

## 実 Grothendieck 群における $M$ -TF 同値

浅井 聡太 (東京大学数理科学研究科)

Sota Asai (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)

本稿は、2024 年 10 月に開催された、RIMS 共同研究 (公開型) 「組合せ論的表現論の発展」における、私の講演の報告である。この講演は、伊山修氏との共同研究 [AsI] に基づいている<sup>\*1</sup>。

本稿を通して、 $\mathcal{A}$  を長さ有限なアーベル圏で、さらに、単純対象の同型類が有限個であると仮定する。 $\mathcal{A}$  の非同型な単純対象の全体を、 $S_1, S_2, \dots, S_n$  で表す。また、 $K_0(\mathcal{A})$  を  $\mathcal{A}$  の Grothendieck 群とおく。このとき、単純対象たちが与える元  $[S_1], [S_2], \dots, [S_n]$  は、 $K_0(\mathcal{A})$  の自由アーベル群としての基底となり、すなわち、 $K_0(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}[S_i]$  である。よって、実 Grothendieck 群  $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}} := K_0(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  は、 $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}[S_i]$  に等しく、 $[S_1], [S_2], \dots, [S_n]$  を標準基底とする Euclid 空間  $\mathbb{R}^n$  と見ることができる。

ただし、タイトルにある「実 Grothendieck 群」とは、 $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}$  そのものではなく、その双対空間  $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(K_0(\mathcal{A}), \mathbb{R})$  のことであり、本稿ではこちらに主に着目する。 $[S_1], [S_2], \dots, [S_n]$  の双対基底  $[S_1]^*, [S_2]^*, \dots, [S_n]^*$  をとり、これを  $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^* \simeq \mathbb{R}^n$  の標準基底と同一視する。

各元  $\theta: K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  は、定義から、 $\mathbb{R}$  線型写像  $K_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  であるから、特に、各対象  $M \in \mathcal{A}$  に対して、実数  $\theta([M]) \in \mathbb{R}$  が定まる。これを単に  $\theta(M)$  と略記する。すると、次のように、 $\mathcal{A}$  の部分圏を定めることができる。

**定義 1**  $\theta \in K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  とする。

- (1) [BKT, Subsection 3.1]  $\theta$  に付随する、 $\mathcal{A}$  の 2 つの半安定ねじれ対 (semistable torsion pair)  $(\overline{\mathcal{T}}_{\theta}, \mathcal{F}_{\theta}), (\mathcal{T}_{\theta}, \overline{\mathcal{F}}_{\theta})$  を、

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{T}}_{\theta} &:= \{M \in \mathcal{A} \mid M \text{ の任意の商対象 } N \text{ に対し } \theta(N) \geq 0\}, \\ \mathcal{T}_{\theta} &:= \{M \in \mathcal{A} \mid M \text{ の任意の商対象 } N \neq 0 \text{ に対し } \theta(N) > 0\}, \\ \overline{\mathcal{F}}_{\theta} &:= \{M \in \mathcal{A} \mid M \text{ の任意の部分対象 } L \text{ に対し } \theta(L) \leq 0\}, \\ \mathcal{F}_{\theta} &:= \{M \in \mathcal{A} \mid M \text{ の任意の部分対象 } L \neq 0 \text{ に対し } \theta(L) < 0\}\end{aligned}$$

で定める。

- (2) [Kin, Definition 1.1]  $\theta$  半安定部分圏 (semistable subcategory)  $\mathcal{W}_{\theta} \subset \mathcal{A}$  を、

$$\mathcal{W}_{\theta} := \overline{\mathcal{T}}_{\theta} \cap \overline{\mathcal{F}}_{\theta}$$

で定める。

<sup>\*1</sup> JSPS 科研費 JP23K12957, JP23K22384 の助成を受けた。

定義より、 $\mathcal{T}_\theta \subset \overline{\mathcal{T}}_\theta$  が成立しており、これらは  $\mathcal{A}$  の**ねじれ類** (torsion class) である。すなわち、 $\mathcal{A}$  での商対象と拡大について閉じた部分圏である。また、 $\mathcal{F}_\theta \subset \overline{\mathcal{F}}_\theta$  は、 $\mathcal{A}$  の**ねじれ自由類** (torsion-free class) であり、 $\mathcal{A}$  での部分対象と拡大について閉じている。すると、 $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta)$  は、大きなねじれ類と小さなねじれ自由類を、 $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta)$  は、小さなねじれ類と大きなねじれ自由類を、組み合わせたものといえる。

