

ソリトンと空間構造の形成

京大理学部 川原琢治 (Takuji Kawahara)

1. はじめに

複雑な物理系における非線形現象を何らかの近似によつて簡単化し、非線形現象の本質的な部分を抽出して議論することは近年盛んに行われて来たことであり、周知のごとく、ソリトンの記述などで大きな成功を収めてきた。本報告では、物理系を漸近的に記述する簡単な非線形発展方程式の例を幾つか取り上げ、そのような発展方程式の解の振舞いにおいて空間的な局在構造が果たす役割について考察した結果について述べる。取り扱う方程式は、非線形性、分散性、散逸性、不安定性を含む簡単な偏微分方程式で、ソリトンからカオス的な解までを含むものであり、この数年研究室の諸氏と共同で行ってきた内容に限定して総括的に報告する。

ソリトンとカオスは、時間・空間的な規則性と不規則性あるいは秩序と複雑さという言葉で分類される。その分類を形式的に表すと次表のようになる。

	spatial	temporal
soliton (bound state)	coherence	order
	coherence	complexity
chaos weak strong	coherence	complexity
	complexity	complexity

ソリトンは空間的な秩序 (coherence) 構造が時間的にも規則的に振舞うものと見なされる。カオスは空間的または時間的な不規則変動ということになるが、空間的な構造がある程度認められるが時間的に不規則となる弱いカオスと、空間構造が生成・消滅し、空間・時間的に不規則に振舞う強いカオスが考えられる。ソリトンとカオスの間も明確な区分が存在するわけではない。また、非線形分散系とソリトン、非線形散逸系とカオスとがある程度対応すると考えられる。しかし、このような対応も必ずしも一般的に言えることではない。例えば、純分散系の5階KdV方程式がカオス的な解を示すことや、散逸方程式であるBurgers方程式が規則的な振舞いを示すなどの例外がある。

ソリトンからカオス現象までを示す種々の非線形発展方程式の初期値問題の解において、空間的な局在構造の存在がしばしば観測される。また、生成・消滅を伴う非常に強いカオスの場合にも、絶えず変動するものの何らかの空間的局在構造が見られる場合がある。このようなことから、非線形発展方程式の解において空間的局在構造が果たす役割を調べることは興味深いことである。空間的局在構造 (表に示したspatial coherence) の第1の候補となるのは、純分散方程式の場合のソリトンがそうであったように、考えている発展方程式の定常進行波解 (局在パルス解) である。そこで、局在パルス解が基本的となり得るか否かに注目しつつ、発展方程式の初期値問題の解と定常進行波解であるソリトンや散逸型パルス解との関係を検討する。

以下では、空間1次元の場合と2次元の場合に大別して述べる。1次元方程式ではKdV方程式に不安定性と散逸性とが付け加わった場合の二、三の例と、複素Ginzburg-Landau方程式とを取り上げる。

2次元の場合については、不安定と散逸を含む2次元方程式の解の性質を調べることと、純分散性方程式の孤立波解 (とくに軸対称孤立波) の相互作用を取り扱う。1次元構造が2次元的に不安定となり、2次元的な局在孤立波が生じる例や、2次元的孤立波は相互作用に関して不安定で、近似的な意味での'準ソリトン' となることなどが示される。

全般を通じて一般的な結論が可能かどうかという点については、以下のいくつかの例から分かるように、分散性や、散逸性・不安定性の性質が少し変わると解の振舞いも変わるため、一般的な結論はないと言わざるを得ないことを最初に述

べておきたい。非線形性と他の因子との微妙な釣合により解の発展の仕方が異なるということであり、この点こそが非線形問題の特徴であるとも言えよう。

2. 空間1次元方程式

不安定性、散逸性、分散性を含む1次元非線形発展方程式の典型的な例を取り上げ、著者らの研究で得られた結果の概要を述べる。

A. Benney方程式

液膜流などの近似方程式である次式はカオス解を持つKuramoto-Sivashinsky方程式 ($\delta = 0$) の拡張形となっている。

$$u_t + u u_x + \delta u_{xxx} + u_{xx} + u_{xxxx} = 0 \quad (A-1)$$

$u \propto \exp(i k x + \sigma t)$ を仮定し、線形分散関係を求めると

$$\sigma = i \delta k^3 + k^2 - k^4 \quad (A-2)$$

となる。線形成長率 $\text{Re } \sigma$ は、波数 k の有限値 $1/\sqrt{2}$ で最大値をとる。

(A-1) 式の初期値問題を周期境界条件のもとに解く。以下の数値実験では、周期境界条件が採用されるが、周期長は特徴的なパルスのスケールに比べ十分長い領域を取っている。分散性の強弱 (δ の大小) に応じて、解は様々な振舞いを示す。分散性が強い場合 (δ 大の場合) には、一定振幅のソリトン列が生成され、周期境界条件に合う等間隔配列が漸近的に平衡解として実現される。

分散性が弱く (δ が小さく) なるに従い、パルス列を構成する個々のパルスの振幅は減少し、パルスは特定の間隔を保って伝播する。さらに分散性が弱くなると、パルス間隔は特定の値の周りで周期的あるいは不規則な変動を示す。図1-3にパルス間隔、振幅などが特定の値をとるか、その周りで周期的あるいは不規則的に変動する場合の例を示す。図3の場合にも空間的に局在するパルス構造が認められるが、パルス間隔が不規則に変動するため、波形の発展は非定常となり、カオス的な振舞いを示す。さらに分散性が弱くなると、パルスの局

在構造自体の変動が激しくなり、局在構造の生成・消滅をともなう強いカオス状態 (Kuramoto-Sivashinsky方程式のカオス) を示す (Kawahara(1983)¹⁾、Kawahara & Toh(1988)²⁾)。

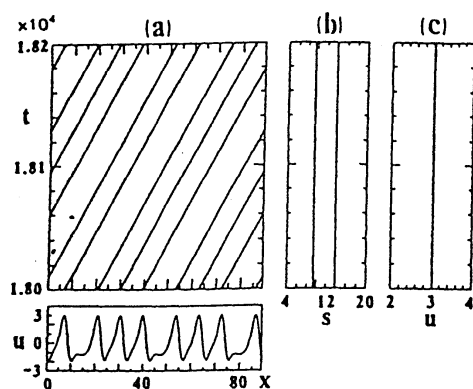


図1. (A-1)式の数値解におけるパルスの発展 ($\delta = 0.4$): パルス間隔一定。(a)波形とパルス・ピークのダイアグラム (b)パルス間隔 (c)パルス振幅。

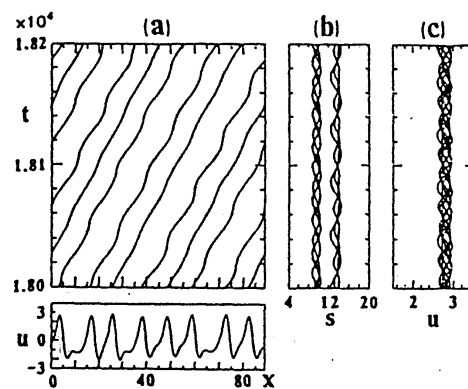


図2. 図1と同様 (但し $\delta = 0.3$)。パルス間隔は周期的に変化。

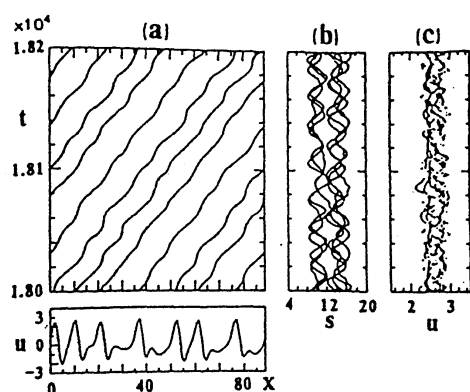


図3. 図1と同様 (但し $\delta = 0.15$)。パルス間隔は不規則に変化。

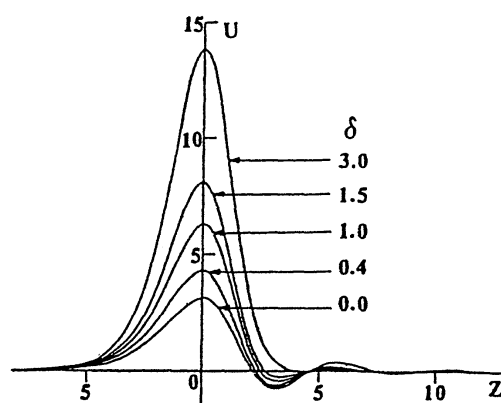


図4. 定常進行波解: δ が大きくなるとパルスの裾の振動構造が小さくなりパルス振幅が増大する。

(A-1) 式の解の以上の振舞いにおいて定常進行波解 (局在パルス解) が基本的な役割を果たすこと、それらの重ね合わせで解が近似できることが示された。定常進行波解は図4に示すように分散性が強い場合には裾が単調に減衰するパル

