

質量移動を伴う二粒子系 —ソリトン粒子の力学に向けて

富山大・工 角 畠 浩 (Hiroshi Kakuhata), 佐伯 拓弥 (Takumi Saeki)

Faculty of Engineering, University of Toyama

1 はじめに

ソリトンは衝突しても壊れないパルス状の非線形波で、ソリトン同士の衝突によって軌道が変化した位相シフトが起こることはよく知られている [1]。この挙動のため、ソリトンを粒子ととらえた Skyrme 模型など原子核や素粒子のモデルとしても用いられている [2]。このような見方になって、ソリトンの衝突の際にソリトンを粒子と見なせばソリトン間に力が働いているように見えるであろう。これまでにソリトン解からソリトンの相互作用の様子を再現するソリトン粒子の力学を構成を目指して、外部磁場中の内部電流を持つストリングの運動を記述する連立非分散方程式 [3, 4]

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}), \quad (1)$$

の 2 ソリトンの相互作用に対して effective force とその有効ポテンシャルを求めてきた [6, 7]。ここで、 $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ はストリングの位置ベクトル、 τ は時間、 σ はストリングに沿うパラメータである。

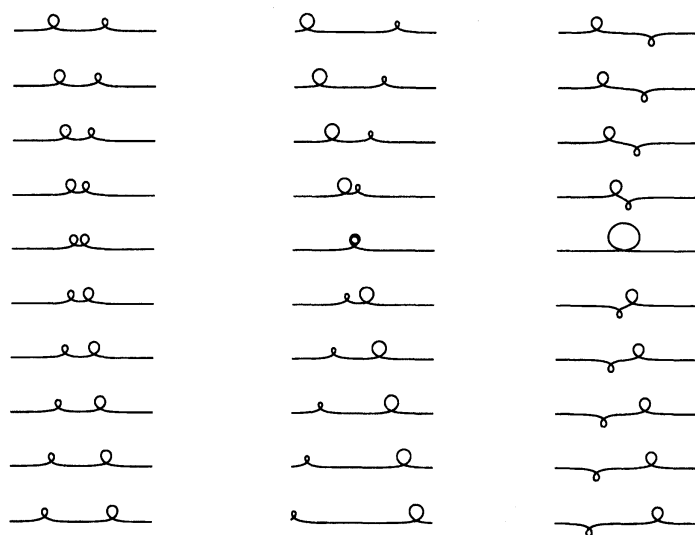


図 1

$v = 0.12,$

$v = 0.24,$

$v = 0.12$

さて、連立非分散方程式のソリトン相互作用においては、位相速度 v と $-v$ で正面衝突するとき、衝突の仕方によって3つのパターンがある。すなわち、正（負）の振幅同士の衝突のときは、小さい相対速度ではソリトン同士が重ならず弾くように衝突し、大きい相対速度では小さいループが大きいループの中を回る。正と負の振幅の衝突のときには、小さいループが一時的に消え、大きいループがさらに大きくなる。ソリトン相互作用におけるソリトンの軌道を追跡してソリトン粒子に作用する力を求めると正（負）の振幅同士では斥力が、正と負の振幅では引力が働くことが判明した。しかし、それぞれのソリトン粒子に作用する力の和が 0 にならず、作用反作用の法則が成立しない [6]。これはソリトンは遠隔作用で相互作用をしないためと考えられ、ポテンシャルで相互作用するような2粒子系では系の並進不変性が破れ、全運動量が保存しなくなる。従来のソリトン粒子の相互作用ではこの点が十分考慮されていないようである [5]。前回までに、この不変性の破れを解消するために運動量を運ぶ「ゲージ場」を2粒子系に導入した [8]。図 1 の様に、連立非分散方程式のソリトンが衝突する際には振幅を交換するし、他の多くのソリトン衝突でも振幅が変化することが観測される。連立非分散方程式に対応する2粒子系に単に「ゲージ場」を導入しただけではソリトンの振幅の交換に対応する記述することはできなかった。ソリトン相互作用において振幅を質量と見なせば、可変質量の粒子に対する2体問題になる。しかし質量を交換する粒子系の相互作用はあまり調べられていないようである。質量を交換するような2体系のモデルを具体的に構成することは可能であろうか？

本稿では、連立非分散方程式のソリトン衝突の挙動を念頭におきながらも、このソリトン相互作用に直接対応する粒子系のモデルを構成するのではなく、質量を交換しながら相互作用する2粒子系の出来るだけ簡単に解析解を持つ toy model の定式化を試みる。