これら 2 つのねじれ対の違いを表す部分圏が、 $\mathcal{W}_\theta$  である。 $\mathcal{W}_\theta$  は、 $\mathcal{A}$  の**広大部分圏** (wide subcategory)、すなわち、核・余核・拡大について閉じた部分圏であり、 $\mathcal{A}$  が長さ有限なアーベル圏であるから、 $\mathcal{W}_\theta$  もそうである。ただし、 $\mathcal{W}_\theta$  は単純対象の同型類を無限個もつことがあり、 $K_0(\mathcal{W}_\theta)_{\mathbb{R}}$  などを本稿で考えることはない。

なお、歴史的には、 $\mathcal{W}_\theta$  のほうが 20 年程度早く導入されていることを、お断りしておく。上記で導入した部分圏を用いて、次の概念を定義することができる。

**定義 2**  $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  において、以下を定める。

- (1) [Asa, Definition 2.13]  $\theta, \eta \in K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  について、 $\theta$  と  $\eta$  が **TF 同値** (TF equivalent) であるとは、 $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta) = (\overline{\mathcal{T}}_\eta, \mathcal{F}_\eta)$  かつ  $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta) = (\mathcal{T}_\eta, \overline{\mathcal{F}}_\eta)$  が成立することと定める。
- (2) [BST, Definition 3.2][Bri, Definition 6.1]  $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  の**壁部屋構造** (wall-chamber structure) を、
  - 各  $M \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$  ごとに定まる図形  $\Theta_M := \{\theta \in K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^* \mid M \in \mathcal{W}_\theta\}$  を**壁** (wall)、
  - すべての壁たちの和集合を考え、その閉包の補集合  $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^* \setminus \overline{\bigcup_{M \in \mathcal{A} \setminus \{0\}} \Theta_M}$  の連結成分を**部屋** (chamber) として定める。

容易にわかるが重要な性質として、 $\Theta_{M_1 \oplus M_2} = \Theta_{M_1} \cap \Theta_{M_2}$  がある。よって、直既約加群に付随する壁のみを考えても、壁部屋構造を調べる上では十分である。

$M$  を直既約加群とした場合でも、壁  $\Theta_M$  の次元は  $M$  により様々に変化するが、[Asa, Proposition 2.8] にあるように、どのような  $M \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$  についても、ある煉瓦  $S \in \mathcal{A}$  で、 $\Theta_M \subset \Theta_S$  かつ  $\Theta_S$  は  $n-1$  次元となるものが存在する<sup>\*2</sup>。ここで、 $S \in \mathcal{A}$  が**煉瓦** (brick) であるとは、 $S \neq 0$  であって、任意の自己準同型  $f: S \rightarrow S$  が同型か 0 であることを指す。よって、煉瓦に付随する壁のうち、 $n-1$  次元のものがすべてわかれば、壁部屋構造は事実上決定される。

TF 同値と壁部屋構造の関係は、2 点  $\theta, \eta$  を結ぶ線分  $[\theta, \eta]$  を用いると、以下のように記述できる。

**命題 3** [Asa, Theorem 2.17] 異なる元  $\theta \neq \eta \in K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  に対して、以下は同値である。

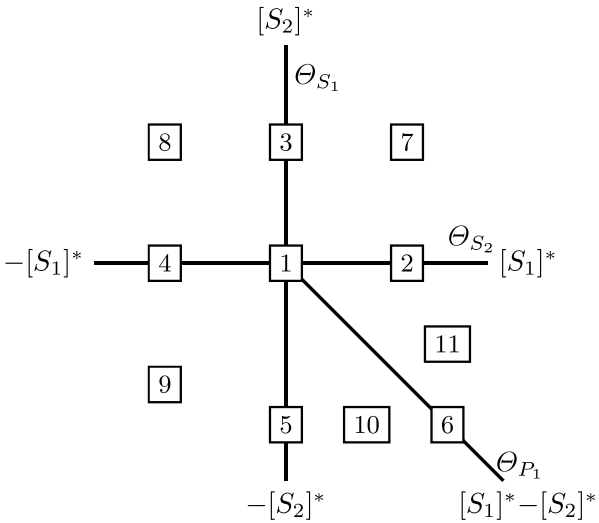
<sup>\*2</sup>  $S$  が煉瓦でも  $\Theta_S$  は  $n-1$  次元とは限らないし、 $\Theta_M$  が  $n-1$  次元でも  $M$  は煉瓦とは限らない。

