

付随式を用いる1階述語論理の証明図作成方法

名古屋大学 大芝 猛

永田周郎

所橋 栄

本稿では与えられた論理式 A に対し、冠頭標準形変形を至由せずに妥当性検証を行い(手続きCHK), その検証が肯定的に終了したとよに得られる情報を *guide* として, 論理式 A のLK証明図を下から上へ決定論的に手もどりなく書き上げる(アルゴリズムPAL)方法を述べる.

(0) そのために先づ, 任意のLK論理式 A (冠頭でなくてよい) に対し, A の *quantifier* に以下のように *guide index form* $(x_i), [f_j(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})]$ を付してうる A の付随式 $\tilde{A}(x_1, \dots, x_n)$ (adjoint formula) を用意する.

① A の *negative* $\forall$ と *positive* $\exists$ 全体が左から $2, x_1, \dots, 2_n x_n$ であるとき, これらに (x_i) を付し $2, x_1, \dots, 2_n x_n$ とする. (但し x_i は証明図作成時に *term* を代入すべき表示変数である.) また更に A の *positive* $\forall$ と *negative* $\exists$ 全体が左から $R, y_1, \dots, R, y_2$

であるとき, $[f_j(\cdot)]$ とし $R_{[f_1(\cdot)]} y_1, \dots, R_{[f_l(\cdot)]} y_l$ としこの図式を A' とする. (f_j は A に在り関数記号 (スコーラム関数)).

② A' の各 $R_{[f_j(\cdot)]} y_j$ に対し「 $R_{[f_j(\cdot)]} y_j$ を scope に含むような $\lambda_i x_i$ の全体が $A' = \dots \lambda_{i_1} x_{i_1} (\dots \lambda_{i_k} x_{i_k} (\dots R_{[f_j(\cdot)]} y_j (\dots) \dots) \dots) \dots$ と indicate されるならば 表示変数の列 $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ を f_j の argument に埋めて $R_{[f_j(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})]} y_j$ とする」これをすべての $j = 1, \dots, l$ について行って得られる図式を $\tilde{A} \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ と書き, A の付随式という.

$\lambda_1 x_1$ (negative $\forall$) $\lambda_2 x_2$ (positive $\exists$)

EXAMPLE: $A = \forall y_1 (\neg \forall x_1 ((\exists y_2 p(x_1, y_2)) \vee p(x_1, y_1)) \vee \exists x_2 p(y_1, x_2))$

において, $R_{[f_1(\cdot)]} y_1$ (positive $\forall$) $R_{[f_2(\cdot)]} y_2$ (negative $\exists$)

$A' = \forall y_1 (\neg \forall x_1 ((\exists y_2 p(x_1, y_2)) \vee p(x_1, y_1)) \vee \exists x_2 p(y_1, x_2))$

従って $\tilde{A} \langle x_1, x_2 \rangle = \forall y_1 (\neg \forall x_1 ((\exists y_2 p(x_1, y_2)) \vee p(x_1, y_1)) \vee \exists x_2 p(y_1, x_2))$

以下論理式 A を任意に 1 つ固定し関連する定義を述べる.

1° (def.) A -formula (論理式 A の証明図作成の途上現われる pseudo-formula) $H(\tilde{A})$ を $\tilde{A} \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ の関数記号と定数記号(なければ 1 つ追加) から得られる term の全体とする.

(0) $\tau_i \in H(\tilde{A})$ のとき $\tilde{A} \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ は A -formula. (1) $B * C$ が A -formula のとき, B と C も A -formula (但し $*$ は $\vee, \wedge, \supset$ を表わす). (2) $\neg B$ が A -formula のとき, B も A -formula. (3) $\lambda x B(x)$ が A -formula のとき $B(\tau)$ も A -formula. (4) $R_{[F]} y C(y)$ が A -formula のとき, $C(F)$ も A -formula.