スであるが、分散性が弱くなるにつれ非対称性を増し、一方の裾が振動型となる。このようなパルスが互いに隣接する裾を通して相互作用すると考えると、パルス相互作用は有限個の連立非線形格子振動方程式（ソリトン格子モデル）によって記述できる。ソリトン格子モデルの性質はパルス波形の対称性やパルスの裾の形（単調減衰か振動型か）によって異なる。数値実験の結果のパルス間間隔はパルスの相互作用によって説明できる。以上のような結果から、Benney方程式（A-1）の場合には、定常進行波解が基本解として重要な働きをすることが分かる（Kawahara & Toh(1988)²¹）。

空間構造が生成・消滅する強いカオスの場合（ $\delta = 0$ のKuramoto-Sivashinsky方程式の極限）でも、定常進行波解が空間的局在構造として基本的な役割を果たし、統計的な意味での重ね合わせモデルが適用できる（Toh(1987)²¹）。

ソリトン格子モデルにおいて重ね合わせのもととなるパルス波形の対称性とパルスの裾の振動構造の有無により解の性質が異なることを明らかにする研究も行われた。その結果、3パルス周期ソリトン格子モデルについて、対称、非対称に拘らずパルスの裾の振動構造の存在がカオス的変動の発生に関連すること、パルスの非対称性がソリトン格子モデルの不安定性や散逸性に関連しており、非対称性が非保存的な性質をもたらすことが示された（Kawahara & Takaoka(1989)⁴¹）。純分散非線形方程式である5階KdV方程式の場合には対称な振動型パルスが基本解となる。この場合に、パルスの裾の振動構造がカオス的不規則変動の発生に関連していること、周期系では少なくとも3個以上のパルスの相互作用によりカオスを生じること示された（Kawahara & Takaoka(1988)⁵¹）。

（また、（A-1）式に関する報告として参考文献 6)-10) がある。）

B. 不安定KdV-Burgers方程式

散逸・分散型方程式の例としてKdV方程式に長波長不安定性と散逸性が加わった方程式

$$u_t + u u_x + u_{xxx} - \eta (u + u_{xx}) = 0 \quad (\text{B-1})$$

の場合を同様に取り扱った。

このとき分散関係式は

$$\sigma = i k^3 + \eta (1 - k^2) \quad (\text{B} - 2)$$

となる。(ここでは、分散項を1に規格化していることに注意。)

分散性が強く (η が小さく) KdV方程式に近い場合には、系の最大スケールに対応するスケールで多数のソリトンが群れをつくり不規則に相互作用し、非定常なカオス的変動を示す。分散性が強いとき規則的な平衡解が期待されるにも拘らず、Benney方程式の場合とは逆に、分散性が強い場合にカオス的な振舞いを示すのである。これは散逸項の形が異なり0波数(長波長)で最大増幅率をもつことによると考えられる。逆に η が大きいときには、十分時間が経過した後は数値実験の領域の最大スケールに対応する衝撃波が漸近状態として実現される。

このとき、分散性の効果は衝撃波の振動構造として現れる。定常進行波解(パルス解)は $\eta < 0.76$ では単調な裾をもち、 $\eta > 0.76$ で振動型となる。 η が小さい場合には波形はソリトンに近いが、一方の裾が非常に長い負の値をとる形となっている(図5参照)。このようなパルス解は、初期条件の形によって発展段階の途中で一時的に出現するが不安定であり、十分時間が経つと衝撃波に移行することが示される(Kawahara & Toh(1988)¹¹⁾)。

数値実験の例として図6と図7を示す。図6は初期条件 $u(x, 0) = 7 \cos 0.2\pi x$ 、 $\eta = 0.1$ 、 $L = 100$ の結果である。正弦波からパルス解の列が一時的に生成され、それらが群をつくった後、不規則波になる過程が見られる。

(d) はパワー・スペクトルであるが $t = 500$ 以降の波形が不規則であることを示している。図7は $\eta = 1.5$ の場合、初期条件として変調正弦波 $u(x, 0) = 5 (\cos 0.2\pi x + \cos 0.22\pi x)$ 、 $L = 100$ を与えた結果である。初期段階でパルス列が生成された後、相互作用を繰り返し、最終的に定常な衝撃波に落ち着く様子が示されている。時間発展の初期段階で定常進行波解(パルス解)の列が出現すること、十分時間が経過した後は分散性の効果が衝撃波の山の部分の振動として現れていることが分かる。パワー・スペクトルは時間が十分経った後は定常に近づいている。