- (a)  $\theta$  と  $\eta$  は TF 同値である。
- (b) 線分  $[\theta, \eta]$  は、いかなる壁  $\Theta_M$  とも一点のみで交わることはない。

この命題について、簡単な例を挙げる。

例 4  $\Lambda$  を簾  $1 \rightarrow 2$  の道多元環  $K(1 \rightarrow 2)$  とし、 $\mathcal{A}$  を有限生成右  $\Lambda$  加群の圏  $\text{mod } \Lambda$  とする。 $\text{mod } \Lambda$  の単純対象は、簾の頂点  $1, 2$  に対応する単純  $\Lambda$  加群  $S_1, S_2$  である。よって、 $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  は、 $[S_1]^*, [S_2]^*$  を標準基底とする 2 次元の Euclid 空間  $\mathbb{R}^2$  となる。

$\mathcal{A}$  の直既約対象は、 $S_1, S_2$  と直既約射影加群  $P_1$  の 3 つである。これらはいずれも煉瓦であり、非分裂な短完全列  $0 \rightarrow S_2 \rightarrow P_1 \rightarrow S_1 \rightarrow 0$  を与える。これに基づき、TF 同値類（下図  $\boxed{1} - \boxed{11}$  の全 11 個）と壁部屋構造（極大な壁は  $\Theta_{S_2}, \Theta_{P_1}, \Theta_{S_1}$  の全 3 個）を図示すると、以下のようになる。



各 TF 同値類に属す  $\theta$  について、 $\mathcal{T}_\theta, \mathcal{W}_\theta, \mathcal{F}_\theta$  を書くと、以下のようになる。ここで、 $\text{add } M$  は、 $M$  の直和因子の直和で書ける加群全体がなす部分圏を表す。

| TF 同値類                                                         | $\mathcal{T}_\theta$         | $\mathcal{W}_\theta$  | $\mathcal{F}_\theta$         |
|----------------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------|------------------------------|
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>  | $\{0\}$                      | $\text{mod } \Lambda$ | $\{0\}$                      |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>  | $\text{add}(P_1 \oplus S_1)$ | $\text{add } S_2$     | $\{0\}$                      |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>  | $\text{add } S_2$            | $\text{add } S_1$     | $\{0\}$                      |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</span>  | $\{0\}$                      | $\text{add } S_2$     | $\text{add } S_1$            |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>  | $\{0\}$                      | $\text{add } S_1$     | $\text{add}(S_2 \oplus P_1)$ |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>  | $\text{add } S_1$            | $\text{add } P_1$     | $\text{add } S_2$            |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</span>  | $\text{mod } \Lambda$        | $\{0\}$               | $\{0\}$                      |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</span>  | $\text{add } S_2$            | $\{0\}$               | $\text{add } S_1$            |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</span>  | $\{0\}$                      | $\{0\}$               | $\text{mod } \Lambda$        |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span> | $\text{add } S_1$            | $\{0\}$               | $\text{add}(S_2 \oplus P_1)$ |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span> | $\text{add}(P_1 \oplus S_1)$ | $\{0\}$               | $\text{add } S_2$            |

一般に、 $\Lambda$  を体  $K$  上の有限次元多元環とし、 $\mathcal{A}$  を有限生成右  $\Lambda$  加群の圏  $\text{mod } \Lambda$  とするとき、今回扱っている  $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^* = K_0(\text{mod } \Lambda)_{\mathbb{R}}^*$  は、有限生成右  $\Lambda$  加群の圏の実 Grothendieck 群  $K_0(\text{proj } \Lambda)_{\mathbb{R}}$  と、同一視できる\*<sup>3</sup>。この場合、複体のホモトピー圏  $K^b(\text{proj } \Lambda)$  の 2 項 (前) 準傾複体から、 $K_0(\text{proj } \Lambda)_{\mathbb{R}}$  の TF 同値類を構成でき、以下が成立する。

