

# 非線形作用素の軌道と不動点集合への引き込み写像

お茶大理 澤島侑子 (Ikuko Sawashima)

Banach 空間上の非線形作用素に対する双対の方法について、数理経済の国際学会や関数空間の研究集会などで報告したが [1] [2]、今回はその方法を Lipschitz 連続な作用素の軌道の研究に応用する。 先ず、双対作用素を用いずに容易に得られる次の命題を示す。

**命題**  $E$  が回帰的な Banach 空間とする。 $E$  上の作用素  $T$  は次の条件を満たす；

- (i)  $T$  は弱位相に関して連続、
- (ii)  $\sup \|T^n x\| < \infty$  ( $x \in E$ )
- (iii)  $T^n x - T^{n+1} x \xrightarrow{w} 0$  ( $x \in E$ )

このとき、次が成り立つ；

- (1)  $\bigcup_{x \in E} Cl\{T^n x\} = F(T)$
- (2)  $E$  から  $T$  の不動点集合  $F(T)$  上への写像  $S$  が存在して、

$$ST = TS = S = S^2$$

$$Sx \in Cl\{T^n x\} \quad (x \in E)$$

となる。

- (3)  $T^n x \xrightarrow{w} 0$  ( $x \in E$ ) と  $F(T) = \{0\}$  は同値である。

ただし、 $Cl\{T^n x\} = \bigcap_m [\{T^n x; n \geq m\} \text{ の弱閉包}]$  で  $F(T)$  は  $T$  の不動点全体を表す。

証明にはいる前に、この報告で用いる点列のフィルター極限について説明する。 $N$  を自然数全体とする。 $N$  の部分集合族  $\mathcal{F}$  が  $N$  のフィルターであるとは、 $\mathcal{F}$  が性質；  
 $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F} \ni A, B$ , ならば  $A \cap B \in \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F} \ni A, B \supset A$  ならば  $B \in \mathcal{F}$  を持つことである。  
フィルター  $\mathcal{F}$  がウルトラフィルターであるとは、 $\mathcal{F}$  が極大フィルターで、すべての  $m$  について  $\mathcal{F} \ni \{n; n \geq m\}$  となることである。 $S$  を Hausdorff 位相  $\tau$  を備えた位相空間と

する。 $S$ の点列  $\{s_n\}$  について、 $\mathcal{F}$ がウルトラフィルターであるとき、 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} [\{s_n; n \in F\} \text{ の } \tau\text{-閉包}]$  は空集合またはただ1点よりなる集合である。もし、これがただ1点集合であるとき、この点を  $\mathcal{F}$ による  $\{s_n\}$  の フィルター極限といい、 $\tau\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim s_n$  とかく。すなわち、

$$\tau\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim s_n = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} [\{s_n; n \in F\} \text{ の } \tau\text{-閉包}]$$

である。 $\bigcap_m [\{s_n; n \geq m\} \text{ の } \tau\text{-閉包}]$  を  $s_n$  の  $\tau$ -クラスター集合といい、 $\tau\text{-}Cl\{s_n\}$  と表す。フィルター極限や クラスター集合は位相に関係して定まるが、 $\tau$ -位相によることが明らかなきは、 $\tau$ -を省略する。あきらかに、 $\tau\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim s_n \in \tau\text{-}Cl\{s_n\}$  である。フィルター極限について必要な性質を次にまとめておく。 $\tau$  は省略する (「5」は除く)。

「1」  $\mathcal{F}\text{-}\lim s_n = s$  であるための必要十分な条件は任意の近傍  $U(s)$  に対して、 $\{n; s_n \in U(s)\}$  が  $\mathcal{F}$  に属することである。

「2」  $\lim s_n$  が存在することと、すべての ウルトラフィルター  $\mathcal{F}$  に対して  $\lim s_n = \mathcal{F}\text{-}\lim s_n$  となることとは同値である。

「3」  $\{s_n\}$  が コンパクト集合  $K$  に含まれるならば、任意の ウルトラフィルター  $\mathcal{F}$  に対して  $\mathcal{F}\text{-}\lim s_n$  が存在する