2 跳ね返る 2 粒子系（質量一定）

本節では、質量が一定の2粒子系でどのような相互作用が起こるのかを見る。ここでは2粒子間の相互作用として sech^2 型のポテンシャルにより、主に斥力が働く場合を考察する。初期条件として、図 1 のソリトン相互作用と同様に質量 m_1, m_2 の粒子がそれぞれ速度 v と $-v$ で衝突する場合を考える。すると、粒子の衝突は $t \sim 0$ 付近で起こる（図 2）。

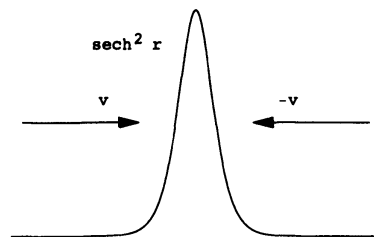


図 2 constant mass particle interaction

このような系はラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - \frac{g}{2}\text{sech}^2 r \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 q_n は各粒子の座標で、記号 $\dot{}$ は時間 t による微分を表し、 r は相対座標

$$r = q_2 - q_1$$

である。重心座標、全質量、換算質量

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2, \\ Q &= \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{M}, \\ \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \end{aligned} \quad (3)$$

を導入すれば、運動方程式

$$\begin{aligned} M\ddot{Q} &= 0, \\ \mu\ddot{r} &= g \text{sech}^2 r \tanh r \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる。重心と相対座標に対する運動方程式とは完全に分離し、よく知られているように重心の運動方程式は自由粒子の運動方程式になる。相対座標に対する運動方程式の解には3つのタイプがあり、運動エネルギーとポテンシャルの高さ g (結合定数) の比であるパラメータ

$$a = \frac{g}{4\mu v^2}$$

により分類される。 $a > 1$ のときは $g > 0$ であり、粒子が跳ね返る解

$$r = \sinh^{-1}(\sqrt{a-1} \cosh 2vt), \quad (5)$$

が存在し、 $a < 1$ では通過型の解で

$$r = \sinh^{-1}(\sqrt{1-a} \sinh 2vt), \quad (6)$$

である。このときには $g < 0$ (引力) の場合を含む。この他に $a = 1$ の互いに無限に近づく解

$$r = \sinh^{-1} e^{2vt}, \quad (7)$$

があるが、本稿では、解 (7) は考察しない。非分散連立方程式では、ソリトン間に斥力が働き、振幅の変化が比較的顕著な図 1 の左の図の様な相互作用に注目するので、特に解 (5) を重視する。

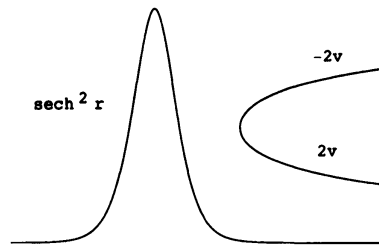


図3 rebounding interaction

3 質量を交換する粒子のモデル

まず可変質量で並進不変性を持つ2ソリトン粒子のモデルとして

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - V(r) \quad (8)$$

で与えられるラグランジアンをまず考える。ここで、 $V(r)$ はポテンシャルであるが、通常とは異なり、 $m_n (n = 1, 2)$ は定数ではない。ただし、全質量 $M = m_1 + m_2$ は定数であるが、質量の差 $m = m_2 - m_1$ は定数ではないとする。質量の挙動を考える前に、運動方程式を考察する。このラグランジアンから得られる運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1\dot{q}_1) &= \frac{dV}{dr}, \\ \frac{d}{dt}(m_2\dot{q}_2) &= -\frac{dV}{dr} \end{aligned} \quad (9)$$

である。これは一見ラグランジアン (2) から得られる運動方程式と同じに見えるが、 m_n が定数ではないため様相が異なる。実際、定数質量の場合と同様に重心座標と換算質量を (3) で定義すると、運動方程式は

$$\begin{aligned} M \frac{d}{dt} \left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M} r \right) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (\mu \dot{r}) &= -\frac{\dot{m}}{2M} \left(M \dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2} r \right) - \frac{dV}{dr} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。定数質量の場合とは異なり、重心座標 Q と相対座標 r に対する式は完全には分離しない。しかし、並進不変性があるため、前者は全運動量の保存則になっているので容易に積分できる。ただし、重心 Q は自由粒子とはならず質量差と相対距離に依存する。この結果を用い質量差 m の関数形を決定すれば後者に対する方程式は r だけの式になる。 m の形にも依るが、このような変数係数の非線形常微分方程式を解くことは一般に困難である。従って、以下では前節の定数質量の解 (5) を解として許容するポテンシャル $V(r)$ を求める、いわゆる逆問題を解くことにする。

