

正規新谷 L 関数と総実代数体のヘッケ L 関数について

広瀬稔 (MINORU HIROSE)

京都大学大学院理学研究科

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY

本稿では正規新谷 L 関数の理論、特に正規新谷 L 関数の関数等式及び正規新谷 L 関数を用いたヘッケ L 関数の構成について解説する。正規新谷 L 関数は、新谷卓郎が総実代数体のヘッケ L 関数の研究のために導入した新谷ゼータ関数 [1] の類似物となっている。正規新谷 L 関数の新谷ゼータ関数にない著しい特徴の一つは関数等式の存在である。1 節では正規新谷 L 関数の $n = 1$ の場合である Hurwitz-Lerch ゼータ関数について説明を行い、2 節で正規新谷 L 関数の定義と関数等式を紹介し、3 節では総実代数体のヘッケ L 関数との関係について述べる。

記号

ベクトル空間 V に対し $V(R) = V \otimes R$ とおく。また $\mathcal{S}(V(R))$ で $V(R)$ 上の Schwartz-Bruhat 関数全体を表す。また $e(z) = e^{2\pi iz}$ とする。また $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ 、 $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ とする。

1. HURWITZ-LERCH ゼータ関数

ここでは正規新谷 L 関数への導入として、最も簡単な場合である Hurwitz-Lerch ゼータ関数の性質について纏める。実数 $0 < x, y < 1$ と複素変数 s 、及び $\sigma \in \{0, 1\}$ に対し Hurwitz-Lerch ゼータ関数は以下の級数で定義される。

$$L_{\sigma}(s, x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x+m) \frac{e(my)}{|x+m|^s}$$

$L_{\sigma}(s, x, y)$ は複素平面全体に正則関数として解析接続される。 $L_{\sigma}(s, x, y)$ は関数等式を持つ。完備化を

$$\hat{L}_{\sigma}(s, x, y) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\sigma)L_{\sigma}(s, x, y)$$

で定義する。このとき関数等式は以下の式で与えられる。

$$(1.1) \quad \hat{L}_{\sigma}(s, x, y) = i^{\sigma} e(-xy) \hat{L}_{\sigma}(1-s, y, 1-x)$$

さてここで特に x, y が有理数となる場合を考えよう。この時 $\Phi_{x,y} \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_f)$ を

$$\Phi_{x,y}(v) = \begin{cases} e(my) & \exists m \in \mathbb{Z}, v = x+m \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定める。また

$$L_{\sigma}(s, \Phi) = \sum_{v \in \mathbb{Q}} \operatorname{sgn}(v)^{\sigma} \frac{\Phi_{x,y}(v)}{|v|^s}$$

とすると、 $L_{\sigma}(s, x, y)$ は

$$L_{\sigma}(s, x, y) = \sum_{v \in \mathbb{Q}} \operatorname{sgn}(v)^{\sigma} \frac{\Phi_{x,y}(v)}{|v|^s}$$

と書ける。 $L_\sigma(s, \Phi)$ は一般の Φ について定義可能だが、ここでは正則性条件 $\Phi(0) = \hat{\Phi}(0) = 0$ を満たす場合のみを考える。 $\Phi_{x,y}$ の逆フーリエ変換 $\hat{\Phi}_{x,y}$ は

$$\hat{\Phi}_{x,y} = e(-xy) \Phi_{y,1-x}$$

で与えられるので (1.1) は次の形になる。

$$\hat{L}_\sigma(s, \Phi_{x,y}) = i^{-\sigma} \hat{L}_\sigma(1-s, \hat{\Phi}_{x,y})$$

実はより一般に

$$\hat{L}_\sigma(s, \Phi) = i^{-\sigma} L_\sigma(1-s, \hat{\Phi})$$

が成立する。

$L_\sigma(s, \Phi)$ の積分表示についても求めておく。実は一般の正規新谷 L 関数は、Dirichlet 級数表示を持たず積分表示のみで定義されている。正則性条件を満たす $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_f)$ に対し $F(\Phi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を級数

$$F(\Phi)(t) = \sum_{v \in V} \Phi(v) e(itv)$$

の解析接続として定義する。このとき

$$L_\sigma(s, \Phi) = \frac{2}{\Gamma_{\mathbb{C}}(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t)^\sigma |t|^s F(\Phi)(t) \frac{dt}{t}$$