**命題 5**  $\Lambda$  を体  $K$  上の有限次元多元環とする。

- (1) [Asa, Proposition 3.11] ([Yur, Proposition 3.3], [BST, Proposition 3.27] も参照)  
Basic な 2 項前準傾複体の同型類全体の集合から、TF 同値類全体の集合への単射が、 $U = \bigoplus_{i=1}^m U_i$  (各  $U_i$  は直既約) を、 $C^\circ(U) := \sum_{i=1}^m \mathbb{R}_{>0}[U_i]$  に写すことで得られる。
- (2) [Asa, Theorem 4.7] (1) が全単射であることは、2 項前準傾複体が有限個のみ存在することと同値である\*<sup>4</sup>。
- (3) [Asa, Theorem 3.17] (1) を制限することで、basic な 2 項準傾複体の同型類全体の集合から、フル次元の TF 同値類全体の集合への全単射が得られる。また、フル次元の TF 同値類は、 $K_0(\text{proj } \Lambda)_{\mathbb{R}}$  の部屋構造における部屋に一致する。

2 項前準傾複体が無限個存在する場合は、TF 同値類の構造は複雑になりがちである。そこで、TF 同値を色々な加群  $M$  を用いて、体系的に様々な形で粗くすることで、少しずつ TF 同値類を調べようというのが、これから解説する  $M$ -TF 同値の発端となった考え方である。ただし、 $M$ -TF 同値の定義そのものには、2 項 (前) 準傾複体は一切不要である。

\*<sup>3</sup> 各単純加群  $S_i$  の射影被覆を  $P_i$  とすると、 $K_0(\text{proj } \Lambda)_{\mathbb{R}} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}[P_i] \simeq \mathbb{R}^n$  となり、各  $[P_i]$  を  $d_i[S_i]^* \in K_0(\text{mod } \Lambda)_{\mathbb{R}}^*$  ( $d_i := \dim_K \text{End}_\Lambda(S_i)$ ) に写すことで、同一視を行う。有限次元多元環  $\Lambda$  が道多元環の商であれば、必ず  $d_i = 1$  である。

\*<sup>4</sup> [DIJ, Theorem 4.2] より、煉瓦が有限個であることも同値である。

$M$ -TF 同値を定義するために必要となるのは、次のものである。

**定義 6**  $M \in \mathcal{A}$  かつ  $\theta \in K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  とする。

(1) ねじれ対  $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta)$  と  $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta)$  により、短完全列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bar{t}_\theta M \rightarrow M \rightarrow f_\theta M \rightarrow 0 \quad (\bar{t}_\theta M \in \overline{\mathcal{T}}_\theta, f_\theta M \in \mathcal{F}_\theta), \\ 0 \rightarrow t_\theta M \rightarrow M \rightarrow \bar{f}_\theta M \rightarrow 0 \quad (t_\theta M \in \mathcal{T}_\theta, \bar{f}_\theta M \in \overline{\mathcal{F}}_\theta) \end{aligned}$$

をとり、 $\bar{t}_\theta M, t_\theta M$  を  $M$  の部分対象、 $f_\theta M, \bar{f}_\theta M$  を  $M$  の商対象とみる。

(2)  $M$  の部分対象として、 $t_\theta M \subset \bar{t}_\theta M$  であるから、 $w_\theta M := \bar{t}_\theta M / t_\theta M$  とおく。すると、 $w_\theta M \in \mathcal{W}_\theta$  となることから、 $\text{supp}_\theta(w_\theta M)$  で、 $w_\theta M$  の  $\mathcal{W}_\theta$  における組成因子の同型類全体の集合を表す。

**定義 7** [AsI, Definition 3.1]  $M \in \mathcal{A}$  とする。このとき、 $\theta, \eta \in K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  が  $M$ -TF 同値 ( $M$ -TF equivalent) であるとは、以下の (a), (b) を満たすことをいう。

- (a)  $(\bar{t}_\theta M, f_\theta M) = (\bar{t}_\eta M, f_\eta M)$  かつ  $(t_\theta M, \bar{f}_\theta M) = (t_\eta M, \bar{f}_\eta M)$  である。
- (b)  $\text{supp}_\theta(w_\theta M) = \text{supp}_\eta(w_\eta M)$  である。

$\text{TF}(M)$  で  $M$ -TF 同値類すべての集合を表し、 $\Sigma(M)$  で  $M$ -TF 同値類の閉包すべての集合  $\{\overline{E} \mid E \in \text{TF}(M)\}$  を表す。

