

半単純対称空間上の離散系列表現の存在条件

東大 理 大島利雄 (Toshio Oshima)

鳥取大教養 松本敏彦 (Toshihiko Matsuki)

§1 で $(\mathfrak{g}, K)$ -加群 B_λ を定義し, §2 で半単純対称空間上の離散系列表現の K -有限ベクトルの空間が B_λ で表わされることを述べ, §3 で定理 2.3 の逆(ある条件を満たす λ について $B_\lambda \neq \{0\}$) を典型的な例について示す。

§1. ある $(\mathfrak{g}, K)$ -加群 B_λ の定義

$\mathfrak{g}$ を複素半単純リー環とし, θ を $\mathfrak{g}$ の複素線形な involution (すなわち $\theta \circ \theta = \text{identity}$), $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を θ に関する $\mathfrak{g}$ の $+1, -1$ 固有空間分解とする。 α を $\mathfrak{k}$ の半単純元からなる可換な複素部分空間とする。 $\alpha \in \alpha^*$ (α 上の複素線型形式の空間) に対して,

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \mid [Y, X] = \alpha(Y)X, \forall Y \in \alpha \},$$

$$m_\alpha = \dim \mathfrak{g}^\alpha, \quad m_\alpha^+ = \dim (\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{k})$$

とおき,

$$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}; \sigma) = \{ \alpha \in \sigma^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\} \}$$

とおく。このとき,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma \cup \{0\}} \mathfrak{g}^\alpha$$

(注) ある種の σ (§2 参照) に対して, $\Sigma(\mathfrak{g}; \sigma)$ はルート系の公理系を満たし, そのとき $\Sigma(\mathfrak{g}; \sigma)$ は組 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ に関するルート系と呼ばれる。

$Y_0 \in \sigma$ を $\alpha(Y_0) \in \mathbb{R}^+$, $\forall \alpha \in \Sigma$ となるように 1 つ定め,

$$\Sigma^+ = \{ \alpha \in \Sigma \mid \alpha(Y_0) > 0 \},$$

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha, \quad \rho_t = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha^+ \alpha,$$

$$\pi = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathcal{P} = \mathfrak{g}^0 \oplus \pi,$$

$\kappa = \mathfrak{g}^0$ における Killing form に関する
 σ の直交補空間

とおく。

G を $\mathfrak{g}$ をリー環に持つ連結リー群とし, K, M, A, N, P をそれぞれ $\mathfrak{k}, \mathfrak{m}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}, \mathcal{P}$ に対する G の解析的部分群とする。

$$\mathcal{L} = \{ \lambda \in \sigma^* \mid P/MN (\simeq A/A \cap M \simeq (\mathbb{C}^\times)^{\dim A})$$

のある正則指標 $\tilde{\lambda}$ があって $\tilde{\lambda}(\exp Y) = e^{\langle \rho - \lambda, Y \rangle}$,
 $\forall Y \in \sigma \} \quad (\simeq \mathbb{Z}^{\dim A}),$

$C = C(\Sigma^+) = \{\lambda \in \sigma^* \mid \operatorname{Re} \langle \lambda, \alpha \rangle > 0, \forall \alpha \in \Sigma^+\}$
 とおく。 $\lambda \in \mathcal{L}$ に対して $L_{\tilde{\lambda}}$ を P の正則指標 $\tilde{\lambda}$ に随伴した
 G/P 上の line bundle とし, $\mathcal{O}_{\text{alg}}(L_{\tilde{\lambda}})$ を $L_{\tilde{\lambda}}$ の algebraic
 sections のなす層とする。

定義 $B_{\lambda} = B_{\Sigma^+, \lambda} = H_V^n(G/P; \mathcal{O}_{\text{alg}}(L_{\tilde{\lambda}}))$ と
 おく。ここで $V = KP/P$ はコンパクトであり, $n = \operatorname{codim} V$ 。
 左からの $\mathfrak{g}$ と K の作用により B_{λ} は $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の構造を持
 つ。