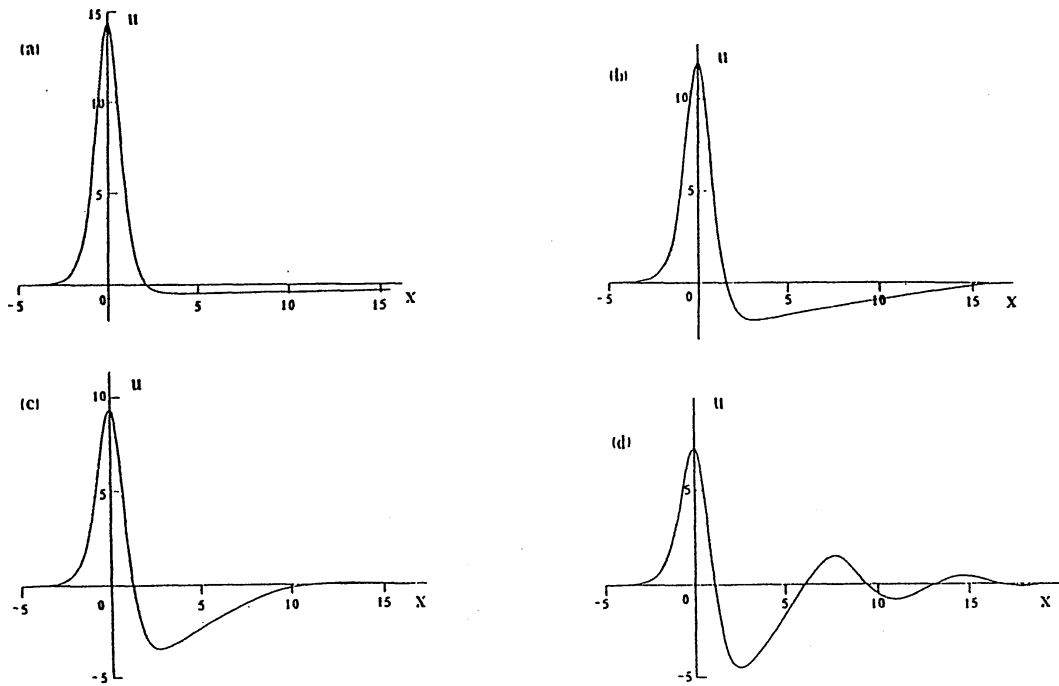


図5。(B-1)式の定常進行波解：(a) $\eta=0.1$ (b) $\eta=0.5$ (c) $\eta=1.0$
(d) $\eta=1.5$ 。

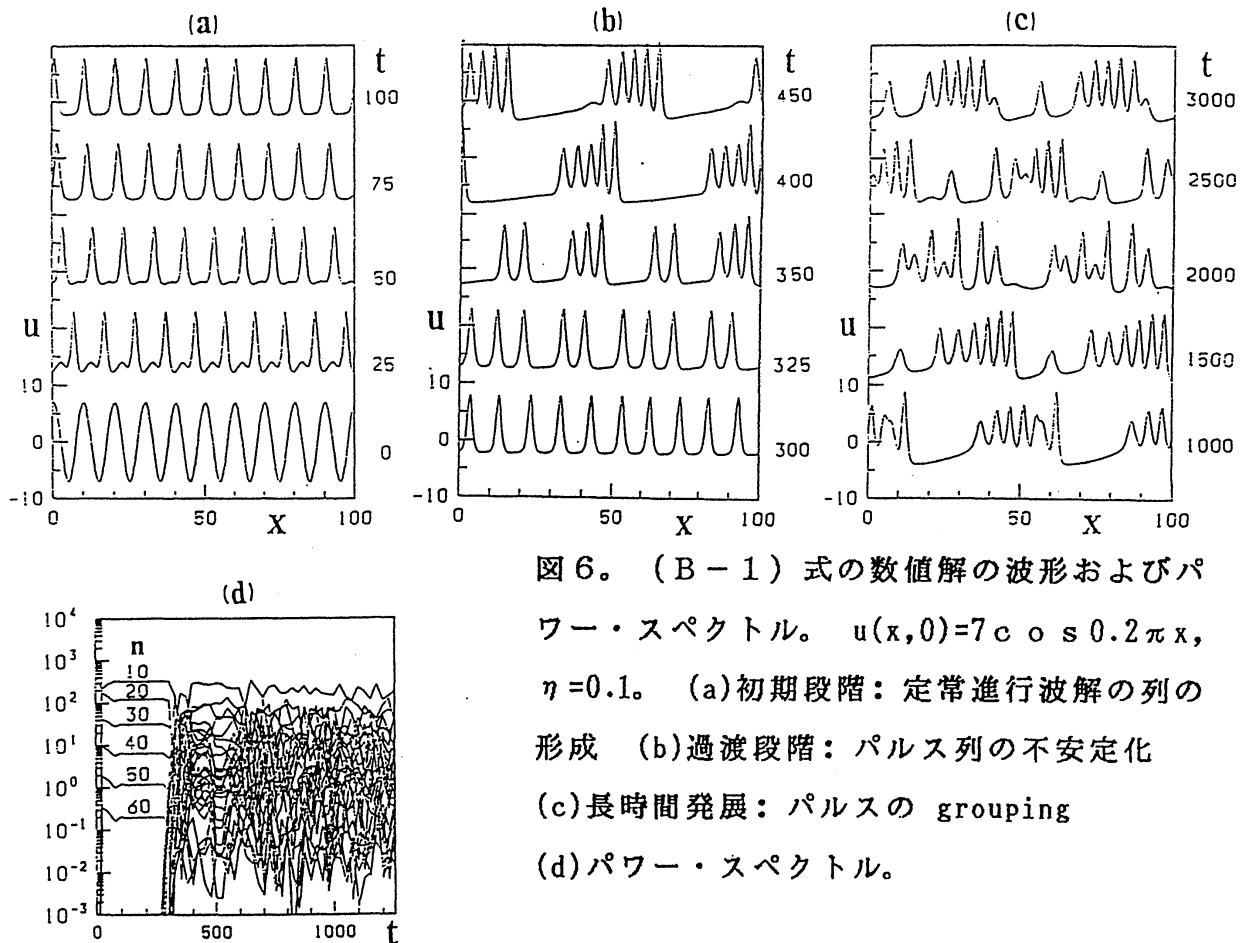


図6。(B-1)式の数値解の波形およびパワー・スペクトル。 $u(x,0)=7\cos 0.2\pi x$, $\eta=0.1$ 。(a)初期段階：定常進行波解の列の形成 (b)過渡段階：パルス列の不安定化 (c)長時間発展：パルスの grouping (d)パワー・スペクトル。

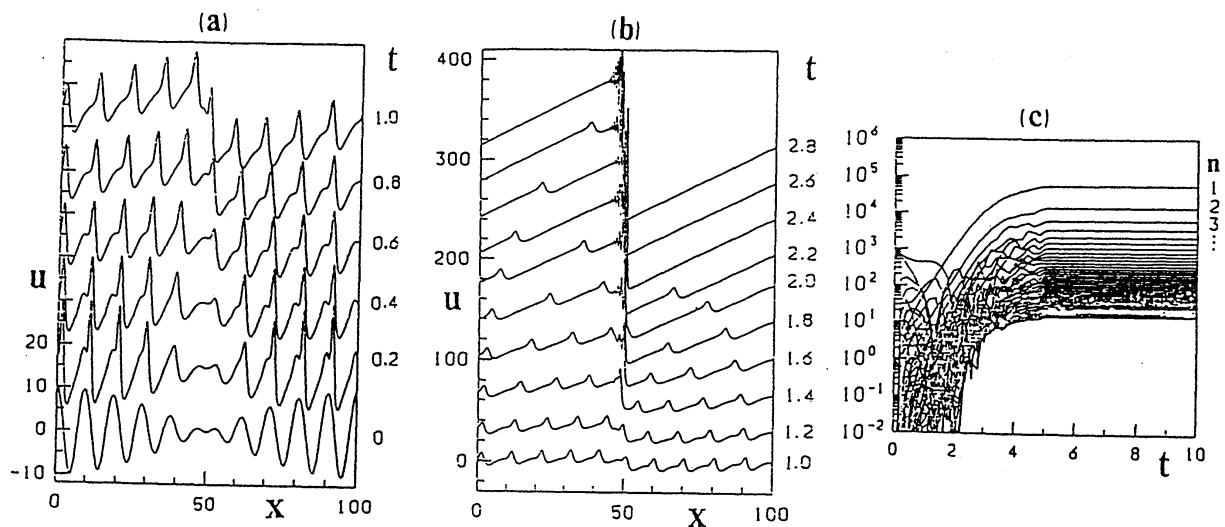


図 7. (B-1) 式の数値解。 $u(x,0)=5(\cos 0.2\pi x + \cos 0.22\pi x)$ 、 $\eta=1.5$ の場合の波形およびパワー・スペクトル (a)初期段階：定常進行波解の形成 (b)過渡段階と衝撃波の形成 (c)パワー・スペクトル。

C. 負エネルギー波方程式

成層流体のKelvin-Helmholtz不安定の近似方程式として、Hilbert変換の形で不安定性と散逸性を含む発展方程式

$$u_t + u u_x + u_{xxx} - \varepsilon \{H(u_x) + H(u_{xxx})\} = 0 \quad (C-1)$$

$$H(u_x) = (1/\pi) P \int_{-\infty}^{\infty} dy u_y / (x-y)$$

を考える。(Pは主値を意味する。)

このとき分散関係式は

$$\sigma = i k^3 + \varepsilon (|k| - |k|^3) \quad (C-2)$$

で与えられる。

また、類似の方程式として

$$u_t + u u_x + u_{xxx} - \varepsilon \{H(u_x) + u_{xx}\} = 0 \quad (C-3)$$

$$\sigma = i k^3 + \epsilon (|k| - k^2) \quad (C-4)$$

を考えることもできる。

これらの方程式の解については現在研究中であり、一般的な結論はまだ得られていないが、線形成長率の形と、現在までの数値実験結果からの予想ではBenney方程式と同様に分散性が強い場合にソリトン格子、弱い場合にカオス解となるように思われる。講演の際に数値実験の結果の一部を示したが、ここではその中から典型的な時間発展を示す例を図8として取り上げておく。