方程式を決定し、ポテンシャルあるいは解を求めるには m の関数形が必要である。そのため、質量の挙動を考察しよう。質量差が相対距離の関数、すなわち、 $m_n = m_n(r)$, ($n = 1, 2$) とする

なら、図 3 のような跳ね返り相互作用では質量が元に戻ってしまうので $m_n = m_n(t)$ でなければならない。ソリトン相互作用で弾く場合の様子（図 1 の左の図）から、質量の漸近的振る舞いは

$$m_1 \rightarrow \mu_1, m_2 \rightarrow \mu_2 \text{ as } t \rightarrow -\infty,$$

$$m_1 \rightarrow \mu_2, m_2 \rightarrow \mu_1 \text{ as } t \rightarrow \infty,$$

であると考えられる。ここで μ_1 と μ_2 は衝突前 ($t \rightarrow -\infty$) の粒子の質量で定数である。ただし、図 1 のソリトンの相互作用にあわせて $\mu_1 > \mu_2$ とする。すると、最もナイーブには $\dot{M} = 0$ を満

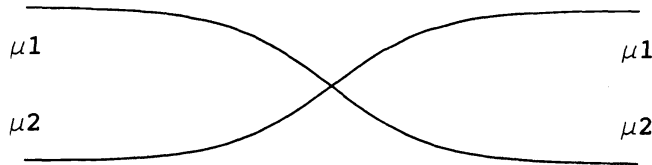


図 4 behavior of mass

足しながら、個々の質量が

$$\begin{aligned} m_1 &= m_1(t) = \frac{M - m(t)}{2}, \\ m_2 &= m_2(t) = \frac{M + m(t)}{2}, \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられ、質量差 m は

$$m = \mu_0 \tanh 2vt, \quad (12)$$

のように振る舞うであろうと予想される。ここで $\mu_0 = \mu_1 - \mu_2$ は初期質量差である。

3.1 質量が力学変数の場合

質量差 m を外から手で与えるのは容易であるが、そのようにして m の関数形を決定してしまえば、一定質量の場合のような運動エネルギーとポテンシャルの高さによって跳ね返る解と通過する解を同時に実現するのは困難であろう。すると m を力学変数として扱えばいいように思える。例えば、上記の予想のように $m \sim \tanh 2vt$ であるとすれば、このような振る舞いをする 2 粒子系としてラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - V(r) + \frac{1}{2}\dot{m}^2 - \frac{\gamma_1}{2}m^2 + \frac{\gamma_2}{4}m^4$$

を考えることができる。ここで、動的質量は (11) であり、 m に関わる結合定数は γ_1 と γ_2 である。ただし、ここでは全ての物理量が無次元化されているものとした。質量差 m に対するポテン

シャルは 4 次の準安定ポテンシャルである。このラグランジアンから導かれる運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m_1\dot{q}_1) &= \frac{1}{2}(M-m)\ddot{q}_1 - \frac{\dot{m}\dot{r}}{2} = \frac{dV}{dr}, \\ \frac{d}{dt}(m_2\dot{q}_2) &= \frac{1}{2}(M+m)\ddot{q}_2 + \frac{\dot{m}\dot{r}}{2} = -\frac{dV}{dr}, \\ \ddot{m} &= -\gamma_1 m + \gamma_2 m^3 - \frac{1}{4}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{4}\dot{q}_2^2\end{aligned}\tag{13}$$

である。これから全運動量の保存則

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{q}_1 + m_2\dot{q}_2) = 0$$

が成立することが直ちにわかる。ここで重心座標, 相対座標, 換算質量 (3) を用いれば, 重心の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(M\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2}r) = 0$$

なので, この式の積分と初期条件から

$$M\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2}r = P_0 = \mu_0 v$$

を得る。相対座標の運動方程式は

$$\mu\ddot{r} + \frac{\dot{m}}{2} \left\{ M\dot{Q} - \frac{1}{2M}(\dot{m}r + 2m\dot{r}) \right\} = \frac{d}{dt}(\mu\dot{r} + \frac{m}{2M}P_0) = -\frac{dV}{dr}$$

