(x, y).$$

$$(\because (a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \prec_n [A, K])$$

故に任意の $x \in a$ に対してある $y \in a_{\alpha+n}$ が存在して

$$(a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \models \varphi(x, y)$$

再び Lemma 3 より

$$(a_{\alpha+n+1}, b_{\alpha+n+1}) \models \varphi(x, y)$$

$a_{\alpha+n} \in a_{\alpha+n+1}$ かつ

$$(a_{\alpha+n+1}, b_{\alpha+n+1}) \models \forall x \in a, \exists y \in a_{\alpha+n} \varphi(x, y)$$

$$(a_{\alpha+n+1}, b_{\alpha+n+1}) \models \exists z \forall x \in a \exists y \in z \varphi(x, y)$$

Lemma 3 より

$$[A, K] \models \exists z \forall x \in a \exists y \in z \varphi(x, y), \dots (i)$$

したがって, $[A, K]$ が separation を満たすことを証明可

いばよい. $\varphi(v)$ を言語 $\mathcal{L}_A$ の命題 $a \in A$ の元とする.

$$[A, K] \models b = \{x \in a \mid \varphi(x)\}$$

なる $b \in A$ を見つければよい.

Lemma 3 より十分大きい n と d が存在して, $a \in a_{d+n}$ で

$$(*) \quad [A, K] \models \varphi(x) \quad \text{iff} \quad (a_{d+n}, b_{d+n}) \models \varphi(x).$$

一方, A が ZF の model で " $(a_{d+n}, b_{d+n}) \models \varphi(x)$ " は, ZF の命題 $\psi(a_{d+n}, b_{d+n}, x)$ として表現可能であることからある $b \in A$ が存在して

$$A \models b = \{x \in a \mid (a_{d+n}, b_{d+n}) \models \varphi(x)\}$$

故に $(*)$ より

$$[A, K] \models b = \{x \in a \mid \varphi(x)\} \dots \dots \dots (ii)$$

(i) と (ii) より $[A, K]$ において replacement scheme が成立することが証明された。他の ZF($\bar{K}$) の公理は, 集合に属するもの ($\bar{K}$ を含むもの) であるから $[A, K]$ で成立するのは明らかである。

次に K が A で undefinable であることを証明する。もしそうでなくなると, ある $\bar{K}$ を含む命題 $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_m)$ と A の元 $c_1, \dots, c_m$ が存在して,

$$[A, K] \models K = \{x \mid \varphi(x, c_1, \dots, c_m)\}.$$

Lemma 3 より十分大きい n と d に対して

$$(a_{d+n}, b_{d+n}) \models b_{d+n} = \{x \mid \varphi(x, c_1, \dots, c_m)\}.$$

$d \notin a_{d+n}$ をとって $A \models \varphi(d, c_1, \dots, c_m)$ と仮定する。

($A \models \neg \varphi(d)$ の時も以下と同様にできる。) P の定義より,

$d \in a'$, $d \notin b'$, $\underbrace{(a', b') \in P}_{(a_{d+n}, b_{d+n}) \models}$ なる (a', b') が存在する。

P^n が cofinal with P であることが示された。ある $(a, b) \in P^n$ が存在して $(a', b') \subseteq (a, b)$ 。 $a \in a'$, $a \notin b'$, $b' = a' \cap b$ であり $a \notin b$ 。 一方 $A \models \varphi(a)$ であり $(a, b) \in P^n$ であり $(a, b) \models \varphi(a)$ 故に

$$(a, b) \models b \neq \{x \mid \varphi(x)\}$$

lemma 3 より $(a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \models b_{\alpha+n} \neq \{x \mid \varphi(x)\}$

$$[A, K] \models K \neq \{x \mid \varphi(x)\}$$

これは矛盾である。従って K が undefinable であることが証明された。

Corollary. A を ZF の standard transitive model とする。 $V_\alpha^A \models ZF$ ならば V_α^A は A において undefinable class をもつ。