「4」  $Cl\{s_n\} = \{\mathcal{F}\text{-}\lim s_n; \text{ウルトラフィルター } \mathcal{F}\}$

「5」  $S'$  を Hasdorff 空間 (位相  $\tau'$ ) とし、 $\psi$  を  $S$  から  $S'$  への連続な写像とする。このとき、

$$\psi(\tau\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim s_n) = \tau'\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim \psi(s_n)$$

「6」  $S$  が線形構造を持つとき、フィルター極限もその線形性を保存し、 $S$  が束 (lattice) 構造を持つとき、フィルター極限もその束演算を保存する。ただし、Banach 極限が持つ ‘ずらし’ についての不変性は持たない。

**証明** 条件 (ii) より  $\sup \|T^n x\| = M < \infty$  とおけば、 $\{T^n x\}$  は 0 を中心とする半径  $M$  の閉球  $B_M$  に含まれる。 $E$  の回帰性により  $B_M$  は弱コンパクトである。従って  $N$  の任意の ウルトラフィルター  $\mathcal{F}$  に対して、 $w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^n x$  ( $x \in E$ ) が存在する。このフィ

ルター極限を  $x$  に対して  $Sx$  と定める。ただちに  $Sx \in w\text{-}Cl\{T^n x\}$  を得る。 $T$  の弱連続性により、 $TSx = w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{n+1}x = STx$  となり、条件 (iii) により、

$$w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{n+1}x = w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^n x = Sx$$

となる。よって、

$$STx = TSx = Sx = S^2x$$

である。また、 $F(T) \ni y$  ならば  $Ty = y$  で、従って  $Sy = y$  となる。すなわち、 $S$  は  $E$  から  $F(T)$  上への写像である。上記 フィルター極限の性質によって、(1) 及び (3) も明らかである。よって、この命題が証明された。

次に、Banach 空間の回帰性を仮定しない場合を考える。非線形作用素に対する双対の方法を用いるために、非線形作用素に対する双対空間等を簡単に説明する。

Banach 空間  $E$  の通常の双対空間を  $E^*$  で表す。 $L(E)$  を  $E$  上の Lipschitz 連続、かつ、 $0$  で  $0$  をとる作用素の全体とする。 $L(E)$  に属する作用素を扱う場合の双対空間として  $E$  上の Lipschitz 連続、 $0$  で  $0$  をとる汎関数の全体を  $E^\#$  とする。 $x^\# \in E^\#$  のノルム  $\|x^\#\|_L$  を  $x^\#$  の Lipschitz 係数によって定める。すなわち；

$$\|x^\#\|_L = \inf\{c; |x^\#(x) - x^\#(y)| \leq c\|x - y\| \quad x, y \in E\}$$

同様に  $L(E) \in T$  に対して、ノルム  $\|T\|_L$  を  $T$  の Lipschitz 係数によって定める。 $E^\#$  は  $E^*$  を閉部分空間に持つ Banach 空間となり、 $E^\#$  の閉球は  $\sigma(E^\#, E)$ -位相に関してコンパクトとなる。この  $E^\#$  を便宜的に Lipschitz 双対空間と呼ぶ。 $L(E) \in T$  に対して、 $T$  の双対作用素  $T^\#$  を

$$T^\#x^\#(x) = x^\#(Tx) \quad (x \in E, x^\# \in E^\#)$$

と定義する。 $T^\#$  は  $E^\#$  上の有界線形作用素となる。 $E^{\#*}$  は Banach 空間  $E^\#$  の通常の双対空間を、 $T^{\#*}$  は  $T^\#$  の通常の双対作用素を表す。また  $Q$  を  $E$  から  $E^{\#*}$  への埋め込み写像、すなわち、 $x \in E$  に対して

$$Qx(x^\#) = x^\#(x) \quad (x^\# \in E^\#)$$

とする。詳細は [1], [2] 参照。

**定理**  $T$  は Banach 空間  $E$  上の Lipschitz 連続、かつ  $T0 = 0$  となる作用素で、つぎの条件 (i) と (ii) をみたすとする；

$$(i) \sup \|T^n\|_L < \infty$$

(ii)  $N$  のあるウルトラフィルタ- $\mathcal{F}$  について

$$w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim(T^n x - T^{n+1}x) = 0 \quad (x \in E)$$