が成立する。

$L_\sigma(s, \Phi)$ と Dirichlet L 関数の関係について述べる。 $\chi = \prod_v \chi_v$ をイデール類群の指標する。このとき $\Phi_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ を χ_p が不分岐のとき

$$\Phi_p(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z}_p \\ 0 & x \notin \mathbb{Z}_p \end{cases}$$

χ_p が分岐の時

$$\Phi_p(x) = \begin{cases} \chi_p^{-1}(x) & x \in \mathbb{Z}_p^\times \\ 0 & x \notin \mathbb{Z}_p^\times \end{cases}$$

として定める。 $\Phi_\chi = \prod_p \Phi_p \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_f)$ と置く。 Φ_χ は

$$\Phi_\chi(x) = \begin{cases} \chi_\infty(x) \chi((x)) & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

を満たす。また σ を χ が偶指標のとき 0、奇指標のとき 1 とする。Dirichlet L 関数 $L_\chi(s)$ は

$$\begin{aligned} L_\chi(s) &= \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \chi((m)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \text{sgn}(m)^\sigma \Phi_\chi(m) \\ &= \frac{1}{2} L_\sigma(s, \Phi_\chi) \end{aligned}$$

で与えられる。また Dirichlet L 関数の関数等式は $L_\sigma(s, \Phi)$ の関数等式及び Φ_χ のフーリエ変換から従う。

2. 正規新谷 L 関数の定義

V を $\mathbb{Q}$ 上の n 次元ベクトル空間、 $MAP(V, \mathbb{C})$ を V から $\mathbb{C}$ への関数の集合とする。 $w \in V$ に対し作用素 $\Delta_w : MAP(V, \mathbb{C}) \rightarrow MAP(V, \mathbb{C})$ を

$$(\Delta_w f)(v) = f(v - w)$$

で定義する。 $X(V)$ を $\{\Delta_w \mid w \in V\}$ で生成される $\mathbb{C}$ 代数としよう。 $\mathcal{U}'(V) \subset MAP(V, \mathbb{C})$ を V 上の有限個の点でのみ 0 でない値をとる関数全体の集合とし、 $\mathcal{U}(V) \subset MAP(V, \mathbb{C})$ をある $\Delta \in X(V) \setminus \{0\}$ が存在して $\Delta(f) \in \mathcal{U}'(V)$ となるような関数 f の集合とする。ここで $f \in \mathcal{U}(V)$ に対して $V^*(\mathbb{C})$ 上の正則関数 F_f を

$$(2.1) \quad F_f(t) = \sum_{v \in V} f(v) e(i \langle t, v \rangle)$$

で定義したい。ただしこのままでは収束の問題が発生するため、以下のように定義することにする。まず $f \in \mathcal{U}'(V)$ に対しては式 2.1 が有限和となるのでそのまま定義できる。 $\mathbb{C}$ 代数の準同型 $P : X(V) \rightarrow \mathcal{M}(V(\mathbb{C}))$ を $P(\Delta_w)(t) = e(i \langle t, w \rangle)$ で定める。 $f \in \mathcal{U}(V)$ に対しては、 $\Delta(f) \in \mathcal{U}'(V)$ となる $\Delta \in X(V) \setminus \{0\}$ を用いて

$$F_f = \frac{F_{\Delta f}}{P(\Delta)}$$

と定義する。 $f \in \mathcal{U}(V)$ を $F_f \in \mathcal{S}(V(\mathbb{R}))$ となる元、 $\rho : V(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ を同型写像、 $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ を写像、 $\mathbf{s} = (s_\mu)_{\mu=1}^n$ を実部が全て正となる複素数の組とし、複素関数 $L_\sigma(\mathbf{s}, f, \rho)$ を

$$L_\sigma(\mathbf{s}, f, \rho) = \frac{2^n}{\Gamma_{\mathbb{C}}(s_1) \cdots \Gamma_{\mathbb{C}}(s_n)} \int_{\mathbb{R}^n} F_f((\rho^*)^{-1}(t_1, \dots, t_n)) |t|_{\sigma}^{\mathbf{s}} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n}$$