である。これが r の運動方程式であるが, m の運動方程式との連立になっているので解くのは困難である。そこでソリトンの運動に対応して, 十分粒子の速度が遅いとして, m に対する粒子 q_n の速度の効果を無視すると, 運動方程式は

$$\ddot{m} = -\gamma_1 m + \gamma_2 m^3,$$

になる。結合定数を

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 4v^2, \\ \gamma_2 &= \frac{4v^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\end{aligned}$$

で与えれば, $m = \mu_0 \tanh 2vt$ がこの解となる。この m のもとで, 定数質量の跳ね返る粒子の解 $r = \sinh^{-1}(\sqrt{a-1} \sinh 2vt)$ (今, $a > 1$ は単なるパラメータとする) が

$$\begin{aligned}M\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2}r &= P_0 = \mu_0 v, \\ \frac{d}{dt}(\mu\dot{r} + \frac{m}{2M}P_0) &= -\frac{dV}{dr}\end{aligned}$$

の解になるようにポテンシャル V を求める。解 (5) を相対座標に対する運動方程式に代入し、

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) = \frac{v^2\sqrt{a-1}\cosh 2vt}{M\sqrt{1+(a-1)\cosh^2 2vt}} \left\{ M^2 - \mu_0^2 - \mu_0^2 \operatorname{sech}^2 2vt (1 - 2\operatorname{sech}^2 2vt) \right. \\ \left. - \frac{(a-1)(\cosh^2 2vt - 1)(M^2 - \mu_0^2 \tanh^2 2vt)}{1 + (a-1)\cosh^2 2vt} \right\}$$

と

$$\frac{\dot{m}}{2M} = \frac{v\mu_0}{M} \operatorname{sech}^2 2vt$$

とになるので、 $\sqrt{a-1}\sinh 2vt$ を $\sinh r$ に置き換えれば

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) = -\frac{v^2}{2M} \{ a(M^2 - a\mu_0^2) \operatorname{sech}^2 r + (a-1)^2 \mu_0^2 \operatorname{cosech} r \}, \\ \frac{\dot{m}}{2M} = -\frac{\mu_0^2 v^2}{M} (a-1) \operatorname{cosech}^2 r$$

を得るので、ポテンシャル V は

$$V = \frac{v^2}{2M} \{ a(M^2 - a\mu_0^2) \operatorname{sech}^2 r + (a-1)^2 \mu_0^2 \operatorname{cosech}^2 r + 2\mu_0^2 (a-1) \coth r \}$$

で与えられるが、 $r=0$ に特異性が現れる。これは無限に高いポテンシャルであり、粒子が通過することはあり得ない。特異性は定数質量の場合の解 (5) が $\cosh 2vt \sim \sinh r$ であることに起因する。これを避けるには例えば、

$$m(t) = \frac{\mu_0 \sinh 2vt}{\sqrt{2 + \cosh^2 2vt}}$$

にすれば、十分大きな t で $m \sim \tanh 2vt$ を満たしつつ、 $\cosh 2vt \sim \sinh r$ でも特異性は現れない。しかし、質量差に関するポテンシャルが 6 次になりやはり準安定であり、このようなモデルでは跳ね返る解を近似的に再現できても、 v が大きくなると m に対する運動方程式で $\dot{q}_n^2$ の項を無視できない。この結果、方程式 (13) を self-consistent に解かねばならず、しかも通過する解は再現できない可能性もある。

3.2 拘束条件による方法

この問題を克服するために、今一度、ラグランジアン (8) に立ち返る。運動方程式は (9) あるいは、(10) で与えられる。前節のモデルでは質量を力学変数として、それに対する運動方程式を与えたが、ここでは m を $\dot{r}$ の関数として拘束条件で与える。一般の場合には $m = m(\dot{r})$ として与えるが、解 (5) の導関数 $\dot{r}$ が漸近的に $\tanh$ であることに着目し、その最も簡単なもの、すなわち、 $m = \frac{\mu_0}{2v} \dot{r}$ とする。このとき、運動方程式は

$$M \left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M} r \right) = M \left(\dot{Q} - \frac{\mu_0}{4vM} \ddot{r} r \right) = P_0, \\ \frac{d}{dt} \left(\mu\dot{r} + \frac{\mu_0}{4vM} P_0 \dot{r} \right) = -\frac{dV}{dr} \quad (14)$$