ここで、条件 (a) は、 $(t_\theta M, w_\theta M, f_\theta M) = (t_\eta M, w_\eta M, f_\eta M)$  と同値である。よって、(a) のもとでは、条件 (b) は、 $Z := w_\theta M = w_\eta M$  という同一の対象について、 $\mathcal{W}_\theta$  での  $Z$  の組成列は  $\mathcal{W}_\eta$  での  $Z$  の組成列でもあり、逆もそうである、という読み方もできる。条件 (b) では、組成因子の重複度は直接は考慮していないが、 $\theta$  と  $\eta$  が TF 同値であれば、 $Z$  の  $\mathcal{W}_\theta$  における組成因子と  $Z$  の  $\mathcal{W}_\eta$  における組成因子は、重複度も込めて一致する。

**注意 8** [AsI, Remark 3.3]  $M = M_1 \oplus M_2$  であるときは、 $M$ -TF 同値であることは、 $M_1$ -TF 同値かつ  $M_2$ -TF 同値であることと同値である。特に、 $\mathcal{A}$  に煉瓦の同型類が有限個しか存在しないときは、 $M \in \mathcal{A}$  を非同型な煉瓦すべての直和とすると、 $M$ -TF 同値と TF 同値は、完全に一致する。

$\Sigma(M)$  の基本性質は以下の通りである。有理多面錐  $\sigma$  に対し、 $\text{Face } \sigma$  で  $\sigma$  の空でない面全体の集合を表し、 $\sigma^\circ$  で  $\sigma$  の相対的内部<sup>\*5</sup>を表す。

**命題 9** [AsI, Theorem 3.2]  $M \in \mathcal{A}$  とする。

<sup>\*5</sup> ここでは、 $\sigma$  が張る部分線型空間での  $\sigma$  の内部のことである。

- (1) 全単射  $\text{TF}(M) \rightarrow \Sigma(M)$  が、 $E \in \text{TF}(M)$  に閉包  $\overline{E} \in \Sigma(M)$  を対応させることで得られる。逆写像は、 $\sigma \in \Sigma(M)$  の相対的内部  $\sigma^\circ \in \text{TF}(M)$  をとることで得られる。
- (2)  $\Sigma(M)$  は  $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  の完備な有理多面扇である。すなわち、以下が成立する。
  - 各  $\sigma \in \Sigma(M)$  は  $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  の有理多面錐である。
  - 各  $\sigma \in \Sigma(M)$  に対し、 $\text{Face } \sigma \subset \Sigma(M)$  である。
  - 各  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma(M)$  について、 $\sigma_1 \cap \sigma_2 \in \text{Face } \sigma_1 \cap \text{Face } \sigma_2$  である。
  - $\sigma \in \Sigma(M)$  たちの和集合は、 $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  全体である。
- (3) 各  $\sigma \in \Sigma(M)$  について、面の相対的内部への分解  $\sigma = \bigsqcup_{\tau \in \text{Face } \sigma} \tau^\circ$  は、 $M$ -TF 同値類への分解でもある。

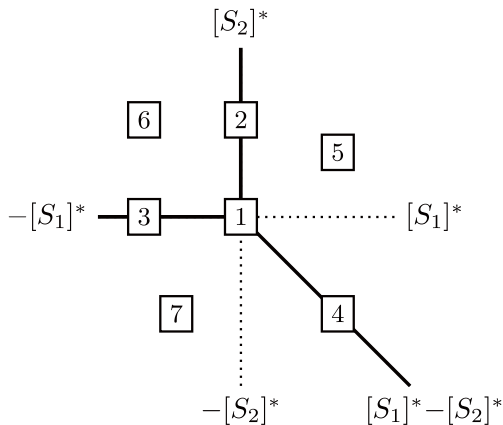
この  $\Sigma(M)$  は、次の意味で、壁  $\Theta_M$  の拡張にもなっている。

**命題 10** [AsI, Example 3.4]  $M \in \mathcal{A}$  とする。

- (1)  $\text{Face } \Theta_M \subset \Theta_M$  である。すなわち、壁  $\Theta_M$  の任意の面  $\sigma$  は  $\Sigma(M)$  の元であり、その相対的内部  $\sigma^\circ$  は  $\text{TF}(M)$  の元である。
- (2)  $\Theta_M$  は  $\Sigma(M)$  の部分扇である。