2° (def) sb-operation: B が $\tilde{A}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ または A -formula のとき, $sb(B) \stackrel{\text{def}}{=} B$ 内の $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}_i x_i (\dots x_i \dots) \text{ を } \lambda (\dots x_i \dots) \left(\frac{x_i}{\tau_i} \right) \\ \mathcal{R}_j y_j (\dots y_j \dots) \text{ を } \lambda (\dots y_j \dots) \left(\frac{y_j}{F_j} \right) \end{array} \right\}$ とみなしてうる quantifier free の論理式.

(EXAMPLE: $sb(\exists y_2 p(f_1, y_2)) = \exists p(f_1, f_2(f_1))$, 前例で, $[f_2(f_1)]$
 $sb(\tilde{A}\langle x_1, x_2 \rangle) = \exists (p(x_1, f_2(x_1)) \vee p(x_1, f_1)) \vee p(f_1, x_2)$)

3° (def) cl-operation: $cl(B) = B$ 内の $\mathcal{Q}_i x_i$ を $\mathcal{Q}_i x_i$ に, $\mathcal{R}_j y_j$ を $\mathcal{R}_j y_j$ に戻してうる LK-formula.

(EXAMPLE: 前例につき $cl(\tilde{A}\langle x_1, x_2 \rangle) = A$, $cl(\exists y_2 p(f_1, y_2)) = \exists y_2 p(f_1, y_2)$, また $cl(\tilde{A}\langle f_1, f_2(f_1) \rangle) = A$.)

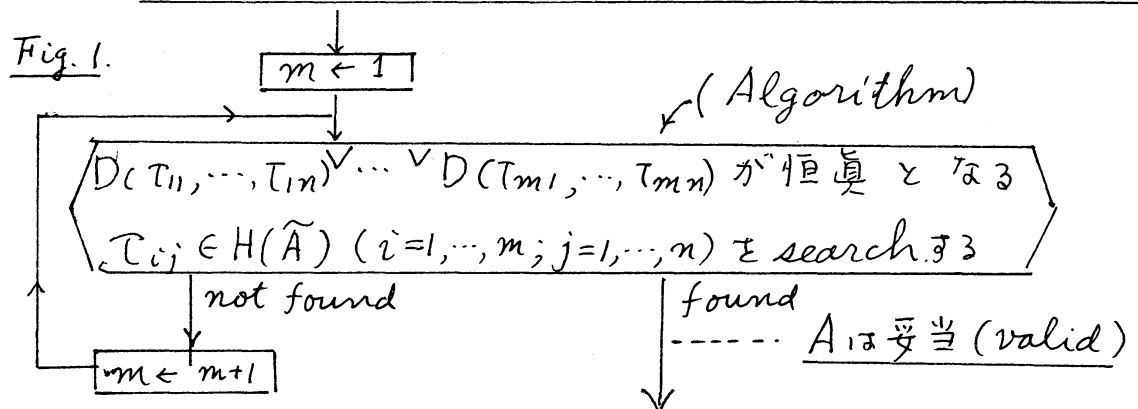
Herbrand の定理 は次の形で表現される:

$\vdash_{LK} A \Leftrightarrow \bigoplus_{m \geq 1} \bigoplus \tau_{ij} \in H(\tilde{A})$:

$sb \tilde{A}\langle \tau_{11}, \dots, \tau_{1n} \rangle \vee \dots \vee sb \tilde{A}\langle \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn} \rangle$ が恒真

(I) 妥当性検証 step (CHK-procedure) (P. 9. 例参照)

$\rightarrow$ A の付随式 $\tilde{A}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ を求め $sb \tilde{A}\langle x_1, \dots, x_n \rangle = D(x_1, \dots, x_n)$ と置く



得る根情報 $\tau_{11}, \dots, \tau_{ij}, \dots, \tau_{mn}$ をもって証明作成 stepへ

(II) LK-proof 作成 step (アルゴリズム PAL)