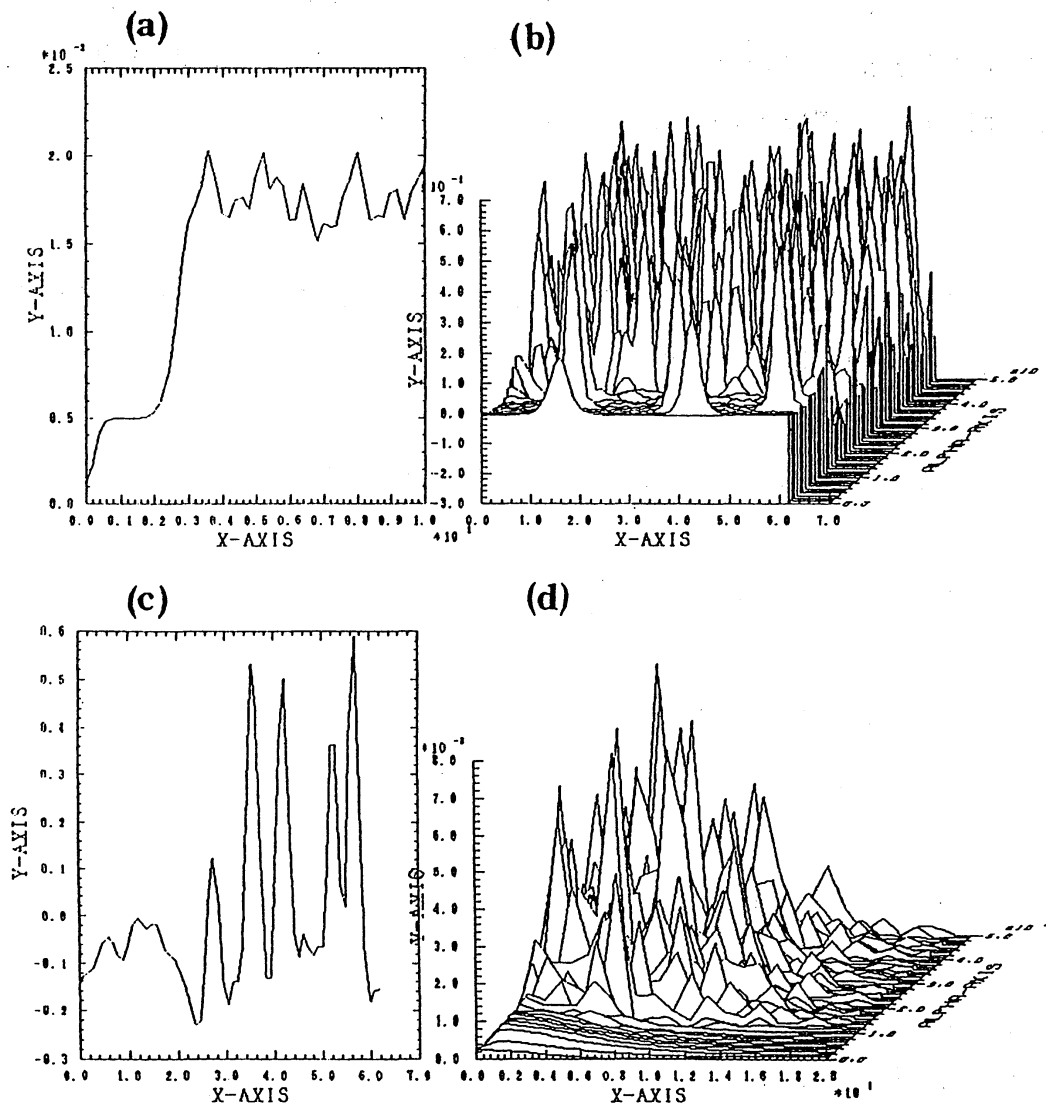


図8。(C-1)式の数値解：初期条件は sech^2 型ソリトン。(a)全エネルギーの時間変化 (b)波形の時間変化 (c)瞬間波形 (d)パワー・スペクトル。

図8では初期条件としてKdV方程式のソリトン解をとっている。初期ソリトンは不安定項と散逸項とで決まる一定振幅のパルスに近づいた後、不安定性により多数のパルスが発生しソリトン格子を形成しカオス状態へと発展することが観測される。(b)図は全エネルギーの変化を示す。多数のパルスが生成された最終状態のエネルギーは、単一パルスのエネルギー値より大きな値となっている(Hosoda & Kawahara¹²⁾)。

D. 複素Ginzburg-Landau方程式

これまでの例は長波長近似方程式であつたが、有限波長の変調波の例として、臨界不安定点近傍の不安定波動に対するよく知られた複素Ginzburg-Landau方程式(以下G-L方程式と呼ぶ)

$$i a_t + (p_r + i p_i) a_{xx} + (q_r + i q_i) |a|^2 a = i \gamma a \quad (D-1)$$

$$\sigma = -i p_r k^2 + (\gamma + p_i k^2) \quad (D-2)$$

を取り上げる。

この方程式は、特解として厳密な包絡ソリトン解を持つことが知られている(Pereira & Stenflo(1977)¹³⁾, Nozaki & Bekki(1984)¹⁴⁾)。この方程式については、非常に多くの研究がなされており、様々な観点から解の性質が論じられている。ここでは、著者らの研究(Kishiba, Toh & Kawahara(1991)¹⁵⁾)についてのみ述べることにする。

G-L方程式(D-1)で $p_i = q_i = \gamma = 0$ の極限をとると、厳密な包絡ソリトン解をもつ非線形Schrödinger方程式に帰着する。Rabinovich-Fabrikantは摂動近似により、 p_i 、 q_i 、 γ が小さい場合には、一定振幅の包絡ソリトン解が並んだ“ソリトン格子”が生成されるであろうというconjectureを提出していた(Rabinovich-Fabrikant(1979)¹⁶⁾)。しかし、数値実験の結果によれば、 p_i 、 q_i 、 γ が小さく散逸性が弱い場合でも、解は変調不安定となりカオス状態を示すことが分かった。

一方、G-L方程式におけるカオスへの遷移については、これまで多くの研究が行われてきたが、包絡ソリトン解とG-L方程式の初期値問題におけるカオス解との関係は明らかにされていなかった。我々の数値実験の結果では、包絡ソリトン解はカオス的変化のなかに基本的な空間構造として認められる。従って、包絡ソリトン解は平衡解としてのソリトン格子を作らないけれども間隔と位相とを適当にとって重ね合わせるることにより、カオス状態の統計的性質を近似することはできる。このような考えのもとに、局在パルス解の重ね合わせ近似に基づいてエネルギー・スペクトルを推定する試みを行った。

G-L方程式は $p_r q_r + p_i q_i > 0$ に対し、厳密な包絡ソリトン解をもつ。この解が基本的な役割りを果たすかどうかを見るために、厳密ソリトン解の衝突実験を行うと、散逸性が弱い場合には衝突後も近似的に厳密ソリトン解に戻ることが分かる。また、カオス状態における波形を調べると、図9に示すように厳密解の波形と近似的に一致する空間構造が時間発展の各段階で認められる。図10に示すように波形は絶えず変動しているが、その変動は相互作用によるものと考え、厳密ソリトン解の重ね合わせで近似できると仮定する。厳密ソリトン解は解析的な表現が与えられているので、それを適当な間隔と位相で重ね合わせることによりエネルギー・スペクトルを理論的に計算することができる。すなわち、パルスの間隔分布と位相分布とを与えることによりエネルギー・スペクトルの理論的推定値が得られる。このようにして得られた理論結果と数値実験結果との比較例を図11に示す。

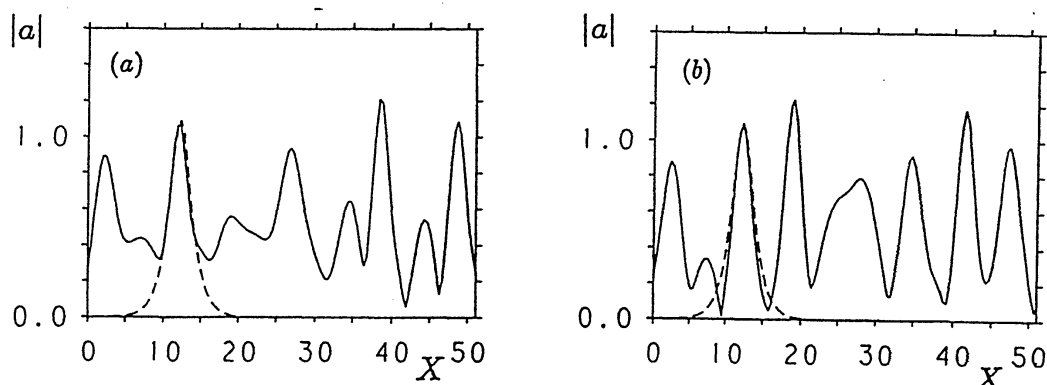


図9。(D-1)式の数値解の波形(ノルム $|a|$)と厳密ソリトン解の比較。

$L=64\pi$ (a) $p_r = q_r = 1$, $-p_i = q_i = \gamma = 0.01$ (b) $p_r = q_r = 1$, $-p_i = q_i = \gamma = 0.1$ 。