$M$ -TF 同値の簡単な例を挙げる。

**例 11** 例 4 の設定のもとで、 $M = P_1$  のときの  $M$ -TF 同値類は、以下の 7 つである。



各  $M$ -TF 同値類に属す  $\theta$  について、 $t_\theta M, w_\theta M, f_\theta M$  と  $\text{supp}_\theta(w_\theta M)$  を書くと、以下のようになる。

| $M$ -TF 同値類 | $t_\theta M$ | $w_\theta M$ | $f_\theta M$ | $\text{supp}_\theta(w_\theta M)$ |
|-------------|--------------|--------------|--------------|----------------------------------|
| $\boxed{1}$ | 0            | $M$          | 0            | $\{S_2, S_1\}$                   |
| $\boxed{2}$ | $S_2$        | $S_1$        | 0            | $\{S_1\}$                        |
| $\boxed{3}$ | 0            | $S_2$        | $S_1$        | $\{S_2\}$                        |
| $\boxed{4}$ | 0            | $M$          | 0            | $\{M\}$                          |
| $\boxed{5}$ | $M$          | 0            | 0            | $\emptyset$                      |
| $\boxed{6}$ | $S_2$        | 0            | $S_1$        | $\emptyset$                      |
| $\boxed{7}$ | 0            | 0            | $M$          | $\emptyset$                      |

ここで、 $\boxed{1}$  と  $\boxed{4}$  は、 $\text{supp}_\theta(w_\theta M)$  のみの違いで分けられていることに注意せよ。どちらでも  $w_\theta M = M$  であるが、 $\boxed{1}$  においては  $\mathcal{W}_\theta = \text{mod } \Lambda$  であるのに対し、 $\boxed{4}$  においては  $\mathcal{W}_\theta = \text{add } M$  であるため、 $\text{supp}_\theta(w_\theta M)$  に違いが生じ、定義 7 での条件 (b) より、これらは異なる  $M$ -TF 同値類である。

$M$ -TF 同値類の閉包  $\Sigma(M)$  が有理多面扇であるのは、この条件 (b) のおかげである。実際、定義 7 での条件 (a) のみで、 $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  での同値関係を作ってしまうと、 $\boxed{1}$  と  $\boxed{4}$  は統合されて一つの同値類になってしまう。条件 (a) のみによる同値類たちの閉包全体の集合を  $\Sigma'(M)$  とすると、 $\Sigma'(M) = \Sigma(M) \setminus \{\boxed{1}\}$  となる。特に、 $\boxed{1} \cup \boxed{4}$  は  $\Sigma'(M)$  の元であるが、その面である  $\boxed{1}$  は  $\Sigma'(M)$  の元ではない。よって、 $\Sigma'(M)$  は有理多面扇でない。

命題 9 の証明は、以下で定まる Newton 多面体との関連により行った。

**定義 12** [BKT, Subsection 1.3] [Fei1, Definition 2.3]  $M \in \mathcal{A}$  とする。 $M$  の **Newton 多面体** (Newton polytope) とは、 $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}$  における多面体

$$N(M) := \text{conv}\{[L] \mid L \text{ は } M \text{ の部分対象}\}$$

である。ここで、 $\text{conv}$  は凸包を表す。

$N(M)$  は、今回の主役である  $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  ではなく、あくまでも  $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}$  内の図形である。また、 $N(M)$  は多面錐ではなく多面体であり、特に有界閉集合である。よって、 $\theta \in K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$  に対して、 $N(M)$  での  $\theta$  の最大値  $\max \theta(N(M))$  が定まる。

私たちの研究での主結果は、次のものであり、命題 9 もそこからわかる。多面体  $X$  についても、 $\text{Face } X$  で  $X$  の空でない面全体の集合を表し、 $X^\circ$  で  $X$  の相対的内部<sup>\*6</sup>を表す。双対扇については、[AHKM, BKT, Fei2]などを参照されたい。