(phase 1) pseudo-proof の作成: 前 step の肯定時に得られる τ_{ij} から, end sequent $G_0 = \rightarrow \tilde{A}\langle T_{11}, \dots, T_{1n} \rangle, \dots, \tilde{A}\langle T_{m1}, \dots, T_{mn} \rangle$ をつくり,

これに US-operation (上式決定操作) を逐次ほどこしてこの sequent を上へ積み上げ tree 型の pseudo-proof $\rho_1 = \text{US}[\rightarrow \tilde{A}\langle T_{11}, \dots, T_{1n} \rangle, \dots, \tilde{A}\langle T_{m1}, \dots, T_{mn} \rangle]$ を作る. US-operation

は下式 $\Pi \rightarrow \Delta$ に対し 2 つ以下の上式 $\left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 \rightarrow \Delta_1 \\ \text{or} \\ \Pi_1 \rightarrow \Delta_1; \Pi_2 \rightarrow \Delta_2 \\ \text{or} \\ \text{undefined} \end{array} \right\}$ を決定する

操作で, 詳細は P. 6 ~ 12 に記載されるが, 各段階で下式 $\Pi \rightarrow \Delta$ 内の guide-index (τ)'s, [F]'s と調べることにより, どの formula をどのように分解し上式を作るかが一意に決定される.

(phase 2) Index clear step: phase 1 で求めた pseudo-proof ρ_1 内の不要となった guide-index を α -operation で消去すれば, $\rightarrow A_1, \dots, A_m$ に到る LK*-proof: $\rho_2 = \alpha(\rho_1) = \alpha(\text{US}[\rightarrow \tilde{A}\langle T_{11}, \dots, T_{1n} \rangle, \dots, \tilde{A}\langle T_{m1}, \dots, T_{mn} \rangle])$ をうる. 但し LK* では LK の $\forall_{\text{right}}, \exists_{\text{left}}$ における eigen-variable の代りに Skolem term $f_j(\tau_1, \dots, \tau_k)$ が用いられることが LK と異なる.

(phase 3) eigen variable adjustment (α -operation)

phase 2 で得た $\rightarrow A_1, \dots, A_m$ に到る LK*-proof ρ_2 内の各 formula 内の maximal Skolem term $f_j(\tau_1, \dots, \tau_k)$ を自由変数 $\alpha_{f_j(\tau_1, \dots, \tau_k)}$ でおきかえる操作により, $\rightarrow A_1, \dots, A_m$ に到る LK-

proof $P = \alpha(P_2) = \alpha(\text{cl}(\text{US}[\rightarrow \tilde{A}\langle T_{11}, \dots, T_{1n} \rangle, \dots, \tilde{A}\langle T_{m1}, \dots, T_{mn} \rangle])$ を得る。従って construction により $\rightarrow A$ に到る (cut-free な) LK-proof をうる。(但し, ある formula B 内の Skolem term $f_j(\tau_1, \dots, \tau_k)$ は $f_j(\tau_1, \dots, \tau_k)$ を真に含む他の $f_d(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ term が B 内にないとき, B で maximal であるという。)

上記証明図作成手続の妥当性は次の定理の形で述べられる。

[[Theorem]] 仮定 " $\text{sb} \tilde{A}\langle T_{11}, \dots, T_{1n} \rangle \vee \dots \vee \text{sb} \tilde{A}\langle T_{m1}, \dots, T_{mn} \rangle$ が恒真" の下で, $P = \alpha(\text{cl}(\text{US}[\rightarrow \tilde{A}\langle T_{11}, \dots, T_{1n} \rangle, \dots, \tilde{A}\langle T_{m1}, \dots, T_{mn} \rangle]))$ は $\rightarrow A_1, \dots, A_m$ に到る LK-proof である。