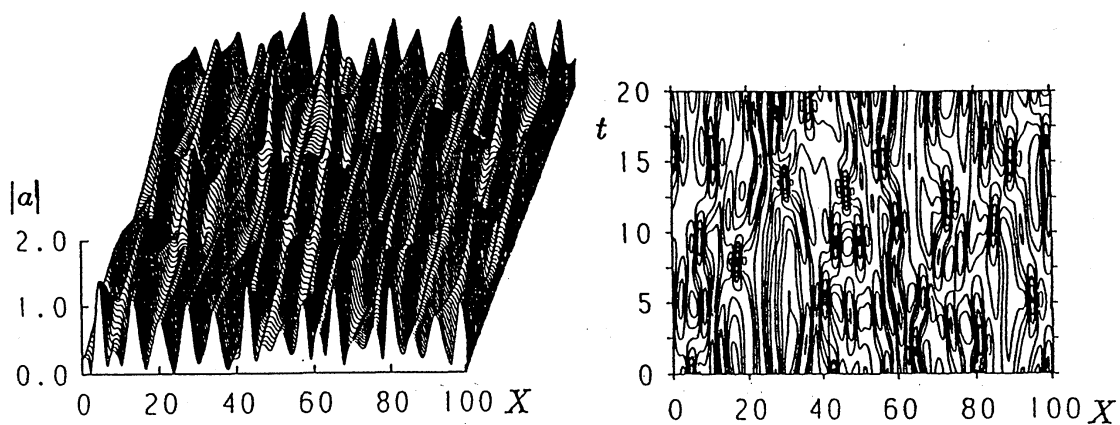


図10。波形の時間変化と等高線。 $p_r = q_r = 1$, $-p_i = q_i = \gamma = 0.01$ 。

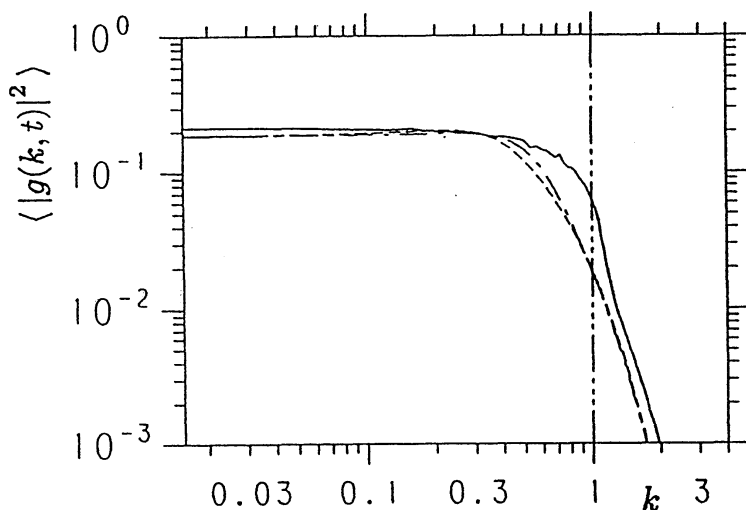


図11。スペクトルの比較。

実線：数値実験結果

破線：ガウス間隔分布の場合

一点破線：数値実験による間隔分布を用いた理論結果。

$p_r = q_r = 1$, $-p_i = q_i = \gamma = 0.01$ 。

数値実験によるスペクトル（実線）は、低波数領域でほぼ一定値をとり、変調不安定の最大成長率を与える波数より高波数側で指数関数的な減衰を示す。理論スペクトルの推定には、数値実験により求めたパルスの間隔分布を用いた場合（一点破線）と、Gauss分布の形の間隔分布を仮定した場合（破線）とが示されている。両者はほぼ同じで、スペクトルの特徴を第0近似としては満足すべき程度に記述していると言える。数値実験によるスペクトルは、波数 $k=1$ の辺りで肩が張った形になっている。このずれはパルスが衝突して一つの尖ったピークとなっている間の波形のスペクトル（スペクトルの的に広がった形となる）を考慮に入れることにより修正されるものと思われる。

3. 空間2次元方程式

1次元構造は一般的に2次元不安定を起こすことが多い。そうすると、2次元的な局在構造はどのような形を取るのでしょうか。また、2次元ソリトンの安定性はどのようなのであろうか。1次元ソリトン方程式の素直な拡張である2次元純分散性非線形方程式は以下に示すように軸対称孤立波解を持つが、それは衝突に対して非保存的となる。すなわち、2次元局在パルスは単一では安定であるが、衝突については非弾性的で近似的な意味でのみ'ソリトンの'ということになる。2次元散逸・分散方程式の解の例および2次元純分散方程式における局在パルスの衝突の数値実験例について以下に述べる。

E. 2次元Benney方程式

液膜流の近似方程式の2次元形として

$$u_t + u_x + u u_x + \Delta u_x + \alpha u_{xx} + \gamma \Delta^2 u = 0 \quad (E-1)$$

$$(\Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$$

$$\sigma = -i k_x + i k_x (k_x^2 + k_y^2) + \alpha k_x^2 - \gamma (k_x^2 + k_y^2)^2 \quad (E-2)$$

を取り上げる。

(E-1)式の初期値問題を2次元周期領域内で数値的に解いた。(E-1)式の1次元解は常に2次元不安定となり2次元構造を生じる。初期条件としてランダム場をとると、最大不安定モードが選択され1次元的な波を生じるが、この波は変調不安定で崩壊する。分散性が弱い(δ が小さい)場合には、1次元Benney方程式の場合と同様にカオス的不規則変動となるが、2次元的な局在構造が認められる(図12参照)。

分散性が強い(δ が大きい)場合には、十分時間が経過すると、軸対称に近い釣鐘型の局在パルスが生成され、特定のパターンで2次元的に配列し、パルスの格子ができる。この格子におけるパルスは平衡位置の周りで時間的に周期的に

変動するので、いわば “準格子 (quasi-lattice)” と呼ぶべきものとなる (図 1 3 参照) (Toh, Iwasaki & Kawahara(1989)¹⁷⁾)。

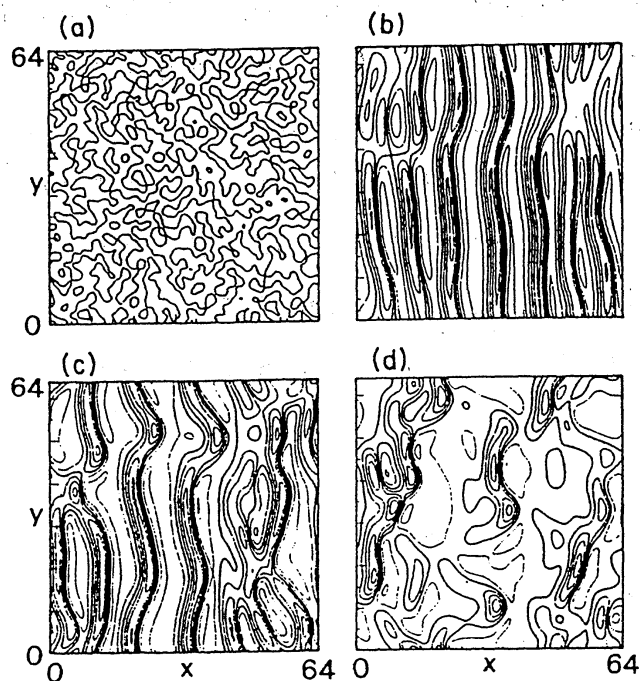


図 1 2。 (E-1) 式の初期値問題の時間発展 ($\delta=0.8$) (a)初期ランダム場 (b) $t=37.5$: 1次元波の生成 (c) $t=50$: 1次元波の変調不安定 (d) $t=140$: 馬蹄形パターンの発生。

