

The n -th residual relative operator entropy

Hiroshi Isa*, Eizaburo Kamei,
Hiroaki Tohyama* and Masayuki Watanabe*
(*Maebashi Institute of Technology)

1. Introduction.

ヒルベルト空間上の strictly positive operator A と B に対して relative operator entropy $S(A|B)$, generalized relative operator entropy $S_x(A|B)$, Tsallis relative operator entropy $T_x(A|B)$ は次のように定義されている [3, 7, 17].

$$S(A|B) \equiv \left. \frac{d}{dt} A \natural_t B \right|_{t=0} = A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}},$$

$$S_x(A|B) \equiv \left. \frac{d}{dt} A \natural_t B \right|_{t=x} = (A \natural_x B) A^{-1} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$T_x(A|B) \equiv \frac{A \natural_x B - A}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

$$T_0(A|B) \equiv \lim_{x \rightarrow 0} T_x(A|B) = S(A|B) = S_0(A|B).$$

ここで, $A \natural_t B \equiv A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}}$ ($t \in \mathbb{R}$) は A と B を通る path である ([4, 5, 14, etc.]). また, t の範囲が $[0, 1]$ のとき, $A \natural_t B$ は weighted geometric operator mean $A \natural_t B$ に一致する (cf. [15]). さらに, $B \natural_{1-t} A = A \natural_t B$ に注意する.

次に, $T_x(A|B)$ の区間 $[0, x]$ での平均変化率を考え, これを 2 次 Tsallis relative operator entropy と呼び, $T_x^{[2]}(A|B)$ と表すことにする. すなわち,

$$T_x^{[2]}(A|B) \equiv \frac{T_x(A|B) - S(A|B)}{x} = A^{\frac{1}{2}} \frac{(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^x - I - x(\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})}{x^2} A^{\frac{1}{2}}$$

である. $T_x^{[2]}(A|B)$ の corresponding function は $\frac{a^x - 1 - x \log a}{x^2}$ ($a > 0$) であり,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1 - x \log a}{x^2} = \frac{1}{2}(\log a)^2$ であることから $T_0^{[2]}(A|B) \equiv \lim_{x \rightarrow 0} T_x^{[2]}(A|B) = \frac{1}{2} A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^2 A^{\frac{1}{2}}$ である. $T_0^{[2]}(A|B)$ を $S^{[2]}(A|B)$ で表し, これを 2 次 relative operator entropy と呼ぶ. 次に, $T_x^{[2]}(A|B)$ の区間 $[0, x]$ での平均変化率を同様に 3 次 Tsallis relative operator entropy と呼び, $T_x^{[3]}(A|B)$ と表す. すなわち,

$$\begin{aligned} T_x^{[3]}(A|B) &\equiv \frac{T_x^{[2]}(A|B) - S^{[2]}(A|B)}{x} \\ &= A^{\frac{1}{2}} \frac{(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^x - I - x(\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} x^2 (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^2}{x^3} A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

であり, $T_0^{[3]}(A|B) \equiv \lim_{x \rightarrow 0} T_x^{[3]}(A|B) = \frac{1}{3!} A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^3 A^{\frac{1}{2}}$ である. $T_0^{[3]}(A|B)$ を $S^{[3]}(A|B)$ で表し, 3 次 relative operator entropy と呼ぶ.

そこで、我々は[12]において、任意の自然数 n に対して $S^{[n]}(A|B)$, $T_x^{[n]}(A|B)$, $S_x^{[n]}(A|B)$ を次で与えた。まず、 $S^{[n]}(A|B)$ を

$$S^{[n]}(A|B) \equiv \frac{1}{n!} A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^n A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n!} A (A^{-1} S(A|B))^n$$

で定義する。 $\frac{d^n}{dt^n} a^t = a^t (\log a)^n$ であるから

$$(1) \quad S^{[n]}(A|B) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} A \natural_t B \Big|_{t=0}$$

が成立する。次に $T_x^{[n]}(A|B)$ を帰納的に定義する。

$$T_x^{[1]}(A|B) \equiv T_x(A|B),$$

$$T_x^{[n]}(A|B) \equiv \frac{T_x^{[n-1]}(A|B) - S^{[n-1]}(A|B)}{x} \quad (x \neq 0), \quad T_0^{[n]}(A|B) \equiv S^{[n]}(A|B) \quad \text{if } n \geq 2.$$

このとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} T_x^{[n]}(A|B) = T_0^{[n]}(A|B)$ が成立する。さらに、 $S_x^{[n]}(A|B)$ を次で定義する。

$$S_x^{[n]}(A|B) \equiv \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} A \natural_t B \Big|_{t=x}.$$