定理 1.1 P' を $K \cap P$ に含まれる K の任意の放物型部分
 群とし, $\bar{\pi}_p = \mathfrak{p} \cap \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ 上の symmetric algebra $S(\bar{\pi}_p)$
 の $\operatorname{Ad}(MA \cap P')$ -既約分解を $S(\bar{\pi}_p) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} S_j$ とする。 $\lambda \in$
 $\mathcal{L} \cap \bar{C}$ のとき, 任意の $\tau \in \hat{K}$ に対して

$$[B_{\lambda} : \tau] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_i (-1)^i [H^i(K/P'; S_j \otimes \mathbb{C}_{-\mu_{\lambda}}) : \tau]$$

ここで, $\mu_{\lambda} = \lambda + \rho - 2\rho_t$, $\mathbb{C}_{-\mu_{\lambda}}$ は P' の指標で $m(\exp Y)n$
 $\mapsto e^{-\mu_{\lambda}(Y)}$ ($m \in P' \cap M$, $Y \in \sigma$, $n \in P' \cap N$) で定義され
 る。 S_j も P' の表現として $P' \cap N$ 上自明に拡張しておく。

(注) Borel-Weil-Bott の定理により, 各 $H^i(K/P';$
 $S_j \otimes \mathbb{C}_{-\mu_{\lambda}})$ は既約または $\{0\}$ である。また, 各 j に対
 して, 高々 1 つの i を除いて $H^i(K/P'; S_j \otimes \mathbb{C}_{-\mu_{\lambda}}) = \{0\}$ で

ある。

定理1.1 は [B] の vanishing theorem を用いて容易に得られるが, B_λ は Zuckerman functor ([V1], Chapter 6) を用いても定義されることが知られており, [V1] Theorem 6.3.12 (p.357) 及び "vanishing theorem ([V2])" によっても得られる。

§2. 半単純対称空間 G_R/H_R 上の離散系列表現

σ を θ と可換な $\mathfrak{g}$ の複素線形 involution とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ を σ に関する $\mathfrak{g}$ の $+1, -1$ 固有空間分解とする。 $\mathfrak{g}_R$ を $\mathfrak{g}$ の real form で " $\theta|_{\mathfrak{g}_R}$ が $\mathfrak{g}_R$ の Cartan involution になるもの" とし, $\mathfrak{k}_R = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_R$, $\mathfrak{a}_R = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_R$, G_R, K_R, H_R, H をそれぞれ $\mathfrak{g}_R, \mathfrak{k}_R, \mathfrak{a}_R, \mathfrak{a}$ に対する G の解析的部分群とする。 $L^2(G_R/H_R)$ の閉部分空間に実現できる G_R の既約ユニタリ表現を, 半単純対称空間 G_R/H_R 上の離散系列表現 (D.S.) と呼ぶ。

定理2.1 ([F-J], [OM]) G_R/H_R 上の D.S. が存在 $\Leftrightarrow$

$$(2.1) \quad \text{rank}(G_R/H_R) = \text{rank}(K_R/K_R \cap H_R)$$

以下, 条件(2.1) を仮定する。 σ_R を $K_R \cap \mathfrak{g}$ の極大可換部分空間とすると, (2.1) により $\sigma = (\sigma_R)_\mathbb{C}$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間になる。この σ に対して, §1 で定義した $B_\lambda = B_{\Sigma^+, \lambda}$ を考える。 $\mathcal{L}' = \{\lambda \in \mathcal{L} \mid \tilde{\lambda}|_{A \cap H} = 1\}$ とおく。

定理2.2 ([OM] + α) G_R/H_R 上の任意の D.S. に対して, $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}; \sigma)$ のある正のルート系 Σ^+ と $\lambda \in \mathcal{L}' \cap \mathcal{C}(\Sigma^+)$ が存在して, その D.S. の k -有限ベクトルの空間は, $B_{\Sigma^+, \lambda}$ と $(\mathfrak{g}, k)$ -同型になる。($B_{\Sigma^+, \lambda}$ の既約性については [V3] で示されている。)