このとき、

(1)  $\mathcal{F}$  に対して、次の性質を持つ  $E^\#$  上の有界線形作用素  $P^*$  が定義できる；

$$(a) P^*Qx(x^*) = T^\#P^*Qx(x^*) = P^{*2}Qx(x^*) \quad (x \in E, x^* \in E^*)$$

$$(b) T^\#P^* = P^*T^\#$$

$$(c) P^*Qx = \sigma(E^\#, E^\#)\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{\#*n}Qx$$

$$\in \bigcap_m [\{T^{\#*n}Qx; n \geq m\} \text{ の } \sigma(E^\#, E^\#)\text{-閉包}] \quad (x \in E)$$

(2)  $A = \{x; P^*Qx \in QE\}$  となると、 $A$  の元  $x$  に対して  $P^*Qx = QSx$  によって  $A$  上の作用素  $S$  が定義され、 $S$  は  $A$  から  $T$  の不動点集合  $F(T)$  上への Lipschitz 連続な引き込み写像となる。すなわち、

$$(d) S \text{ の値域} = F(T)$$

$$(e) TS = S = S^2$$

さらに

$$(f) A \text{ は } T\text{-不変で、} TS = ST|_A$$

$$(g) Sx \in \|\cdot\| - Cl\{T^n x\} \quad (x \in A)$$

が成り立つ。

**証明** Lipschitz 双対空間  $E^\#$  には局所凸位相  $\sigma(E^\#, E)$  が考えられる。この位相を簡単に  $w^\#$  で表す。仮定 (i) と双対作用素の性質  $(T^n)^\# = T^{\#n}$ ,  $\|T^n\|_L = \|T^{\#n}\|$  とによって、 $M = \sup \|T^n\|_L$  とおけば  $\|T^{\#n}x^\#\|_L \leq M\|x^\#\|_L$  すなわち、 $x^\#$  の  $T^\#$  による軌道  $T^{\#n}x^\#$  は半

径  $M\|x^\sharp\|_L$  の閉球の中にある。条件 (ii) におけるウルトラフィルター  $\mathcal{F}$  を固定する。 $E^\sharp$  の閉球の  $w^\sharp$ -コンパクト性により

$$P^\sharp x^\sharp = w^\sharp\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n} x^\sharp \quad (x^\sharp \in E^\sharp)$$

が定義できる。明らかに、 $\|Px^\sharp\|_L \leq M\|x^\sharp\|_L$  で、 $T^\sharp$  の線形性により  $P$  も  $E^\sharp$  上の有界線形作用素となる。 $T^\sharp$  の  $w^\sharp$ -連続性とフィルター極限の性質とにより

$$T^\sharp Px^\sharp(x) = \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n+1} x^\sharp(x) = PT^\sharp x^\sharp(x) \quad (x \in E, x^\sharp \in E^\sharp)$$

が成り立つ。また、仮定 (ii) により、

$$\begin{aligned} T^\sharp Px^\star(x) &= \mathcal{F}\text{-}\lim \{T^{\sharp n+1} x^\star(x)\} \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n} x^\star(x) - \mathcal{F}\text{-}\lim \{T^{\sharp n} x^\star(x) - T^{\sharp n+1} x^\star(x)\} \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n} x^\star(x) - \mathcal{F}\text{-}\lim \{x^\star(T^n x - T^{n+1} x)\} \\ &= Px^\star(x) \end{aligned} \quad (x \in E, x^\star \in E^\star)$$

よって、 $T^\sharp Px^\star = Px^\star$  となり、このことから

$$P^{\star 2} x^\star = w^\sharp\text{-}\lim T^{\sharp n} Px^\star = Px^\star \quad (x^\star \in E^\star)$$