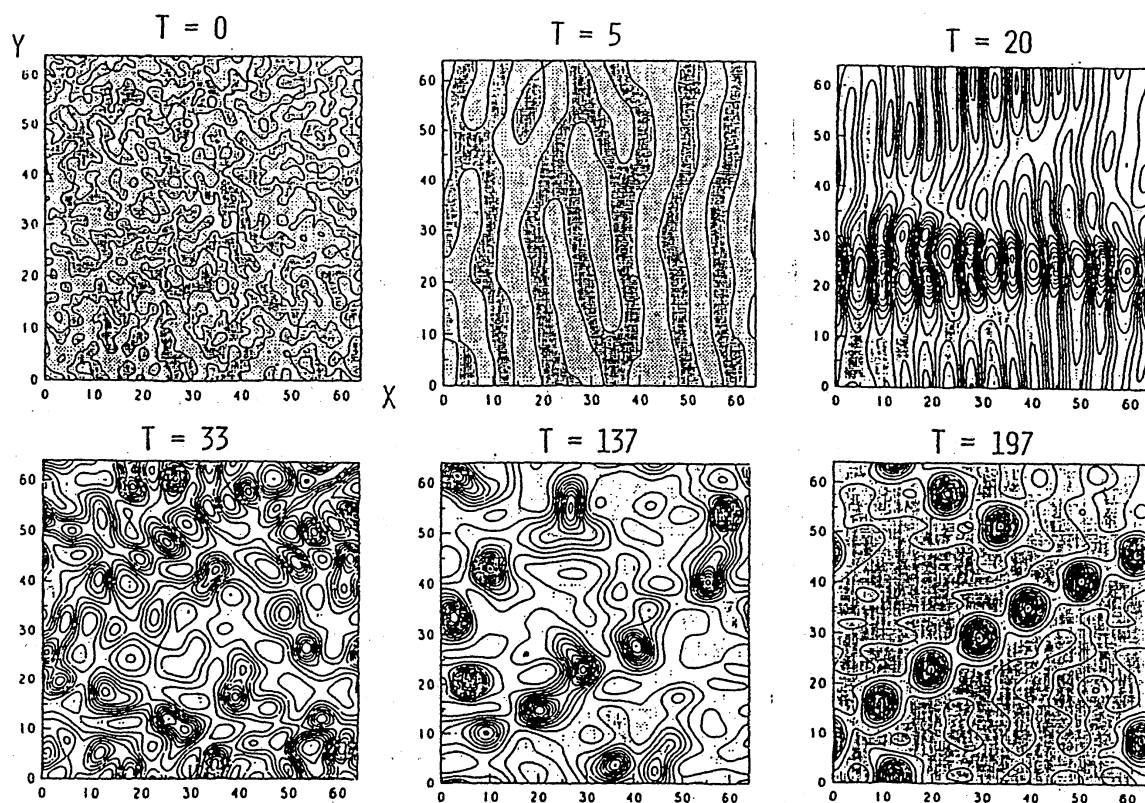


図 1 3。 図 1 2 と同様 (但し $\delta=25$)。 1次元構造の生成、2次元不安定、パルスの生成、ソリトン格子の生成などが見られる。

数値実験の結果、分散性が弱い場合にカオス的となり、強い場合にソリトン格子が形成される点は1次元のBenney方程式の場合と同様である。しかし、基本解となるべき局在パルス解は2次元的な構造を持っているため、それらの重ね合わせによって初期値問題の解を近似する解析はパルス構造の方向依存性も考慮する必要があるため、1次元の場合に比べはるかに難しくなる。図13のソリトン格子でパルスが特定の方向に並ぶのは、パルス構造の方向依存性によるものと思われるが、このような格子パターン形成の理論的検討は今後の課題である。この数値実験によれば、分散性が強くなるほど軸対称に近い釣鐘型のパルスが出現する。このことから、純分散性の極限の2次元方程式で軸対称な釣鐘型ソリトンの存在が予想される。

F. Zakharov-Kuznetsov方程式

2次元Benney方程式の純分散極限として

$$u_t + u_x + u u_x + \Delta u_x = 0 \quad (F-1)$$

$$\sigma = -i k_x + i k_x (k_x^2 + k_y^2) \quad (F-2)$$

を考える。

(E-1)式で δ が大きい極限をとると、KdV方程式の2次元への拡張であるZakharov-Kuznetsov方程式(F-1)となる。1次元ソリトン解を初期条件として時間発展を調べると1次元解は2次元的に不安定となり、軸対称な釣鐘型孤立波を生じる(図14参照)。また、他の初期条件からも釣鐘型孤立波が発生する。(F-1)式は定常進行波解として軸対称な釣鐘型孤立波解をもつが、これは初期値問題で出現する釣鐘型パルスに対応することが示せる。この孤立波解の安定性と相互作用を数値実験で調べた結果は次のようである。単一の釣鐘型孤立波は安定に伝わる。大きさの異なる孤立波は衝突の際に融合するが衝突後は分離し、大きい方はより大きく、小さい方はより小さくなり、さざ波を発生する(図15参照)。同程度の振幅の孤立波は、ある距離まで近づいた時点で融合することなくエネルギーと運動量を交換する。中心線のずれた衝突実験で

も孤立波の衝突は完全に弾性的とはならず、強弱の差はあるがさざ波を発生することが示される。

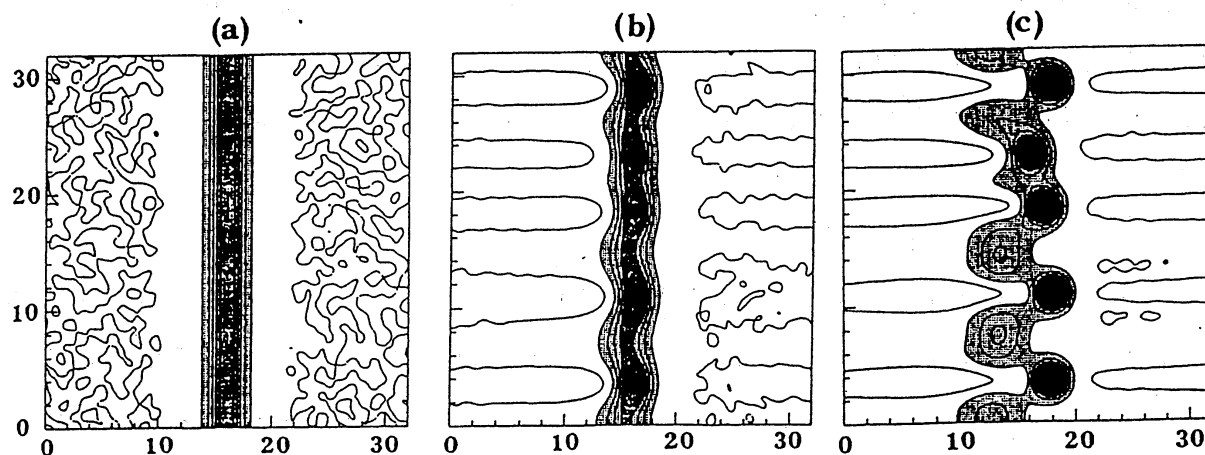


図14。1次元ソリトン解から釣鐘型パルスの生成。(a) $t=0$: KdVソリトン+ランダム攪乱 (b) $t=12$ (c) $t=15$ 。($u \geq 1$ に影をつけて示してある。等高線は $u \leq 10$ は1間隔、 $u > 10$ は2間隔)。

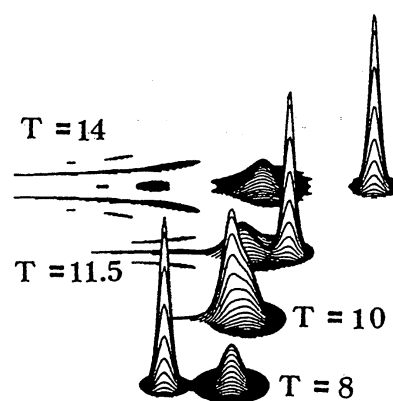
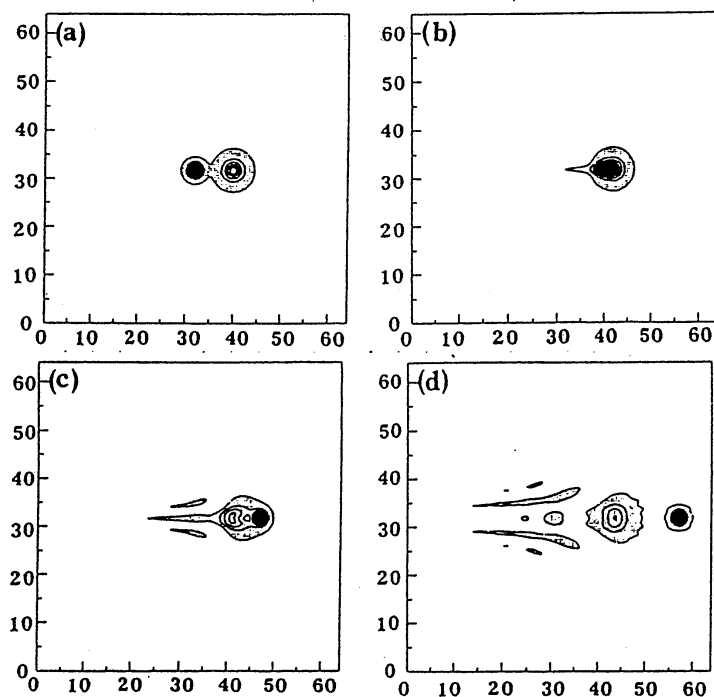


図15。異なる振幅の釣鐘型パルス ($c_1=4$, $c_2=1$) の衝突。等高線図と立体図。(a) $t=8$ (b) $t=10$ (c) $t=11.5$ (d) $t=14$ (立体図は $u \geq 0.1$ の部分のみ表示)。

以上のように、ZK方程式の基本解である軸対称孤立波は、単一では安定であるが、衝突に際しては振幅変化とさざ波の発生を伴うので非保存的である。従って、この孤立波は近似的な意味でのソリトンで”準ソリトン”とでも呼ばれるべきものである。衝突に際しての振幅変化やさざ波の発生の様子を方程式 (F-1) の保存則に基づいて解釈することができる (Iwasaki, Toh & Kawahara(1990)¹⁸⁾)。