定理2.3 ([M]) $\lambda \in \mathcal{L}' \cap \overline{\mathcal{C}(\Sigma^+)}$ に対して, $B_{\Sigma^+, \lambda} \neq \{0\}$
 $\Rightarrow$

(2.2) 次の (i) (ii) を満たす任意の Σ^+ のルートの列 $\beta_1, \dots, \beta_k$ に対して, $\langle \mu_\lambda, \beta_k \rangle \geq 0$ 。

(i) β_i は $\{\alpha \in \Sigma^+ \mid \langle \alpha, \beta_1 \rangle = \dots = \langle \alpha, \beta_{i-1} \rangle = 0\}$ の simple root ($\forall i = 1, \dots, k$)。

(ii) $N_i = \sum_{\alpha \in \beta_i + \mathbb{Z}\beta_1 + \dots + \mathbb{Z}\beta_{i-1}} (2m_\alpha^+ - m_\alpha)$ とおくと, $N_i < m_{\beta_i}$ ($i = 1, \dots, k-1$), $N_k = m_{\beta_k}$ 。

§3. 定理2.3の逆についての例

$G = SO(n, \mathbb{C})$ とする。 $SL(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{C})$ についても同様のことができるが, 本稿では $SO(n, \mathbb{C})$ についてだけ述べる。 $n = p + 2r + g + 2s$ とし,

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_{g+2s} \end{pmatrix} \mid A \in SO(p+2r, \mathbb{C}) \right\},$$

$$K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} E_{p+2r} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid B \in SO(g+2s, \mathbb{C}) \right\},$$

$$K = K_1 K_2 \cong K_1 \times K_2,$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ -t_X & 0 \end{pmatrix} \mid X \text{ は } (p+2r) \times (g+2s) \text{ 複素行列} \right\}$$

とおく。 $Y(h_1, \dots, h_{n'}) \in G$ ($n' = p' + r + g' + s$, $p' = [\frac{p}{2}]$, $g' = [\frac{g}{2}]$) を

$$Y(h_1, \dots, h_{n'}) = \begin{pmatrix} Y'(h_1, \dots, h_r, h_{r+s+1}, \dots, h_{r+s+p'}) & 0 \\ 0 & Y'(h_{r+1}, \dots, h_{r+s}, h_{r+s+p'+1}, \dots, h_{n'}) \end{pmatrix}$$

で定義する。ただし, $SO(m, \mathbb{C})$ において $m' = [\frac{m}{2}]$ とおくとき,

$$Y'(h_1, \dots, h_m) = \begin{pmatrix} 0 & & & h_1 \\ & h_m & & \\ & -h_m & & \\ -h_1 & & 0 & \end{pmatrix} \quad (m: \text{even}) \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 0 & & & h_1 \\ & h_m & & \\ & 0 & & \\ -h_1 & & 0 & \end{pmatrix} \quad (m: \text{odd})$$

とする。

$$\tilde{\alpha} = \{ \Upsilon(h_1, \dots, h_{n'}) \mid h_1, \dots, h_{n'} \in \mathbb{C} \},$$

$$\alpha = \{ \Upsilon(h_1, \dots, h_{r+s}, 0, \dots, 0) \mid h_1, \dots, h_{r+s} \in \mathbb{C} \},$$

$$\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha} \cap \kappa_i, \quad \alpha_i = \alpha \cap \kappa_i \quad (i=1, 2)$$

とおく。 $e_i \in \tilde{\alpha}^*$ を $\langle e_i, \Upsilon(h_1, \dots, h_{n'}) \rangle = \sqrt{-1} h_i$ で定義し、 $\bar{e}_i = e_i|_{\alpha}$ とすると、 $p+q > 0$ のとき

$$\Sigma = \Sigma(q; \alpha) = \{ \pm \bar{e}_i \mid i=1, \dots, r+s \} \\ \cup \{ \pm \bar{e}_i \pm \bar{e}_j \mid i \neq j \}$$