も直ちに得られる。従って、この  $E^\sharp$  上の有界線形作用素  $P$  の通常の双対作用素を  $P^\star$  とすれば結論の、(1) の (a), (b) は明かである。(c) を示そう。 $Qx$  は  $E^\sharp$  上の  $w^\sharp$ -連続な汎関数であるから、

$$\begin{aligned} P^\star Qx(x^\sharp) &= Qx(Px^\sharp) = Qx(w^\sharp\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n} x^\sharp) \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim Qx(T^{\sharp n} x^\sharp) = \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp \star n} Qx(x^\sharp) \\ &= \{\sigma(E^{\sharp \star}, E^\sharp) - \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp \star n} Qx(x^\sharp)\} \end{aligned}$$

がすべての  $x \in E$  と  $x^\sharp \in E^\sharp$  について成り立つ。よって、「4」より

$$P^\star Qx \in \bigcap_m [\{T^{\sharp \star n} Qx; n \geq m\} \text{ の } \sigma(E^{\sharp \star}, E^\sharp)\text{-閉包}] \quad (x \in E)$$

が成り立つ。以上で (1) が証明された。

$A \ni x$  とする。(1) の (a) より、

$$\begin{aligned} x^\star(Sx) &= QSx(x^\star) = P^\star Qx(x^\star) = T^{\sharp \star} P^\star Qx(x^\star) \\ &= T^{\sharp \star} QSx(x^\star) = QSx(T^\sharp x^\star) = x^\star(TSx) \end{aligned} \quad (x^\star \in E^\star)$$

よって  $S = TS$  かつ、 $Sx \in F(T)$ 。また、(1) の (b) より

$$P^*QT_x = P^*T^{\sharp*}Qx = T^{\sharp*}P^*Qx = T^{\sharp*}QSx = QTSx$$

となり、 $Tx \in A$  で  $TS = ST|_A$  が得られた。次に、 $y \in F(T)$  ならば、 $T^{\sharp*}Qy = QTy = Qy$  となり、従って、(c) より  $P^*Qy = Qy$  を得る。よって、 $Sy = y$  で  $S$  は  $F(T)$  上への写像となり、同時に、 $x \in A$  に対して  $SSx = Sx$  も得られ、(d), (e), (f) が証明された。

(g) を示すために再び (c) を用いる。  $A \ni x$  とする。

$$QSx = \sigma(E^{\sharp*}, E^{\sharp})\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp*n}Qx$$

である。いま、特に  $\psi(y) = \|y - Sx\| - \|Sx\|$  とすれば、 $\psi \in E^{\sharp}$  となるので、

$$\begin{aligned} -\|Sx\| &= QSx(\psi) = \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp*n}Qx(\psi) = \mathcal{F}\text{-}\lim \psi(T^n x) \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim (\|T^n x - Sx\| - \|Sx\|) \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim \|T^n x - Sx\| - \|Sx\| \end{aligned}$$

よって、 $\mathcal{F}\text{-}\lim \|T^n x - Sx\| = 0$

すなわち、 $Sx = \|\|\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^n x$

となり、「4」より  $Sx \in \|\|\text{-}Cl\{T^n x\}$  が得られ、定理の証明が完了する。

系 定理に於いて、条件 (ii) を強め、

(ii)'  $N$  のあるウルトラフィルター  $\mathcal{F}$  に対して

$$\mathcal{F}\text{-}\lim \{x^{\sharp}(T^n x) - x^{\sharp}(T^{n+1}x)\} = 0$$

$$(x \in E, x^{\sharp} \in E^{\sharp})$$

を仮定すれば、 $P^*$  は性質

$$T^{\sharp*}P^* = P^*T^{\sharp*} = P^* = P^{*2}$$

を持ち、すなわち、 $E^{\sharp*}$  から  $F(T^{\sharp*})$  上への引き込み写像となる。

## 参考文献

- [1] I.Sawashima; *Methods of Duals in Nonlinear Analysis*, Nonlinear and Convex Analysis in Economic Theorey, Lecture note in Economics and Mathematical systems,

Springer, vol. 419(1995), 247-259.

- [2] I.Sawashima; *Ergodicity of Lipschitz dual operator*, 第2回関数空間セミナー報告集, (1994), 72-78.