で定める。ただし

$$|t|_{\sigma}^{\mathbf{s}} = \prod_{1 \leq \mu \leq n} \left(\frac{t_{\mu}}{|t_{\mu}|} \right)^{\sigma(\mu)} |t_{\mu}|^{s_{\mu}}$$

と置いた。また完備化を

$$\begin{aligned} \hat{L}_\sigma(\mathbf{s}, f, \rho) &= \Gamma_\sigma(\mathbf{s}) L_\sigma(\mathbf{s}, f, \rho) \\ &= L_\sigma(\mathbf{s}, f, \rho) \prod_{\mu=1}^n \Gamma_{\mathbb{R}}(s_{\mu} + \sigma(\mu)) \end{aligned}$$

で定める。 $f \in \mathcal{U}(V)$ に対し $\bar{f} \in \mathcal{U}(V^*)$ が存在して $F(f)$ のフーリエ変換が $F(\bar{f})$ で与えられるとしよう。このとき次の関数等式が成立する。

$$(2.2) \quad \hat{L}_\sigma(\mathbf{s}, f, \rho) = i^{n-\sigma(1)-\cdots-\sigma(n)} \hat{L}_\sigma(1 - \mathbf{s}, \bar{f}, \rho^*)$$

正規新谷 L 関数は $L_\sigma(\mathbf{s}, f, \rho)$ の特別な場合である。新谷 L 関数の定義に必要な fan の定義を行う。 V 上の n 次元 fan とは $\Lambda(u_1, \dots, u_n)$ ($u_1, \dots, u_n \in V \setminus \{0\}$) という形で書かれる形式的な記号の $\mathbb{Z}$ -係数線形和である。 V 上の n 次元 fan のなす $\mathbb{Z}$ 加群を $C_n(V)$ で表す。 $\mathbb{B} \in C_n(V)$ に対し、その特性関数 $\mathfrak{C}(\mathbb{B}) : V \rightarrow \mathbb{Z}$ を以下で定める。まず $\Lambda(u_1, \dots, u_n)$ に対しては $u_1, \dots, u_n$ が一次従属となる場合は 0、一次従属となる場合は

$$\mathfrak{C}(\Lambda(u_1, \dots, u_n))(t_1 u_1 + \cdots + t_n u_n) = \begin{cases} 1 & \min(t_1, \dots, t_n) > 0 \\ 0 & \min(t_1, \dots, t_n) \leq 0 \end{cases}$$

とする。これを線形に拡張して $\mathfrak{C}(\mathbb{B})$ を定義する。また duality map $\varphi : C_n(V) \rightarrow C_n(V^*)$ を

$$\varphi(\Lambda(u_1, \dots, u_n)) = \Lambda(v_1, \dots, v_n)$$

で定める準同型として定める。ただし $v_1, \dots, v_n$ は $u_1, \dots, u_n$ の双対基底とする。また $u_1, \dots, u_n$ が一次従属の場合は $\varphi(\Lambda(u_1, \dots, u_n)) = 0$ とする。さて $\Phi \in \mathcal{S}(V(\mathbb{A}_f))$ と $\mathbb{B} \in C_n(V)$ に対して、 $\Phi \mathfrak{C}(\mathbb{B}) \in \text{MAP}(V, \mathbb{C})$ を $(\Phi \mathfrak{C}(\mathbb{B}))(v) = \Phi(v) \cdot \mathfrak{C}(\mathbb{B})(v)$ で定めると $\Phi \mathfrak{C}(\mathbb{B}) \in \mathcal{U}'(V)$ となるが、

$$F(\Phi \mathfrak{C}(\mathbb{B})) \in \mathcal{S}(V^*(\mathbb{R}))$$

となるとは限らない。 $(\Phi, \mathbb{B})$ が正則性条件と呼ばれる条件を満たしている時は $F(\Phi \mathfrak{C}(\mathbb{B})) \in \mathcal{S}(V^*(\mathbb{R}))$ となる。また、そのとき

$$L_\sigma(s, \Phi, \mathbb{B}, \rho) = L_\sigma(s, \Phi \mathfrak{C}(\mathbb{B}), \rho)$$

$$\hat{L}_\sigma(s, \Phi, \mathbb{B}, \rho) = \hat{L}_\sigma(s, \Phi \mathfrak{C}(\mathbb{B}), \rho)$$