である。次のような Σ の正のルート系 Σ^+ を取る。

$$\Sigma^+ = \{ \bar{e}_i \mid i=1, \dots, r+s \} \cup \{ \bar{e}_i + \bar{e}_j \mid i \neq j \} \\ \cup \{ \bar{e}_i - \bar{e}_j \mid 1 \leq i < j \leq r \} \\ \cup \{ \bar{e}_i - \bar{e}_j \mid r+1 \leq i < j \leq r+s \} \\ \cup \{ \bar{e}_i - \bar{e}_j \mid 1 \leq i \leq r, j(i)+1 \leq j \leq r+s \} \\ \cup \{ \bar{e}_j - \bar{e}_i \mid 1 \leq i \leq r, r+1 \leq j \leq j(i) \}$$

ただし $r \leq j(1) \leq j(2) \leq \dots \leq j(r) \leq r+s$ 。このとき、

$$\bar{n}_p = \bigoplus_{i=1}^{r+s} (q^{-\bar{e}_i} \cap p) \oplus \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{j=r+1}^{r+s} q^{-(\bar{e}_i + \bar{e}_j)} \\ \oplus \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{j=j(i)+1}^{r+s} q^{\bar{e}_j - \bar{e}_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{j=r+1}^{j(i)} q^{\bar{e}_i - \bar{e}_j}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes \square_{\mathfrak{g}} \oplus \bigoplus_{j=r+1}^{r+s} \square_{\mathfrak{p}} \boxtimes \mathbb{C}_{-e_j} \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes V \\
&\quad \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes U_i \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}_{e_i} \boxtimes U'_i \\
&= \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes (\square_{\mathfrak{g}} \oplus V \oplus U_i) \oplus \square_{\mathfrak{p}} \boxtimes V \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}_{e_i} \boxtimes U'_i
\end{aligned}$$

ここで, $\square_{\mathfrak{p}}, \square_{\mathfrak{g}}$ はそれぞれ $M_1 = M \cap K_1 \simeq SO(p, \mathbb{C})$, $M_2 = M \cap K_2 \simeq SO(s, \mathbb{C})$ の standard 表現, $V = \mathbb{C}_{-e_{r+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{-e_{r+s}}$, $U_i = \mathbb{C}_{e_{j(i)+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{e_{r+s}}$, $U'_i = \mathbb{C}_{-e_{r+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{-e_{j(i)}}$ であり, $\tau_1 \boxtimes \tau_2$ (τ_i は $M_i A_i$ の表現) は, τ_1 の表現空間 $\otimes$ τ_2 の表現空間の上への $MA \simeq M_1 A_1 \times M_2 A_2$ の自然な表現である。

$$\mu_\lambda = \sum_{i=1}^{r+s} \mu_\lambda^i \bar{e}_i \text{ と表すと, 条件 } \lambda \in \mathcal{L} \cap \bar{\mathcal{C}} \text{ と (2.2)}$$

により

$$(3.1) \quad \mu_\lambda^i \in \mathbb{Z}, \quad \mu_\lambda^1 \geq \cdots \geq \mu_\lambda^r, \quad \mu_\lambda^{r+1} \geq \cdots \geq \mu_\lambda^{r+s}$$

$$(3.2) \quad \mu_\lambda^r \geq 0 \quad \text{または} \quad \mu_\lambda^{r+s} \geq 0$$

が得られる。必要に応じて K_1 と K_2 の役割を入れかえることにより,

$$(3.2)' \quad \mu_\lambda^{r+s} \geq 0$$

と仮定してよい。 r_0 ($0 \leq r_0 \leq r$) を $\mu_\lambda^{r_0} \geq 0$ となる最大の数とする。このとき, k_j ($j = 1, \dots, s$) を次のように