**定理 13** [AsI, Theorem 3.15]  $M \in \mathcal{A}$  とする。このとき、 $\Sigma(M)$  は多面体  $N(M)$  の双対

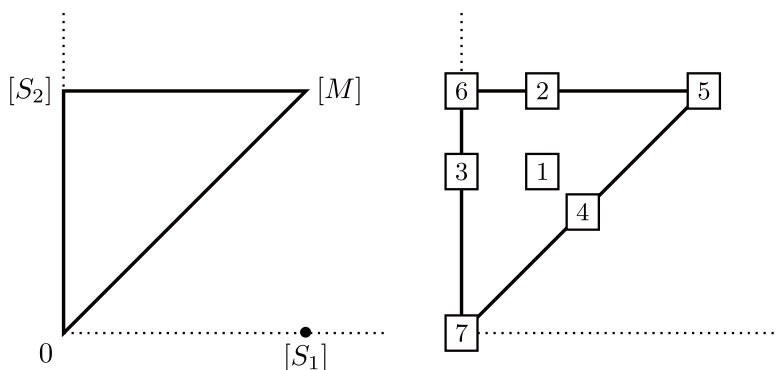
<sup>\*6</sup> この場合は、 $X$  が張る部分アフィン空間での  $X$  の内部のことである。

扇である。すなわち、互いに逆写像である全単射

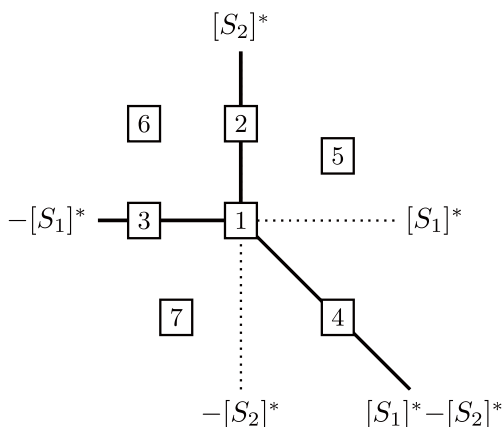
$$\begin{aligned} \text{FaceN}(M) &\rightleftharpoons \Sigma(M), \\ F &\mapsto \{\theta \in K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^* \mid \theta(v) = \max \theta(N(M))\}, \\ \{v \in N(M) \mid \theta(v) = \max \theta(N(M))\} &\mapsto \sigma \end{aligned}$$

が存在する。ここで、 $\text{FaceN}(M) \rightarrow \Sigma(M)$  の定義では、 $v \in F^\circ$  をとっており、 $\Sigma(M) \rightarrow \text{FaceN}(M)$  の定義では、 $\theta \in \sigma^\circ$  をとっている。

**例 14** 例 11 の場合、 $M = P_1$  の部分対象は  $0, S_2, M$  であるから、 $N(M)$  は、 $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}$  における、下の左図の直角三角形となる。よって、 $\text{FaceN}(M)$  は、下の右図にある  $\boxed{1}$  から  $\boxed{7}$  までの 7 つの元をもつ。



一方、例 11 で見たとおり、下が  $\Sigma(M)$  の図である。そして、同じ番号のついた  $\text{FaceN}(M)$  の元と  $\Sigma(M)$  の元どうしが対応している。



## 参考文献

[AHIKM] T. Aoki, A. Higashitani, O. Iyama, R. Kase, Y. Mizuno, *Fans and polytopes in tilting theory I: Foundations*, arXiv:2203.15213v4.

- [Asa] S. Asai, *The wall-chamber structures of the real Grothendieck groups*, Adv. Math, **381** (2021), 107615.
- [AsI] S. Asai, O. Iyama, *M-TF equivalences in the real Grothendieck groups*, arXiv:2404.13232v1.
- [BKT] P. Baumann, J. Kamnitzer, P. Tingley, *Affine Mirković-Vilonen polytopes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **120** (2014), 113–205.
- [Bri] T. Bridgeland, *Scattering diagrams, Hall algebras and stability conditions*, Algebr. Geom., **4**, no. 5 (2017), 523–561.
- [BST] T. Brüstle, D. Smith, H. Treffinger, *Wall and Chamber Structure for finite-dimensional Algebras*, Adv. Math, **354** (2019), 106746.
- [DIJ] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso,  *$\tau$ -tilting finite algebras, bricks, and g-vectors*, Int. Math. Res. Not., IMRN 2019, Issue 3, 852–892.
- [Fei1] J. Fei, *Combinatorics of  $F$ -polynomials*, Int. Math. Res. Not., IMRN 2023, Issue 9, 7578–7615.
- [Fei2] J. Fei, *Tropical  $F$ -polynomials and general presentations*, J. Lond. Math. Soc. (2), **107**, Issue 6 (2023), 2079–2120.
- [Kin] A. D. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **45**, no. 180 (1994), 515–530.
- [Yur] T. Yurikusa, *Wide Subcategories are Semistable*, Doc. Math., **23** (2018), 35–47.