になる。前節と同様に、解 (5) を代入すれば、

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{av^2\sqrt{a-1}\cosh^2 2vt}{M[1+(a-1)\cosh 2vt]^{5/2}} \{M^2 + \mu_0^2(3a-2) + (a-1)(M^2 - 2\mu_0^2)\cosh^2 2vt\} \quad (15)$$

を得る。再び、解 (5) を逆に用いて、 $\cosh 2vt$ を $\sinh r$ に置き換えて r で積分すればポテンシャルとして

$$V = \frac{av^2}{4M} \operatorname{sech}^2 r \{2(M^2 - 2\mu_0^2) + 3\mu_0^2 a \operatorname{sech}^2 r\} \quad (16)$$

を得る。なお、このポテンシャルは通過型の解 (6) に対しても成立する。今、ポテンシャルを

$$V(r) = g_1 \operatorname{sech}^2 r + g_2 \operatorname{sech}^4 r \quad (17)$$

で与えるとすれば、結合定数 g_1 は free parameter の結合定数で、解 (5) が運動方程式の解であるためには g_2 は

$$g_2 = \frac{3M\mu_0^2}{(M^2 - 2\mu_0^2)^2 v^2} g_1^2$$

の関係を満たさなければならない。このときパラメータ a は

$$a = \frac{2Mg_1}{(M^2 - 2\mu_0^2)^2 v^2}$$

になる。これは定数質量の場合とは異なり、単なる相対運動と結合定数の比ではなく重心運動の効果を含んでいる。

なお、(5) を用いれば、重心 Q に対する解は

$$Q = \frac{\mu_0}{2M} \left\{ \sqrt{a} \tanh^{-1} \frac{\tanh 2vt}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a-1} \sinh 2vt}{\sqrt{1+(a-1)\cosh^2 2vt}} \sinh^{-1}(\sqrt{a-1} \cosh 2vt) \right\} \quad (18)$$

を得ることができる。解 (6) の場合には

$$Q = \frac{\mu_0}{2M} \left\{ \sqrt{a} \tanh^{-1} \frac{\tanh 2vt}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{1-a} \cosh 2vt}{\sqrt{1+(1-a)\sinh^2 2vt}} \sinh^{-1}(\sqrt{1-a} \sinh 2vt) \right\} \quad (19)$$

を得る。

4 Summary

ソリトン粒子の力学を構成することを目指して、質量を交換しながら相互作用する粒子の解析解を持つごく簡単な toy model を構築した。このとき問題設定を逆問題として、定数質量に対する運動方程式 (4) の解 (5) を用いてポテンシャルを求めた。まだソリトンの運動には十分対応しないし、他の可能性もあり得る。質量差 m を力学変数として扱う方法では、 m に対するポテンシャルが準安定なので、質量 m_n が負になってしまうことも考えられる。まだ、改良する可能性は残さ

れているが、 $m \sim 0$ 付近で q_n^2 を無視する近似が有効かは不明であるし、粒子の速度が速い場合にはポテンシャルを決定することは困難である。拘束条件で質量を与えた場合には、跳ね返る解と通過する解の両者に成立するポテンシャルを求めた。しかし、力学系としては完全には閉じておらず、質量を力学変数として扱うことができるかが問題である。このときには拘束条件の整合性が問題となるであろう。さらに、実際のソリトンの運動に適用することが課題となる。

参考文献

- [1] 例えば, M. J. Ablowitz and H. Segur, "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM", SIAM, 1981.
- [2] 例えば, V. G. Makhankov, Y. P. Rybakov, V. I. Sanyuk, "The Skyrme Model: Fundamentals Methods Applications", Springer-Verlag, 1993.
- [3] H. Kakuata and K.Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [4] H. Kakuata and K.Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.
- [5] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, 1993.
- [6] 角島浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」, 数理解析研究所講究録 1701 「波動現象の数理と応用」, p.197, 京都大学数理解析研究所, 2010 年
- [7] 角島浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II」, 数理解析研究所講究録 1761 「非線形波動現象の多様性と普遍性」, p.1118, 京都大学数理解析研究所, 2011 年
- [8] 角島浩, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル III」, 数理解析研究所講究録 1800 「波動現象の研究の新たな進展」, p.120, 京都大学数理解析研究所, 2012 年