帰納的に定義する。

$$k_j = \max \{ k \in \mathbb{Z} \mid j'(k) < r+j, k \neq k_1, \dots, k_{j-1} \}$$

$$\text{ただし, } j'(k) = \begin{cases} j(k) & (k > r_0) \\ r & (k \leq r_0) \end{cases}.$$

$$\mu^i = \begin{cases} \mu_\lambda^i & (i > r_0) \\ 0 & (i \leq r_0) \end{cases} \text{とおき, } \mu_\lambda^{r+1} + \mu^{k_1}, \dots,$$

$\mu_\lambda^{r+s} + \mu^{k_s}$ を大きい順に並べたものを $\delta_1, \dots, \delta_s$ とする。

補題 3.1 条件 $\lambda \in \mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{C}}$, (3.1), (3.2)' の下で,

$$(2.2) \iff$$

$$(3.3) \quad \#\{k \in \mathbb{Z} \mid r_0+1 \leq k \leq r, k \neq k_1, \dots, k_s\} \leq q$$

補題 3.2 $\tau = \tau_1 \boxtimes \tau_2 \in \widehat{K} \simeq \widehat{K}_1 \times \widehat{K}_2$ の highest

weight $v_\tau = \sum_{i=1}^{r+s} v_\tau^i e_i$ が次の2つの条件

$$(3.4) \quad v_\tau^1 = \mu_\lambda^1, \dots, v_\tau^{r_0} = \mu_\lambda^{r_0}, v_\tau^{r_0+1} = \dots = v_\tau^r = 0$$

$$(3.5) \quad v_\tau^{r+1} + \dots + v_\tau^{r+s} \leq \delta_1 + \dots + \delta_s$$

を満たすとき,

$$(3.6) \quad [B_\lambda : \tau] = \sum_I (-1)^I [H^I(K_2/K_2 \cap P'; D \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|a_2}) : \tau_2]$$

ここで,

$$D = \bigoplus_{\substack{l_{r_0+1}, \dots, \\ l_r = 0}}^{\infty} \left| \begin{array}{ccc} (\square \oplus U_{r_0+1})^{n_{r_0+1}} & (\square \oplus U_{r_0+2})^{n_{r_0+2}+1} & \dots (\square \oplus U_r)^{n_{r+r-r_0-1}} \\ (\square \oplus U_{r_0+1})^{n_{r_0+1}-1} & (\square \oplus U_{r_0+2})^{n_{r_0+2}} & \dots (\square \oplus U_r)^{n_{r+r-r_0-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\square \oplus U_{r_0+1})^{n_{r_0+1}-r+r_0+1} & (\square \oplus U_{r_0+2})^{n_{r_0+2}-r+r_0+2} & \dots (\square \oplus U_r)^{n_r} \end{array} \right|$$

$$\otimes U'_{r_0+1}{}^{l_{r_0+1}} \otimes \dots \otimes U'_r{}^{l_r}$$

$$(n_i = -\mu_{\lambda}^i + l_i)$$

$U^m = U^{\otimes m}$ は U の m 次対称テンソル積を表わし (特に $m < 0$ のとき $U^m = \{0\}$),

$$\left| \begin{array}{ccc} V_{11} & \dots & V_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{m1} & \dots & V_{mm} \end{array} \right| = \bigoplus_{\substack{\sigma \in S_m \\ \text{sgn } \sigma = 1}} V_{1\sigma(1)} \otimes \dots \otimes V_{m\sigma(m)} \\ \ominus \bigoplus_{\substack{\sigma \in S_m \\ \text{sgn } \sigma = -1}} V_{1\sigma(1)} \otimes \dots \otimes V_{m\sigma(m)}$$

証明の方針 (i) K_1 について Borel-Weil-Bott の定理を適用するとき, 条件 (3.4) により K_1 の Weyl 群 $W(\tilde{\alpha}_1)$ の元のうち $e_1, \dots, e_{r_0}$ を fix するもののみを考えればよいことが示される。

(ii) さらに条件 (3.5) により,

(3.7) $W(\tilde{\alpha}_1)$ の元のうち $e_{r_0+1}, \dots, e_{r+p'}$ の permutation のみを考えればよく,

$$\text{また } S' = S \left(\bigoplus_{i=r_0+1}^r \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes (\square \oplus U_i) \oplus \bigoplus_{i=r_0+1}^r \mathbb{C}_{e_i} \boxtimes U_i' \right) \subset$$