Proof. V_α^A は A の中で $\text{cf}(\alpha)$ -complete である。

M が M' の elementary submodel の時 $M \prec M'$ と書くことができる。

Lemma 4. A を ZF の standard transitive model と $\text{cf}(O_m^A) > \omega$ とする。 $\{\alpha \in O_m^A \mid V_\alpha^A \prec A\}$ は closed, unbounded in O_m^A になる。

Proof. $P = \{V_\alpha^A \mid \alpha \in O_m^A\}$ とすると P は A の inductive

class になる。 P^* が cofinal with P であるから。

$\{\alpha \in O_n^A \mid V_\alpha^A \in P^*\}$ は unbounded in O_n^A である。

$V_\alpha^A \in P^*$ なるは。 $V_\alpha^A \prec_n A$ である。 $\{\alpha \in O_n^A \mid V_\alpha^A \prec_n A\}$ も unbounded in O_n^A 。 closed であることは明らか。 $\text{cf}(O_n^A) > \omega$

と $\{\alpha \in O_n^A \mid V_\alpha^A \prec A\} = \bigcap_{n < \omega} \{\alpha \in O_n^A \mid V_\alpha^A \prec_n A\}$ より。

lemma が証明される。

集合 X が ordinal definable であるとは ZF の命題

$\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n)$ と 順序数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ によつて

$X = \{x \mid \varphi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)\}$ と表現されることをいう。 すべての

ordinal definable sets の class を OD で表す。

OD は 整列可能 ($\cong O_m$) で、この順序を $<_O$ で表す。

再び L を一階述語論理の言語、 $\mathcal{P}$ を L の structures の class とする。 $\mathcal{P}$ が次の条件を満足する時 OD-inductive であるという。

1) $\mathcal{P} \subseteq OD$

2) $\mathcal{P}$ 自身が ordinal definable である。 すなわち、ある $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n)$ と 順序数 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ が存在して $X = \{x \mid \varphi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)\}$ 。

3) $\{M_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \in OD$ なる $\mathcal{P}$ の任意の列 $M_0 \in \mathcal{P}, \dots, M_k \in \mathcal{P}$ ($\alpha < \kappa$) に対して $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha \in \mathcal{P}$ 。

この時 lemma 1 と同様、次の lemma が成立する。

Lemma 5. P を OD-inductive とする。各 $n < \omega$ に対して P^n は OD-inductive で cofinal with P である。

Proof. $n=1$ の場合のみ証明すれば十分である。証明は lemma 1 とほぼ同じである。 $M \in P$, $\kappa = \max\{\text{card}(M), \text{card}(\mathcal{L}), \aleph_0\}$, $\langle \varphi_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ を言語 $\mathcal{L}_M = \mathcal{L} \cup \{\bar{c} \mid c \in M\}$ の命題で P -persistent なものの全体を整列させたものとする。 $M \in OD$ である。 $\langle \varphi_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in OD$ なるようにとれる。

$M_0 = M$ とおき、 P の structures の列 $\langle M_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in OD$ を次のように定義する。 $\alpha = \beta + 1$ の場合; $M_\beta \models \varphi_\beta$ 又は M_β のすべての拡大 $M' \in P$ に対して $M' \not\models \varphi_\beta$ ならば、 $M_\alpha = M_\beta$ 。 そうでない時は、 M_β の拡大 $M' \in P$ で $M' \models \varphi_\beta$ なるものが存在する。 $\langle \varphi_\alpha \rangle$ に関して最小になる M' をとって $M_\alpha = M'$ とする。 α が limit ordinal の時は、 $M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$ 。 P が OD-inductive であることから、 $M_\alpha \in P$ ($\alpha < \kappa$) となる。 ($\because \langle M_\beta \mid \beta < \alpha \rangle \in OD$) $M' = \bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha$ とおくと $M' \in P$ 。 この操作を繰り返して $M \subseteq M' \subseteq M^2 \subseteq \dots$ とし $M^\omega = \bigcup_{i < \omega} M^i$ とすると lemma 1 と同じようにして $M^\omega \in P'$ がわかる。 $M \subseteq M^\omega$ であるから P' は cofinal with P になる。 P' が OD-inductive になることは lemma 1 と全く同じ証明で得られる。