(証明) の概要: $\mathcal{G}_0 = \rightarrow \tilde{A}\langle T_{11}, \dots, T_{1n} \rangle, \dots, \tilde{A}\langle T_{m1}, \dots, T_{mn} \rangle$ に対し US-operation を逐次適用して pseudo-proof P_1 を作るとき各段階で得られる sequent $\Pi \rightarrow \Delta$ につき, $\Pi \rightarrow \Delta$ に論理記号が残っているかぎり次の上式 $US(\Pi \rightarrow \Delta)$ が定義され,

- ① 各上式 $\Pi_1 \rightarrow \Delta_1$ (or $\Pi_2 \rightarrow \Delta_2$) の記号は下式 $\Pi \rightarrow \Delta$ より減小;
- ② $\frac{\alpha \text{cl}(US(\Pi \rightarrow \Delta))}{\alpha \text{cl}(\Pi \rightarrow \Delta)}$ は LK-deduction となる。
- ③ $\frac{\text{sb}(US(\Pi \rightarrow \Delta))}{\text{sb}(\Pi \rightarrow \Delta)}$ は quantifier-free な LK deduction で下式 から上式へ向って恒真性が保存

される。(但し, sequent $B_1, \dots, B_m \rightarrow C_1, \dots, C_n$ が恒真であるとは $\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m \vee C_1 \vee \dots \vee C_n$ が恒真であることとある。)。しからば ①より, $P_1 = \text{US}[\mathcal{G}_0]$ の最上部の sequent は 原始論理式の列 $P_1, \dots, P_p \rightarrow Q_1, \dots, Q_q$ なる形であり, しかも仮定と

③より, $P_i = Q_j$ (for some i, j) とする (何故ならば, $sb(\mathcal{P}_1)$ の最下式 $\rightarrow sb \tilde{A} \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle, \dots, sb \tilde{A} \langle \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn} \rangle$ は仮定より 恒真であり, ③に従えば 最上部の式 $sb(P_1, \dots, P_p \rightarrow Q_1, \dots, Q_q)$ 即ち $P_1, \dots, P_p \rightarrow Q_1, \dots, Q_q$ も恒真となる. 即ち $\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_m \vee Q_1 \vee \dots \vee Q_n$ が恒真故, 直ちに $P_i = Q_j$ (for some i, j) を導く. 従つて (i) $\alpha(\mathcal{d}(\mathcal{P}_1))$ の最上式である所の $\alpha \mathcal{d}(P_1, \dots, P_p \rightarrow Q_1, \dots, Q_q)$ 即ち $P_1, \dots, P_m \rightarrow Q_1, \dots, Q_n$ は公理 $P_i \rightarrow P_i$ ($P_i = Q_j$) から導かれる, (ii) $\alpha(\mathcal{d}(\mathcal{P}_1))$ の各段階 $\frac{\alpha \mathcal{d}(US(\Pi \rightarrow \Delta))}{\alpha \mathcal{d}(\Pi \rightarrow \Delta)}$ は ②より LK-deduction であり, (iii) $\alpha(\mathcal{d}(\mathcal{P}_1))$ は最下式 $\rightarrow A, \dots, A$ に到る. 従つて $\alpha(\mathcal{d}(\mathcal{P}_1))$ は目的の LK-proof を導くことがわかる.

US-operation と定義するに當つて term, sequent の degree を定義する. : f_j を Skolem 関数 g を A に始めからある関数記号とするとき.

$$(i) \deg(f_j(\tau_1, \dots, \tau_n)) = \omega \cdot \lg(f_j(\tau_1, \dots, \tau_n)) + j,$$

$$(ii) \deg(g(\tau_1, \dots, \tau_n)) = \omega \cdot \lg(g(\tau_1, \dots, \tau_n)) \quad \text{とする. 但し}$$

$$\lg(h(\tau_1, \dots, \tau_n)) = \lg(\tau_1) + \dots + \lg(\tau_n) + 1, \quad \lg(c) = 1 \quad \text{とする.}$$

$$\text{また } \deg(\Pi \rightarrow \Delta) = \min \{ \deg(F) \mid \mathcal{R}_y[F] \text{ in } \Pi \rightarrow \Delta \}; (\Pi \rightarrow \Delta \text{ が } \wedge \text{ かつ } \wedge \text{ の } \mathcal{R}_y[F] \text{ form を持つとき}) \\ = 0 \quad (\text{その他})$$