$S(\bar{\pi}_p)$ とおくとき,

$$(3.8) \quad [B_\lambda : \tau] = \sum_I (-1)^I [H^I(K/P'; S' \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda}) : \tau]$$

が示される。(3.7) と (3.8) により (3.6) が得られる。

以上によって, 次の補題が証明されれば, この例について定理2.3の逆が成り立つことがわかる。

補題3.3 条件(3.3)の下で, $\delta \in \hat{K}_2$ であって, δ の highest weight v_δ が $v_\delta|_{\alpha_2} = \delta_1 e_{r+1} + \dots + \delta_s e_{r+s}$ を満たし,

$$\sum_I (-1)^I [H^I(K_2/K_2 \cap P'; D \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|_{\alpha_2}}) : \delta] = 1$$

となるものが存在する。($\langle v_\delta, e_{r+s+p+1} \rangle, \dots, \langle v_\delta, e_n \rangle$ を最小に取れば, $\tau, \boxtimes \delta$ が B_λ の “lowest K -type” であると思われる。)

$j(r_0+1) = \dots = j(r) \geq r_0+s$ の場合には, 次のようにして補題3.3が証明される。

$$j(r_0+1) = \dots = j(r) = r+s_0 \text{ とおき, } r_1 = r - r_0,$$

$s_1 = s - s_0$, $s_2 = r_1 - s_1$ とおくと, $s_2 \geq 0$ であり,

$$k_1 = \dots = k_{s_0} = r_0,$$

$$k_{s_0+1} = r, k_{s_0+2} = r-1, \dots, k_s = r - s_1 + 1,$$

$$D = \bigoplus_{\substack{\infty \\ l_{r_0+1}, \dots, \\ l_r = 0}} \left| \begin{array}{cccc} \square_U^{n_{r_0+1}} & \square_U^{n_{r_0+2}+1} & \dots & \square_U^{n_{r+r_1-1}} \\ \square_U^{n_{r_0+1}-1} & \square_U^{n_{r_0+2}} & \dots & \square_U^{n_{r+r_1-2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \square_U^{n_{r_0+1}-r_1+1} & \square_U^{n_{r_0+2}-r_1+2} & \dots & \square_U^{n_r} \end{array} \right| \otimes \bigotimes_{i=r_0+1}^r U'^{l_i}$$

ただし, $n_i = -\mu_\lambda^i + l_i$, $\square_U = \square \oplus U$, $U = \mathbb{C} e_{r+s_0+1} \oplus$

$\dots \oplus \mathbb{C} e_{r+s}$, $U' = \mathbb{C} -e_{r+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C} -e_{r+s_0}$.

$\delta_1 = \mu_\lambda^{r+1}$, $\dots$, $\delta_{s_0} = \mu_\lambda^{r+s_0}$ であるから,

$$[H^*(K_2/K_2 \cap P'); D \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda | \sigma_2}) : \delta]$$

$$= [H^*(K_2/K_2 \cap P'); D_0 \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda | \sigma_2}) : \delta]$$

となる。ここで D_0 は D における $l_{r_0+1} = \dots = l_r = 0$ の直和成分。

V_1, V_2 がベクトル空間であって $\dim V_2 = 1$ のとき,

$$(V_1 \oplus V_2)^m = V_1^m \oplus (V_1 \oplus V_2)^{m-1} \otimes V_2$$

であることを用いて, 標準的な行列式の計算により,

$$D_0 = \begin{vmatrix} \square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1+s_2-1}} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1+s_2}} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^r+r_1-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-s_2+1} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1}} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}+1} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^r+s_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\square \oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-s_2} & \cdots & (\square \oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1-1}} & \cdots & (\square \oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}} & \cdots & (\square \oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^r+s_1-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\square \oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-r_1+1} & \cdots & (\square \oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1-s_1}} & \cdots & (\square \oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}-s_1+1} & \cdots & (\square \oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^r} \end{vmatrix}$$

が得られる。ただし, $U_{(i)} = \mathbb{C} e_{r+s-i+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} e_{r+s}$.