G. ドリフト方程式

回転流体系におけるRossby波あるいは磁化プラズマ中のドリフト波の近似方程式であるCharney-Hasegawa-Mima方程式は2次元的に局在した”双極子型の孤立波解 (dipole解)”を持つことが知られている。また、数値実験により、双極子解が衝突に際しても壊れず安定でソリトンの様に振舞うという報告もなされている (Makino, Kamimura & Taniuti(1981)¹⁹⁾)。この方程式の非線形項はJacobianの形で表され(これをベクトル非線形項と呼んでいる)、KdV方程式の非線形項のような対流項 (convective term) (これをスカラー非線形項と呼ぶ) の形とは異なっている。Rossby波やドリフト波の問題で、近似を高めることによって上記の2種の非線形項を含む方程式

$$(1 - \Delta) u_t + u_x + u u_x + (u_y \Delta u_x - u_x \Delta u_y) = 0 \quad (G-1)$$

がPetviashvili(1980)²⁰⁾によって導かれ最近議論されるようになった。この方程式は純分散性方程式であり、 $u u_x$ の項がない場合の

$$(1 - \Delta) u_t + u_x + (u_y \Delta u_x - u_x \Delta u_y) = 0 \quad (G-2)$$

はCharney-Hasegawa-Mima方程式で、双極子型の渦解を持つ。この双極子型の渦解は (G-1) 式の解にはならないが、(G-1) 式には単極子型の解 (monopole解) が存在する。(G-1) 式的双極子解はスカラー非線形項の存在により不安定となること、単極子解が安定となること、単極子解の相互作用における2種の非線形項の役割などを数値実験と保存則とによって明らかにした。図16にベクトル非線形項がある場合とない場合とで単極子解の相互作用の様子が異な

ることを比較して示す (Araki, Toh & Kawahara²¹⁾)。

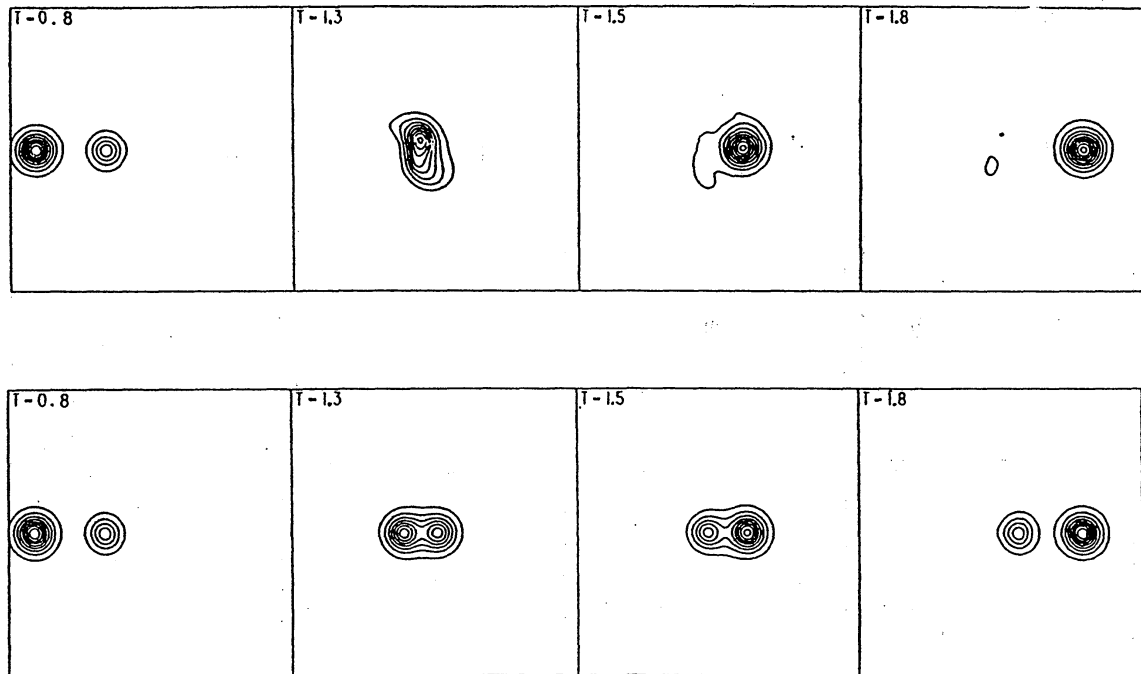


図 16. 単極子解の衝突。 上段：ベクトル非線形項がある場合、パルスは融合する。 下段：ベクトル非線形項がない場合、パルスは弾性的衝突を示しソリトンのである。

H. 2次元RLW方程式

(G-1) 式でベクトル非線形項を落とすと1次元のRegularized-Long-Wave (RLW) 方程式を2次元に拡張した形になる。

$$(1 - \Delta) u_t + u_x + u u_x = 0 \quad (\text{H-1})$$

$$\sigma = -i k_x / (1 + k_x^2 + k_y^2) \quad (\text{H-2})$$

この方程式は (F-1) のZK方程式とよく似ているが、第2項の Δu に時間微分がかかっているところが異なる。このため線形分散関係式はZK方程式の場合と異なる形になるが、2次元ソリトンの可能性を含む方程式である。(H-1) 式は定常進行波解として正または負のピークをもち反対方向に伝わる釣鐘型パル

ス解（単極解）を持っている。そのため孤立波の相互作用としては同符号パルスの追越し衝突と異符号パルスの正面衝突とが考えられる。図17に正面衝突の例を示す。

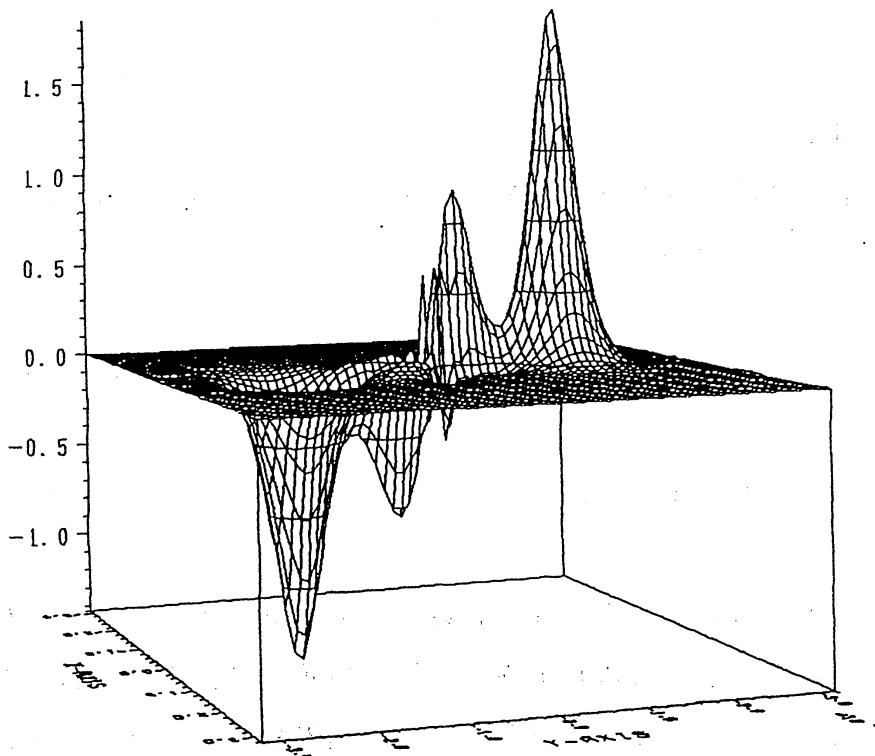
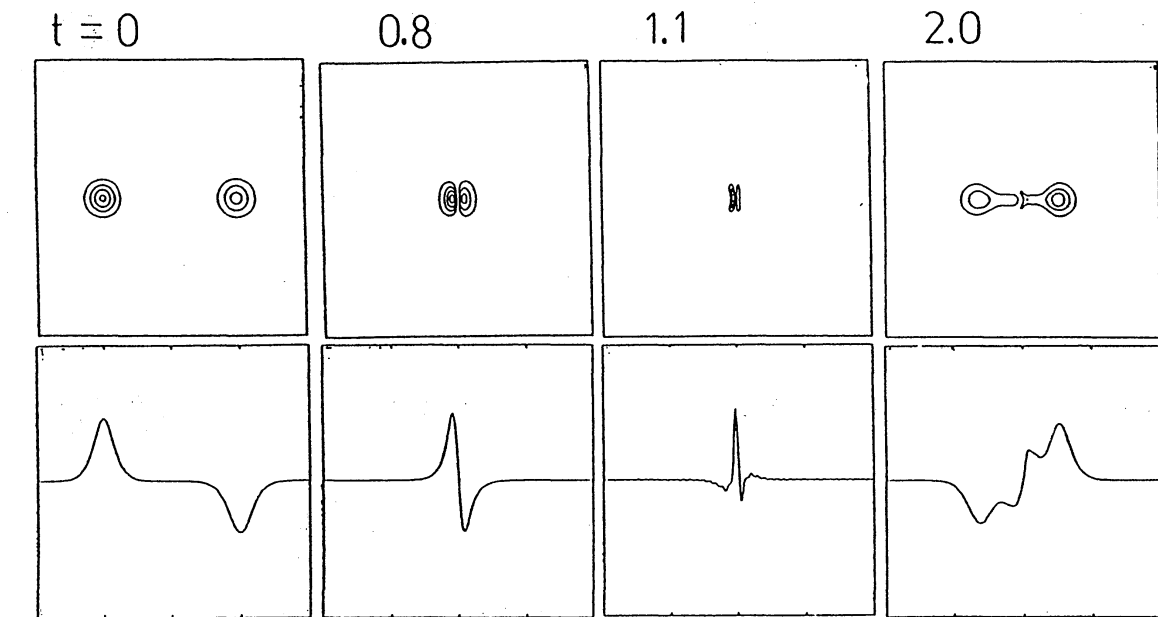