$B = (B, \in)$ を ZF の *standard transitive model* とする。
 $P(B) \equiv \{ (V_\alpha^B, d) \mid d \subseteq V_\alpha^B, d \in OD^B \}$ とおく。
 $P(B)$ は B にあつて 言語 $L = (\in, \bar{\in})$ の *structures* の class になる。 $P(B)$ が *OD-inductive* になることは定義より明らか。

$C \subseteq P(B)$ が perfect chain であるとは

- (1) 任意の $(V_\alpha^B, d), (V_\beta^B, d') \in C$ に対して、
 $(V_\alpha^B, d) \subseteq (V_\beta^B, d')$ 又は $(V_\alpha^B, d) \supseteq (V_\beta^B, d')$ 。
- (2) 任意の $n < \omega$ と 任意の $(V_\alpha^B, d) \in C$ に対して ある
 $(V_\beta^B, d') \in C \cap P^n(B)$ が存在して
 $(V_\alpha^B, d) \subseteq (V_\beta^B, d')$ 。
- (3) $\bigcup \{ V_\alpha^B \mid (V_\alpha^B, d) \in C \} = B$ 。

Proposition 1 の証明より $P(B)$ に perfect chain が存在する。 B に undefinable class をつくることができる。

[定理 1 の証明]

Proposition 1 より、 $cf(Ord^A) = \lambda > \omega$ の時のみ証明可能である。(任意の ZF-model は 有限和に対して、閉じてゐるから ω -complete である) lemma 4 より、単調増加関数 $F: \lambda \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \{ \alpha \in Ord^A \mid V_\alpha^A \prec A \}$ が存在する。

Proposition 1 の証明と Corollary より、 $V_{F(\omega)}^A$ の perfect chain が A の中に存在する。その中で $<_{OD}^A$ に関して最小のものをとる。同様にして $V_{F(\omega)}^A$ の perfect chain を拡大したもので $V_{F(\omega+1)}^A$ の perfect chain とする $<_{OD}^A$ 最小のものをとる。もし α が limit ordinal の時は $V_{F(\beta)}^A$ ($\beta < \alpha$) の perfect chains の和をとると、これは $V_{F(\alpha)}^A$ の perfect chain である。このような perfect chain の列は、いつでも A の中で、ordinal definable であるから、この操作を A の中で続けることが可能である。したがって、 $\alpha < \lambda$ なるすべての α に対して perfect chains をつくと、この和が A の perfect chains になる、という。

References

- [1] Bell, J. L. and Slomson A. B.
Models and Ultraproducts. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1969.
- [2] Cherlin, G.
A New Approach to the Theory of Infinitely Generic Structures. Yale University. 1971.
- [3] Cherlin, G.
Model Theoretic Algebra, Lecture Note in

Mathematics 521.

[4] Gaifman, H.

Two Results Concerning Extension of Models
of Set Theory. Notices, Amer. Math. Soc. 15
1968 P947.

[5] Hirschfeld, J. and Wheeler, W. H.

Forcing, Arithmetic, Division Ring.
Lecture Note in Mathematics 454

[6] Keisler, H. J.

Model Theory for Infinitary Logic
Amsterdam, North-Holland Publishing Company 1971.

[7] Mostowski, A.

A Remark on Models of the Gödel Bernays
Axioms for Set Theory.

[8] Takeuti, G. Zaring, W. M.

Axiomatic Set Theory
Springer-Verlag New York 1973.