さらに,

$$(\mu_\lambda^{r_0+1} + \cdots + \mu_\lambda^{r+s}) - (\delta_1 + \cdots + \delta_s) = -\mu_\lambda^{r-s_1+1} - \cdots - \mu_\lambda^r$$

であるから,

$$\begin{aligned} & [H^*(K_2/K_2 \cap P'; D_0 \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda/\sigma_2}) : \delta] \\ &= [H^*(K_2/K_2 \cap P'; D_1 \otimes D_2 \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda/\sigma_2}) : \delta] \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} \square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1+s_2-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-s_2+1} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1}} \end{vmatrix} \\ D_2 &= \begin{vmatrix} U_{(1)}^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}} & \cdots & U_{(1)}^{-\mu_\lambda^r+s_1-1} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{(s_1)}^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}-s_1+1} & \cdots & U_{(s_1)}^{-\mu_\lambda^r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}} & \cdots & U^{-\mu_\lambda^r+s_1-1} \\ \vdots & & \vdots \\ U^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}-s_1+1} & \cdots & U^{-\mu_\lambda^r} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

条件(3.3)により $s_2 \leq 2$ であり, このとき [I], p. 137, 定理 5.5 により D_1 は $GL(2, \mathbb{C})$ の既約表現を与える。 D_1 を $M_2 \simeq SO(2, \mathbb{C})$ の表現に分解したときに現われる最小の M_2 の既約表現 δ_0 を取って,

$$\delta = \delta_1 e_{r+1} + \cdots + \delta_s e_{r+s} + \nu_{\delta_0}$$

(ν_{δ_0} は δ_0 の highest weight) とおく。 $\mu = \mu_1 e_{r+s_0+1} + \cdots + \mu_s e_{r+s}$ ($\mu_i \in \mathbb{Z}$) を highest weight とする $GL(s_1, \mathbb{C})$ の既約表現を $\tau(\mu) = \tau(\mu_1, \dots, \mu_s)$ で表わすとき,

$$\begin{aligned} & \sum_I (-1)^I [H^I(K_2/K_2 \cap P'; D_1 \otimes D_2 \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda | \sigma_2}) : \delta] \\ &= \tau(\mu_\lambda^{r+s_0+1}, \dots, \mu_\lambda^{r+s}) \otimes \tau(\mu_\lambda^{r-s_1+1}, \dots, \mu_\lambda^r) \text{ における } \tau(\delta_{s_0+1}, \dots, \delta_s) \text{ の multiplicity} \end{aligned}$$

が成り立つ。この右辺が 1 になることが, Weyl の指標公式を用いて容易に示される。

(注) 一般の $r \leq j(1) \leq \cdots \leq j(r) \leq r+s$ についても, 同様にして, ある “Weyl の指標公式の一般化” を用いて補題 3.3 が証明できる。

References

- [B] F. Bien, Spherical D-modules and representations of reductive Lie groups, Ph.D.dissertation, M.I.T., Cambridge, Massachusetts, 1986
- [F-J] M. Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, Ann. of Math. 111(1980), 253-311.

- [M] T. Matsuki, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces II, to appear in Advanced Studies in Pure Math.
- [OM] T. Oshima and T. Matsuki, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces, Advanced Studies in Pure Math. 4(1984), 331-390.
- [V1] D. Vogan, Representations of Real reductive Lie Groups, Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart (1981)
- [V2] D. Vogan, Unitarizability of certain series of representations, Ann. of Math. 120(1984), 141-187
- [V3] D. Vogan, Irreducibility of discrete series representations for semisimple symmetric spaces, to appear in Advanced Studies in Pure Math.
- [I] 岩堀長慶, 対称群と一般線型群の表現論 (岩波講座基礎数学), 岩波書店 1978