とおく。これが正規新谷 L 関数の定義である。ここでフーリエ変換に関する次の公式

$$\hat{F}(\Phi, \mathbb{B}) = i^{-n} F(\hat{\Phi}, \varphi(\mathbb{B}))$$

と (2.2) より、次の関数等式が成立する:

$$\hat{L}_\sigma(s, \Phi, \mathbb{B}, \rho) = i^{-\sigma(1) - \dots - \sigma(n)} \hat{L}_\sigma(1-s, \hat{\Phi}, \varphi(\mathbb{B}), \rho^*)$$

3. ヘッケ L 関数との関係

K を n 次の総実代数体、 $\chi = \prod_v \chi_v$ を K のヘッケ指標とする。簡単のため χ が類指標となる場合だけを考える。このとき $\Phi_v \in \mathcal{S}(K_v)$ を χ_v が不分岐のとき

$$\Phi_v(x) = \begin{cases} 1 & x \in r_v \\ 0 & x \notin r_v \end{cases}$$

χ_v が分岐の時

$$\Phi_v(x) = \begin{cases} \chi_v^{-1}(x) & x \in r_v^\times \\ 0 & x \notin r_v^\times \end{cases}$$

として定める。さらに $\Phi_\chi = \prod_v \Phi_v$ とおく。また分数イデアル $\mathfrak{b} = \prod_v \mathfrak{p}_v^{f_v}$ に対し $I(\mathfrak{b}) \subset K(\mathbb{A}_f)^\times$ を

$$I(\mathfrak{b}) = \prod_v (\pi_v^{f_v} r_v^\times)$$

で定め、 $\Phi_{\chi, \mathfrak{b}} \in \mathcal{S}(K(\mathbb{A}_f))$ を $b \in I(\mathfrak{b})$ を用いて $\Phi_{\chi, \mathfrak{b}}(x) = \chi(b) \Phi_\chi(bx)$ と定める。これは b の選び方によらない。このとき $\hat{\Phi}_{\chi, \mathfrak{b}} = N(b) k(\chi) \Phi_{\chi^{-1}, \mathfrak{m} \mathfrak{b}^{-1}}$ が成立する。 $\mathfrak{m}$ を χ の導手、 $I_{\mathfrak{m}}$ を $\mathfrak{m}$ と互いに素な分数イデアルのなす群とし $\chi_I : I_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を χ に付随する指標とする。また $I_{\mathfrak{m}}$ 以外の元に対しては χ_I の値は 0 としておく。このとき

$$\chi_\infty^{-1}(x) \Phi_{\chi, \mathfrak{b}}(x) = \begin{cases} \chi_I(x \mathfrak{b}) & x \in \mathfrak{b}^{-1} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

が成立する。 $\mathbb{D}$ を $\mathbb{R}_{>0}^n$ を総正単数群 $O_{K,+}^\times$ で割った基本領域に対応するような fan とする。一般に $(\Phi, \mathbb{D})$ は必ずしも正則性条件を満たさないため、regularization と呼ばれる補正が必要になるが、ここでは簡単のため $(\Phi, \mathbb{D})$ が正則性条件を満たす場合

だけを考える。 $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ を χ_μ が偶のとき $\sigma(\mu) = 0$ 、奇の時 $\sigma(\mu) = 1$ として定める。このときイデアル $\mathfrak{b}$ を含むイデアル類 C と、そのヘッケ L 関数

$$L_\chi(s, C) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in C \\ \mathfrak{a} \subset O_K}} \chi_I(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}$$

に対し次が成立する。

$$L_\chi(s, C) = \#(O_K^\times / O_{K,+}^\times)^{-1} N(\mathfrak{b})^{-s} L_\sigma((s, \dots, s), \Phi_{\chi, \mathfrak{b}}, \mathbb{D})$$

REFERENCES

- [1] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 23 (1976), no. 2, 393–417.
- [2] Minoru Hirose and Nobuo Sato, On the functional equation of the normalized Shintani L-function of several variables. preprint. available at <http://arxiv.org/abs/1310.7716>.
- [3] Minoru Hirose, On the theory of normalized Shintani L-function and its application to Hecke L-function. preprint. available at <http://arxiv.org/abs/1312.6218>.