[US-operation の定義]

Case 0. Π または Δ が同じ formula をもつとき:

$$0.1. \quad \underline{US(\Gamma \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_0, D, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k \rightarrow \Delta},$$

$$\text{if } \Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma_0, D, \Gamma_1, D, \dots, D, \Gamma_k \rightarrow \Delta \quad (k \geq 2, D \notin \Gamma_i)$$

$$0.2 \quad \underline{US(\Gamma \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \rightarrow \Delta_0, D, \Delta_1, \dots, \Delta_l},$$

$$\text{if } \Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma \rightarrow \Delta_0, D, \Delta_1, D, \dots, D, \Delta_l \quad \left(\begin{array}{l} \Gamma_i \text{ is the same formula as } \Gamma, \\ l \geq 2, D \notin \Delta_i \end{array} \right)$$

Case 1. Case 0 is not. Γ, Δ are $B \vee C, B \wedge C, B \supset C, \neg B$ or "not"

is also the case. Then the leftmost one is D.

$$1.1.1. \quad \Gamma \ni D = B \vee C: \quad \underline{US(\Gamma \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_1, B, \Gamma_2 \rightarrow \Delta; \Gamma_1, C, \Gamma_2 \rightarrow \Delta},$$

$$\text{if } \Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma_1, B \vee C, \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

$$1.1.2. \quad \Gamma \ni D = B \wedge C: \quad \underline{US(\Gamma \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_1, B, C, \Gamma_2 \rightarrow \Delta},$$

$$\text{if } \Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma_1, B \wedge C, \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

$$1.1.3. \quad \Gamma \ni D = B \supset C: \quad \underline{US(\Gamma \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow B, \Delta; \Gamma_1, C, \Gamma_2 \rightarrow \Delta},$$

$$\text{if } \Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma_1, B \supset C, \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

$$1.1.4. \quad \Gamma \ni D = \neg B: \quad \underline{US(\Gamma \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow B, \Delta},$$

$$\text{if } \Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma_1, \neg B, \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

$$1.2.1. \quad \Delta \ni D = B \vee C: \quad \underline{US(\Gamma \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \rightarrow \Delta_1, B, C, \Delta_2},$$

$$\text{if } \Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma \rightarrow \Delta_1, B \vee C, \Delta_2.$$

$$1.2.2. \quad \Delta \ni D = B \wedge C: \quad \underline{US(\Gamma \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \rightarrow \Delta_1, B, \Delta_2; \Gamma \rightarrow \Delta_1, C, \Delta_2},$$

$$\text{if } \Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma \rightarrow \Delta_1, B \wedge C, \Delta_2.$$

$$1.2.3. \quad \Delta \ni D = B \supset C: \quad \underline{US(\Gamma \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} B, \Gamma \rightarrow \Delta_1, C, \Delta_2},$$

$$\text{if } \Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma \rightarrow \Delta_1, B \supset C, \Delta_2.$$

$$1.2.4. \quad \Delta \ni D = \neg B: \quad \underline{US(\Gamma \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} B, \Gamma \rightarrow \Delta_1, \Delta_2},$$

$$\text{if } \Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma \rightarrow \Delta_1, \neg B, \Delta_2.$$

Case 2: Case 0, Case 1 ではないとき. 即ち Π が同じ formula をもたず Δ も同じ formula をもたず. Π, Δ が $B \vee C, B \wedge C, B \supset C, \neg B$ なる Π_2 の formula をもたないとき.