(1)式より、 $S_0^{[n]}(A|B) = S^{[n]}(A|B)$ である。 $S^{[n]}(A|B)$ を n 次relative operator entropy, $T_x^{[n]}(A|B)$ を n 次Tsallis relative operator entropy, $S_x^{[n]}(A|B)$ を n 次generalized relative operator entropyと呼ぶ。 $S_x^{[n]}(A|B)$, $T_x^{[n]}(A|B)$ は

$$(2) \quad \begin{aligned} S_x^{[n]}(A|B) &= \frac{1}{n!} (A \natural_x B) (A^{-1} S(A|B))^n, \\ T_x^{[n]}(A|B) &= \frac{1}{x^n} \left(A \natural_x B - A - \sum_{k=1}^{n-1} x^k S^{[k]}(A|B) \right) \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

と表せる。

$S^{[n]}(A|B)$, $T_x^{[n]}(A|B)$, $S_x^{[n]}(A|B)$ の間には次に示す不等式が成立している。

Theorem A. ([12]) *Let $\alpha \in [0, 1]$. Then*

$$(a) \quad S^{[n]}(A|B) \leq T_\alpha^{[n]}(A|B) \leq S_\alpha^{[n]}(A|B) \leq (-1)^n T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \leq S_1^{[n]}(A|B) \quad \text{if } n \text{ is odd or } A \leq B,$$

$$(b) \quad S^{[n]}(A|B) \geq T_\alpha^{[n]}(A|B) \geq S_\alpha^{[n]}(A|B) \geq T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \geq S_1^{[n]}(A|B) \quad \text{if } n \text{ is even and } A \geq B.$$

$n = 1$ の場合を考えると、 $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して

$$(3) \quad S(A|B) \leq T_\alpha(A|B) \leq S_\alpha(A|B) \leq -T_{1-\alpha}(B|A) \leq S_1(A|B)$$

が成立する [8]. [11] で, (3) の不等式の各項の差を operator valued divergence とみなし, $0 < \alpha < 1$ に対して

$$\begin{aligned}\Delta_{1,\alpha}(A|B) &\equiv T_\alpha(A|B) - S(A|B), & \Delta_{2,\alpha}(A|B) &\equiv S_\alpha(A|B) - T_\alpha(A|B), \\ \Delta_{3,\alpha}(A|B) &\equiv -T_{1-\alpha}(B|A) - S_\alpha(A|B), & \Delta_{4,\alpha}(A|B) &\equiv S_1(A|B) + T_{1-\alpha}(B|A)\end{aligned}$$

を定義した. これらと, Petz-Bregman divergence $D_{FK}(A|B) = T_1(A|B) - S(A|B)$ との間には, 次の関係が成立している [11, 16].

$$\begin{aligned}\Delta_{1,\alpha}(A|B) &= \frac{1}{\alpha} D_{FK}(A|A \sharp_\alpha B), \\ \Delta_{2,\alpha}(A|B) &= \frac{1}{\alpha} D_{FK}(A \sharp_\alpha B|A), \\ \Delta_{3,\alpha}(A|B) &= \frac{1}{1-\alpha} D_{FK}(A \sharp_\alpha B|B), \\ \Delta_{4,\alpha}(A|B) &= \frac{1}{1-\alpha} D_{FK}(B|A \sharp_\alpha B).\end{aligned}$$

また, $D_{FK}(A|B)$ に対する n 次 operator valued divergence を $D_{FK}^{[n]}(A|B) \equiv T_1^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B)$ と定義し, 上と同様なことが成立するように n 次 operator valued divergence $\Delta_{1,\alpha}^{[n]}(A|B), \dots, \Delta_{4,\alpha}^{[n]}(A|B)$ を定義することを考えた. $\Delta_{i,\alpha}(A|B)$ は

$$\begin{aligned}\Delta_{1,\alpha}(A|B) &= T_\alpha(A|B) - S(A|B), \\ \Delta_{2,\alpha}(A|B) &= -(A \natural_\alpha B)A^{-1}(T_{-\alpha}(A|B) - S(A|B)), \\ \Delta_{3,\alpha}(A|B) &= -(B \natural_{1-\alpha} A)B^{-1}(T_{-(1-\alpha)}(B|A) - S(B|A)), \\ \Delta_{4,\alpha}(A|B) &= T_{1-\alpha}(B|A) - S(B|A)\end{aligned}$$

のように書き直すことができる. そこで, このことを基に, $0 < \alpha < 1$ に対して次のような定義を行った [13].