図17。(H-1)式の異符号パルス解の衝突。等高線、断面波形および $t=2.2$ における立体図。 $t=2.2$ において2種の正負パルス対を生じている。

単極解の衝突の数値実験の結果以下のようなことが分かった。単一の孤立波は安定である。同符号の孤立波の追越し衝突はZK方程式の場合より弾性的である。異符号の孤立波の正面衝突の場合、速度の大きさが異なる場合には衝突後近似的に元の大きさに戻り、衝突プロセスはほぼ弾性的と言ってもよい。しかし、速度の絶対値が同じ大きさで、第1番目の保存量である'quasi-mass'を0とするような条件（共鳴条件）を満たす正面衝突の場合には、パルスの衝突によって正負のパルスの対が複数発生する。図17はそのような例であるが、正負のパルスの衝突後2組の正負のパルス対が生じている。このような衝突の数値実験結果の特徴のいくつかは保存則を用いて説明することが出来る（Kawahara, Araki & Toh²²⁾）。

4. おわりに

本報告では、不安定性・散逸性を含む分散性非線形偏微分方程式の解および2次元ソリトンに関して、著者らが行った研究について述べた。偏微分方程式の各項の形のわずかな違いによっても解の発展に大きな差があることを数値実験の結果は示している。まえがきにも述べたように、このことこそが非線形現象の特徴であり、非線形現象が“個別的である”ことを示している。ここでは、本報告で取り扱った場合から言える点のみを二、三述べてまとめたい。

不安定性と散逸性との釣合で決まる一定振幅のパルス解（定常進行波解）は、発展方程式の解の振舞いにおいて重要な役割を果たす。分散性が相対的に強い場合にはソリトンの格子をつくる基本解となり、分散性が弱い場合には波形の変動は激しくなるが、なお近似的（平均的あるいは統計的）な意味でカオス解を構成する要素となり得る。不安定KdV-Burgers方程式の場合のように適当な初期条件を与えたときパルス解が一時的に出現するが漸近的には不安定となることもある。このように、分散関係式の形によって定常進行波解の役割も変わってくるが、一時的であれ漸近的であれ、それらは発展方程式の解の時間発展に何らかの形で関与してくると言える。カオス的な振舞いの場合にも空間構造が認められ、定常進行波解による記述が有効になる場合もあり得る。

次に、空間2次元の場合には、基本解として2次元局在パルスを考える必要が

ある。空間次元の高い場合の数値実験は最近になって試みられるようになったもので、更に数値実験の結果を蓄積すべき段階にある。2次元系において1次元解が2次元不安定を起こすことが多いという状況を考えるならば、実際の物理現象との対応を論ずるためにも空間多次元の研究を行う必要がある。

本稿では、1次元ソリトン方程式の拡張であるZK方程式やRLW方程式のような2次元純分散性非線形方程式のソリトン解として軸対称釣鐘型孤立波が現れることを示した。しかし、数値実験によれば、それらの孤立波解は、衝突に際して振幅変化やさざ波の発生を起こし非保存的である。このように本稿で取り扱った2次元孤立波は1次元の場合のように厳密な意味でのソリトンとはならない。

このことは、実際の物理現象を1次元の結果からの類推によって解釈することには注意が必要であることを示唆している。何れにしても空間2、3次元の問題については数値実験のデータを蓄積していくことが今後の課題であると言えよう。

参考文献

- 1) T.Kawahara: Formation of saturated solitons in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation. Phys.Rev.Lett.51(1983) 381-383.
- 2) T.Kawahara & S.Toh: Pulse interactions in an unstable dissipative-dispersive nonlinear system. Phys.Fluids 31(1988)2103-2111.
- 3) S.Toh: Statistical model with localized structures describing the spatio-temporal chaos of Kuramoto-Sivashinsky equation. J.Phys.Soc. Japan 56(1987)949-962.
- 4) T.Kawahara & M.Takaoka: Chaotic behaviour of soliton lattice in an unstable dissipative dispersive nonlinear system. Physica D 39(1989) 43-58.
- 5) T.Kawahara & M.Takaoka: Chaotic motions in an oscillatory soliton lattice. J.Phys.Soc.Japan 57(1988)3714-3732.
- 6) T.Kawahara and S.Toh: Nonlinear dispersive periodic waves in the presence of instability and damping. Phys.Fluids 28(1985)1636-1638.

- 7) T.Kawahara & S.Toth: Equilibrium solutions in a nonlinear dispersive system with instability and damping. Dynamical Problems in Soliton System (Proc. of Kyoto Summer Institute, Ed.; S.Takeno) Springer-Verlag (1985)153-158.
- 8) T.Kawahara & S.Toth: An approximate equation for nonlinear cross-field instability. Phys.Lett.A 113(1985)21-24.
- 9) T.Kawahara & S.Toth: Nonlinear dispersive waves in unstable dissipative systems. Recent Studies on Turbulent Phenomena(Eds.; T.Tatsumi et al.) Association for Science Documents Information (1985)25-51.
- 10) T.Kawahara, S.Toth & M.Takaoka: Pulse interactions and wave evolutions in an unstable dissipative dispersive system. Proc.IUTAM Symposium on Non-Linear Water Waves(Eds.; K.Horikawa & H.Maruo) Springer-Verlag (1988)190-198.
- 11) T.Kawahara & S.Toth: On some properties of solutions to a nonlinear evolution equation including long-wavelength instability. Contributions to Nonlinear Wave Motion(Ed.; A.Jeffrey) Longman Scientific & Technical (1988)95-117.
- 12) S.Hosoda & T.Kawahara: (under investigation)
- 13) N.R.Pereira & L.Stenflo: Nonlinear Schrödinger equation including growth and damping. Phys.Fluids 20(1977)1733-1734.
- 14) K.Nozaiki & N.Bekki: Exact solutions of the generalized Ginzburg-Landau equation. J.Phys.Soc.Japan 53(1984)1581-1582.
- 15) S.Kishiba, S.Toth & T.Kawahara: An estimation of energy spectra of the Ginzburg-Landau equation. Physica D. accepted for publication.
- 16) M.I.Rabinovich & A.L.Fabrikant: Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media. Sov.Phys.JETP 50(1979)311-317.
- 17) S.Toth, H.Iwasaki & T.Kawahara: Two-dimensionally localized pulses of a nonlinear equation with dissipation and dispersion. Phys.Rev.A 40 (1989)5472-5475.

- 18) H.Iwasaki, S.Toh & T.Kawahara: Cylindrical quasi-solitons of the Zakharov-Kuznetsov equation. *Physica D* 43(1990)293-303.
- 19) M.Makino, T.Kamimura & T.Taniuti: Dynamics of two-dimensional solitary vortices in a low- β plasma with convective motion. *J.Phys. Soc.Japan* 50(1981)980-989.
- 20) V.I.Petviashvili: Red spot of Jupiter and the drift soliton in a plasma. *JETP Lett.* 32(1980)619-622.
- 21) K.Araki, S.Toh & T.Kawahara: Structural stability and roles of two types of nonlinearity in vortex dynamics. (in preperation).
- 22) T.Kawahara, K.Araki & S.Toh: Interactions of two-dimensionally localized pulses of the regularized-long-wave equation. (in preparation).