2.1. $\deg(\Pi \rightarrow \Delta) > 0$: (このとき $\Pi \rightarrow \Delta$ は $\mathcal{R}_y[F]$ form をもつ).

2.1.1. $\Pi \rightarrow \Delta$ が $\deg(\tau) < \deg(\Pi \rightarrow \Delta)$ なる $\mathcal{Q}_{x(\tau)} B(x)$ をもつとき:

D をかゝる $\mathcal{Q}_{x(\tau)} B(x)$ の最も左のものとする.

2.1.1.1. $\Pi \ni D = \forall_{x(\tau)} B(x)$ のとき: $US(\Pi \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_1, B(\tau), \Pi_2 \rightarrow \Delta,$
 if $\Pi \rightarrow \Delta = \Pi_1, \forall_{x(\tau)} B(x), \Pi_2 \rightarrow \Delta.$

2.1.1.2. $\Delta \ni D = \exists_{x(\tau)} B(x)$ のとき: $US(\Pi \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi \rightarrow \Delta_1, B(\tau), \Delta_2,$
 if $\Pi \rightarrow \Delta = \Pi \rightarrow \Delta_1, \exists_{x(\tau)} B(x), \Delta_2$

2.1.2. $\Pi \rightarrow \Delta$ が $\deg(\tau) < \deg(\Pi \rightarrow \Delta)$ なる $\mathcal{Q}_{x(\tau)} B(x)$ をもたないとき:

このとき, $\deg(\Pi \rightarrow \Delta) = \deg(F)$ なる $\mathcal{R}_y[F]$ form は $\Pi \rightarrow \Delta$ 内のある 1 つの formula に $\mathcal{R}_y B(y)$ と (対頭) 現われる. これから
 のうち最も左のものを $D = \mathcal{R}_y B_1(y)$ とする.

2.1.2.1. $\Pi \ni D = \exists_{y[F]} B_1(y)$ のとき: Π 内の $\exists_{y[F]} B_i(y)$ を列挙し.

$US(\Pi \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_0, B_1(F), \Pi_1, B_2(F), \dots, B_k(F), \Pi_k \rightarrow \Delta,$

if $\Pi \rightarrow \Delta = \Pi_0, \exists_{y[F]} B_1(y), \Pi_1, \exists_{y[F]} B_2(y), \dots, \exists_{y[F]} B_k(y), \Pi_k \rightarrow \Delta.$

($\circledast_2$ のとき $\mathcal{d}(B_1(F)) = \dots = \mathcal{d}(B_k(F))$ が示される.)

2.1.2.2. $\Delta \ni D = \forall_{y[F]} B_1(y)$ のとき: Δ 内の $\forall_{y[F]} B_i(y)$ を列挙し.

$US(\Pi \rightarrow \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi \rightarrow \Delta_0, B_1(F), \Delta_1, B_2(F), \dots, B_k(F), \Delta_k,$

if $\Pi \rightarrow \Delta = \Pi \rightarrow \Delta_0, \forall_{y[F]} B_1(y), \Delta_1, \forall_{y[F]} B_2(y), \dots, \forall_{y[F]} B_k(y), \Delta_k.$

2.2. $\deg(\Pi \rightarrow \Delta) = 0$ のとき: ($\Pi \rightarrow \Delta$ は $\mathcal{R}_{[F]}$ form ともなる.)

2.2.1. $\Pi \rightarrow \Delta$ が $\mathcal{Q}_{(\tau)} x B(x)$ とも $\neg$ とき: 最も左のものに D とする.

2.2.1.1. $\Pi \ni D = \forall x_{(\tau)} B(x)$ のとき: 2.1.1.1 と同様に定義する.

2.2.1.2. $\Delta \ni D = \exists x_{(\tau)} B(x)$ のとき: 2.1.1.2 と同様に定義する.