$$\begin{aligned}\Delta_{1,\alpha}^{[n]}(A|B) &\equiv T_\alpha^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B), \\ \Delta_{2,\alpha}^{[n]}(A|B) &\equiv -(A \natural_\alpha B)A^{-1} \left(T_{-\alpha}^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B) \right), \\ \Delta_{3,\alpha}^{[n]}(A|B) &\equiv (-1)^n (B \natural_{1-\alpha} A)B^{-1} \left(T_{-(1-\alpha)}^{[n]}(B|A) - S^{[n]}(B|A) \right), \\ \Delta_{4,\alpha}^{[n]}(A|B) &\equiv (-1)^{n+1} \left(T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) - S^{[n]}(B|A) \right).\end{aligned}$$

一方, Fujii [2] は operator valued α -divergence を次のように定義した.

$$D_\alpha(A|B) \equiv \frac{A \nabla_\alpha B - A \sharp_\alpha B}{\alpha(1-\alpha)} \quad (\alpha \in (0, 1)).$$

これは Amari [1] が定義した α -divergence を基にしている. ここで, $A \nabla_\alpha B \equiv (1-\alpha)A + \alpha B$ は weighted arithmetic operator mean である. $D_\alpha(A|B)$ は次のように書き

直せる [9, 10].

$$\begin{aligned} D_\alpha(A|B) &= -T_{1-\alpha}(B|A) - T_\alpha(A|B) \\ &= (A \natural_\alpha B)A^{-1} (T_{1-\alpha}(A|B) - T_{-\alpha}(A|B)). \end{aligned}$$

この最後の式を基にして, n 次 operator valued divergence $\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B)$ を次で定義した [13].

$$\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B) \equiv (A \natural_\alpha B)A^{-1} \left(T_{1-\alpha}^{[n]}(A|B) - T_{-\alpha}^{[n]}(A|B) \right).$$

$\Lambda_\alpha^{[1]}(A|B) = D_\alpha(A|B)$ であり, $\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B) = \Delta_{2,\alpha}^{[n]}(A|B) + \Delta_{3,\alpha}^{[n]}(A|B)$ が成立している. ところで, (2) 式は次のように書き換えられる.

$$(4) \quad A \natural_x B = A + \sum_{k=1}^{n-1} x^k S^{[k]}(A|B) + x^n T_x^{[n]}(A|B).$$

(1) 式より, これは $A \natural_x B$ の原点を中心とした Taylor 展開であり, $x^n T_x^{[n]}(A|B)$ はその剰余項である. そこで, $A \natural_x B$ の y を中心とした Taylor 展開

$$A \natural_x B = A \natural_y B + \sum_{k=1}^{n-1} (x-y)^k S_y^{[k]}(A|B) + R_n$$

の剰余項 R_n を用いて, [12] で $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ を次のように定義した.

Definition 1. Let $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$ with $x \neq y$.

$$\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B) \equiv \frac{R_n}{(x-y)^n}.$$

この $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ を n 次 residual reative operator entropy と呼ぶことにする. 定義より, $x \neq 0$ のとき $\mathfrak{R}_{x,0}^{[n]}(A|B) = T_x^{[n]}(A|B)$ である.

Section 2 では $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ の基本的な性質を示し, 以前示した n 次 operator valued divergence $\Delta_{i,\alpha}^{[n]}(A|B)$ や $\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B)$ に関する結果が, その応用として得られることを Section 3 で示す.

2. The n -th residual relative operator entropy $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$.

一般に, 関数 $f(x)$ の y を中心とした Taylor 展開の剰余項は

$$\frac{(x-y)^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(y+t(x-y))(1-t)^{n-1} dt$$

と表せる. $f(x) = a^x$ の場合にこれを適用すると, $f^{(n)}(y+t(x-y)) = a^{y+t(x-y)}(\log a)^n$ であることより, 上式を $(x-y)^n$ で割ったものは

$$\frac{a^y(\log a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} a^{t(x-y)} dt$$

となる．そこで，これを $\Psi^{[n]}(a, x, y)$ と表すと

$$(5) \quad \mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \Psi^{[n]} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}, x, y \right) A^{\frac{1}{2}}$$

である． $x = y$ のときは

$$\Psi^{[n]}(a, x, x) = \frac{a^x (\log a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt = \frac{1}{n!} a^x (\log a)^n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} a^t \Big|_{t=x}$$

であるから， $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ は $x = y$ の場合も定義され， $\mathfrak{R}_{x,x}^{[n]}(A|B) = S_x^{[n]}(A|B)$ となる．また， $x = 0$ の場合も含めて $\mathfrak{R}_{x,0}^{[n]}(A|B) = T_x^{[n]}(A|B)$ であり， $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ と $T_x^{[n]}(A|B)$ ， $S_x^{[n]}(A|B)$ ， $S^{[n]}(A|B)$ の関係は Table 1 のようになる．

Table 1

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B) & \xrightarrow{y=0} & T_x^{[n]}(A|B) \\ \downarrow x=y & & \downarrow x=0 \\ S_x^{[n]}(A|B) & \xrightarrow{x=0} & S^{[n]}(A|B) \end{array}$$

まず， n 次 residual relative operator entropy $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ の単調性について，次のことが成立する．

Theorem 1. *Let $A, B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$. Then*

- (a) $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ is monotone increasing for each x and y if n is odd or $A \leq B$,
- (b) $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ is monotone decreasing for each x and y if n is even and $A \geq B$.

