

四次元複体の $K\tilde{S}O$ 一群について

東京工大 理学部 笹尾 靖也

四次元複体 X に対して, X 上の *stable orientable vector bundle* 全体のつくるアーベル群を $K\tilde{S}O(X)$ とかくとき, 集合として, $K\tilde{S}O(X)$ が $H^2(X, \mathbb{Z}_2) \times H^4(X, \mathbb{Z})$ と 1 対 1 に対応していることは, すでに Dold-Whitney により知られていた。(Ann of Math., 69, (1959)).

そこで本稿では, その群構造を考察することが目標である。結論的にいえば, きちんとした特徴づけはできないながらも, 一応の結果は得られるようである。詳細は近いうちに発表される予定の次の論文を御覧いただきたいと思います。

S. Sasao & I. Ando

 $K\tilde{S}O(X)$ for 4-dimensional complex X

以下に才法の大略と得られる結果のいくつかを紹介したいと思います。 X_3 で X の 3-skeleton を表わすとき, 次の精密系列が基本的です。(Puppe の系列)

/

$$\widehat{KSO}(EX_3) \xrightarrow{j^*} \widehat{KSO}(X/X_3) \xrightarrow{p^*} \widehat{KSO}(X) \xrightarrow{i^*} \widehat{KSO}(X_3) \rightarrow 0$$

ここで i^* の onto なことは $\pi_3(BSO) = 0$ によるものです。

$W_2: \widehat{KSO}(X_3) \rightarrow H^2(X_3, \mathbb{Z}_2) \cong H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ を各バンドルに, その中 2 種 δ -W class を対応させる対応としますと, W_2 が同型対応になっていることは Steenrod などにより知られています。従って我々は $\widehat{KSO}(X_3)$ を $H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ でおきかえてよいわけです。又 $X/X_3 = \bigvee_i S_i^4$ ですから, $\widehat{KSO}(X/X_3)$ は自由アーベル群で, 各バンドルは δ 1 種 ポントリヤーギン類で特徴づけできます。したがって j^* を決定すれば $\widehat{KSO}(X)$ はその構造が, かなり, わかります。

他 EX_3 上のバンドルの δ 1 種 ポントリヤーギン類は $H^4(EX_3, \mathbb{Z})$ と一致することがわかります。次の図式が可換 (符号無視) であることを注意すれば, 我々は j^* を定めることができます。

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{KSO}(EX_3) & \xrightarrow{P_1} & H^4(EX_3, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{E} & H^2(X_3, \mathbb{Z}) \\ \downarrow j^* & & & & \downarrow \delta \end{array}$$

$$\widehat{KSO}(X/X_3) \xrightarrow{P_1} H^4(X/X_3, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^2(X, X_3; \mathbb{Z})$$

注意: P_1 は各バンドルに δ の中 1 種 ポントリヤーギン類を対応させる対応で, 準同型対応である。

先の系列で, i^* を W_2 でおきかえて考えます。今 γ_1 と γ_2 を $\widehat{KSO}(X)$ の元で $W_2(\gamma_1) = W_2(\gamma_2)$ であるとします。

すると $\widetilde{KSO}(X/X_3)$ の元 ξ が存在して $P^*(\xi) = \gamma_1 - \gamma_2$ となります。 $P_1(\xi)$ は 2 で割り切れますから $\frac{1}{2}P_1(\xi)$ は $H^1(X/X_3, \mathbb{Z})$ の元で、この元の $H^1(X, \mathbb{Z})$ における像を $d(\gamma_1, \gamma_2)$ と定めます。 $d(\gamma_1, \gamma_2)$ が γ_1, γ_2 のとりかたに依存しないで *unique* になることは容易です。たとえば $d(\gamma_1, \gamma_2)$ は次のような性質をもっています。

$$(I) \quad d(\gamma_1, \gamma_2) = 0 \iff \gamma_1 = \gamma_2$$

$$(II) \quad \gamma_1 \text{ に対して, } H^1(X, \mathbb{Z}) \text{ の元 } \alpha \text{ を与えると, } \gamma_2 \text{ が存在して, } d(\gamma_1, \gamma_2) = \alpha$$

$$(III) \quad 2d(\gamma_1, \gamma_2) = P_1(\gamma_1) - P_2(\gamma_2)$$

$$(IV) \quad d(\gamma_1, \gamma_2) + d(\gamma_2, \gamma_3) = d(\gamma_1, \gamma_3)$$

$$(V) \quad n d(\gamma_1, \gamma_2) = d(n\gamma_1, n\gamma_2)$$

$$(VI) \quad d(\gamma_1, \gamma_2)_2 = W_4(\gamma_1) - W_4(\gamma_2)$$

以上の準備を基本として、 $H^1(X, \mathbb{Z})$, $H^4(X, \mathbb{Z}_2)$, $H^3(X, \mathbb{Z}_2)$ 及び $S_q^2: H^2(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ を調べて $\widetilde{KSO}(X)$ の群構造を決定することが出来ます。例えば次のような結果が得られます。

$$(1) \quad S_q^2: H^2(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_2) \text{ が trivial なら}$$

$$\widetilde{KSO}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z}_2) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$$

$$(2) \quad X = E \amalg Y \text{ なら}$$

$$\widetilde{KSO}(E \amalg Y) \cong H^1(X, \mathbb{Z}_2) \oplus H^3(Y, \mathbb{Z})$$

(2) X : triangulable, connected,

closed 4-dim topological manifold.

$\beta_2^2 : H^2(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_2)$ が non-trivial

もし X が orientable なら

$$K\tilde{S}O(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}_2$$

もし X が non-orientable なら

$$K\tilde{S}O(X) \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}_2$$

ここで $r = \dim H^2(X, \mathbb{Z}_2) - 1$.

(3) よく知られた結果

$$K\tilde{S}O(RP^4) \cong \mathbb{Z}_4, \quad K\tilde{S}O(CP^2) \cong \mathbb{Z},$$

$$K\tilde{S}O(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

以上で本稿の説明を終わりますが、続く問題として考えられることを少し述べます。いわゆる K -理論でいえば、 $K\tilde{S}O(X) = K\tilde{S}O^0(X)$ ですから、更に $K\tilde{S}O^*(X)$ を決定する問題もあると思います。従って環構造や種々の作用素の決定なども興味あると思われます。他方たとえば X を単連結にすると $K\tilde{S}O^*(X) \cong KO^*(X)$ ですから、 X が代数的に特徴づけられていることを考えて、 $KO^*(X)$ が、ある種の代数系から代数的にきまる様子がおわかりになれば面白いと思います。猶本稿で X の次元を 4 次元とし、したがって 4 次元複体までなら $K\tilde{S}O$ を計算できるとおもいます。

おわり