2.1.2. $\Pi \rightarrow \Delta$ が $\mathcal{Q}_{(\tau)} x B(x)$ form ともなるとき: (このとき

$\Pi \rightarrow \Delta$ は原始論理式の Δ となる) $US(\Pi \rightarrow \Delta)$ は定義しない.

[註]①. $\mathcal{G}_0 = \rightarrow \tilde{A} \langle T_{11}, \dots, T_{1n} \rangle, \dots, \tilde{A} \langle T_{m1}, \dots, T_{mn} \rangle$ に US -operation を適用する

とき. 2.1.1.1. $\Pi \ni D = \mathcal{Q}_{(\tau)} x B(x)$ の case 2. $D = \exists x_{(\tau)} B(x)$ とは決まらな.

2.1.1.2. 2.1.2.1. 2.1.2.2 も記述した case のみ起る.

[註]②. $d(US(\Pi \rightarrow \Delta)) = \frac{d\Gamma_0, dB_1(F), d\Gamma_1, dB_2(F), \dots, dB_k(F), d\Gamma_k \rightarrow d\Delta}{\text{contractions Exchanges}} \frac{d\Gamma_0, d\Gamma_1, \dots, d\Gamma_k \rightarrow d\Delta}{\exists^* \text{left. (LK*)}}$

$\frac{\exists y d\Gamma_0, d\Gamma_1, \dots, d\Gamma_k \rightarrow d\Delta}{\text{weakenings Exchanges}} \frac{d\Gamma_0, d\exists y B_1(y), d\Gamma_1, d\exists y B_2(y), \dots, d\exists y B_k(y), d\Gamma_k \rightarrow d\Delta}{\text{Exchanges}} \frac{d\Gamma_0, d\exists y B_1(y), d\Gamma_1, d\exists y B_2(y), \dots, d\exists y B_k(y), d\Gamma_k \rightarrow d\Delta}{d(\Pi \rightarrow \Delta)}$

& adjust する. see $\rightarrow$ A Method for Obtaining Proof Figures of Valid Formulas in the First Order Predicate Calculus. Comm. Math. Univ. St. Pauli by T. Oshiba. P. 49-61. Vol. 30. No. 1. 1981

EXAMPLE $A = \forall y_1 (\neg \forall x_1 ((\exists y_2 P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, y_1)) \vee \exists x_2 P(y_1, x_2))$

(0) A の付随式 $\tilde{A} \langle x_1, x_2 \rangle = \forall y_1 (\neg \forall x_1 ((\exists y_2 P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, y_1)) \vee \exists x_2 P(y_1, x_2))$

を f_1 として, $\text{ab } \tilde{A} \langle x_1, x_2 \rangle = \neg (P(x_1, f_2(x_1)) \vee P(x_1, f_1)) \vee P(f_1, x_2) \in D(x_1, x_2)$ とおく.

(I) $D(T_{11}, T_{12}) \vee \dots \vee D(T_{m1}, T_{m2})$ が恒真となる $m \geq 1$ と $T_{ij} \in H(\tilde{A})$ を探す.

肯定的に " $m=2$, $D(f_1, f_2(f_1)) \vee D(f_1, f_1)$ が恒真" とみつける.

(実際 $(\neg (P(f_1, f_2(f_1)) \vee P(f_1, f_1)) \vee P(f_1, f_2(f_1))) \vee (\neg (P(f_1, f_2(f_1)) \vee P(f_1, f_1)) \vee P(f_1, f_1))$ は $\neg (P_0 \vee P_1) \vee P_0 \vee (\neg (P_0 \vee P_1) \vee P_1)$ 故恒真)

(II) $\varepsilon = \neg \mathcal{G}_0 = \rightarrow \tilde{A} \langle f_1, f_2(f_1) \rangle, \tilde{A} \langle f_1, f_1 \rangle$ を最下式とし

((phase 1)) $\mathcal{G}_0$ に US -operation を適用し, pseudo-proof $P_1 = US[\mathcal{G}_0] \in \mathcal{F}$ 3.