Proof. (a) を示すには， n が奇数または $a \geq 1$ のとき， x についても y についても $\Psi^{[n]}(a, x, y)$ が単調増加であることを示せばよい．そのためには， $\frac{\partial}{\partial x} \Psi^{[n]}(a, x, y) \geq 0$ ， $\frac{\partial}{\partial y} \Psi^{[n]}(a, x, y) \geq 0$ を示せばよい．まず，

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi^{[n]}(a, x, y) = \frac{a^y (\log a)^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t a^{t(x-y)} dt$$

であるが， $a \geq 1$ または n が奇数ならば $(\log a)^{n+1} \geq 0$ であり， $0 \leq t \leq 1$ のとき $(1-t)^{n-1} t a^{t(x-y)} \geq 0$ であるから

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi^{[n]}(a, x, y) \geq 0$$

である．また，

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi^{[n]}(a, x, y) = \frac{a^y (\log a)^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^n a^{t(x-y)} dt$$

であるから、同様にして

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi^{[n]}(a, x, y) \geq 0$$

である.

一方, $0 < a \leq 1$ かつ n が偶数ならば $(\log a)^{n+1} \leq 0$ であることから, 同様にして $\frac{\partial}{\partial x} \Psi^{[n]}(a, x, y) \leq 0$, $\frac{\partial}{\partial y} \Psi^{[n]}(a, x, y) \leq 0$ であり, (b) も成立する. $\square$

次に, $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ は interpolational な性質を持つことがわかる.

Theorem 2. *Let $A, B > 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $r, s, x, y \in \mathbb{R}$. Then*

$$\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A \natural_r B | A \natural_s B) = (s-r)^n \mathfrak{R}_{(1-x)r+xs, (1-y)r+ys}^{[n]}(A|B).$$

まず, 次の lemma を示す.

Lemma 3. *Let $A, B > 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $t, x, y \in \mathbb{R}$. Then*

$$(a) \quad \mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(B|A) = (-1)^n \mathfrak{R}_{1-x, 1-y}^{[n]}(A|B),$$

$$(b) \quad \mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|A \natural_t B) = t^n \mathfrak{R}_{tx, ty}^{[n]}(A|B).$$

Proof.

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(B|A) &= B^{\frac{1}{2}} \Psi^{[n]}(B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}, x, y) B^{\frac{1}{2}} \\ &= B^{\frac{1}{2}} \Psi^{[n]}((B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}})^{-1}, x, y) (B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \\ &= B^{\frac{1}{2}} (B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}) \Psi^{[n]}((A^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}})^{-1}, x, y) A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) \Psi^{[n]}((A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^{-1}, x, y) A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

であり

$$\mathfrak{R}_{1-x, 1-y}^{[n]}(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \Psi^{[n]}(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}, 1-x, 1-y) A^{\frac{1}{2}}$$

であるから, (a) を示すには

$$a \Psi^{[n]}(a^{-1}, x, y) = (-1)^n \Psi^{[n]}(a, 1-x, 1-y)$$

となることを示せばよい. 実際,

$$\begin{aligned} a \Psi^{[n]}(a^{-1}, x, y) &= a \frac{a^{-y} (\log a^{-1})^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} a^{-t(x-y)} dt \\ &= (-1)^n \frac{a^{1-y} (\log a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} a^{t((1-x)-(1-y))} dt \\ &= (-1)^n \Psi^{[n]}(a, 1-x, 1-y) \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned}\Re_{x,y}^{[n]}(A|A \natural_t B) &= A^{\frac{1}{2}} \Psi^{[n]}(A^{-\frac{1}{2}}(A \natural_t B)A^{-\frac{1}{2}}, x, y)A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}} \Psi^{[n]}((A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t, x, y)A^{\frac{1}{2}}, \\ \Re_{tx,ty}^{[n]}(A|B) &= A^{\frac{1}{2}} \Psi^{[n]}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}, tx, ty)A^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

であるから, (b)を示すには

$$\Psi^{[n]}(a^t, x, y) = t^n \Psi^{[n]}(a, tx, ty)$$

が成立することを示せばよい。実際,

$$\begin{aligned}\Psi^{[n]}(a^t, x, y) &= \frac{(a^t)^y (\log a^t)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} (a^t)^{u(x-y)} du \\ &= t^n \frac{a^{ty} (\log a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} a^{u(tx-ty)} du \\ &= t^n \Psi^{[n]}(a, tx, ty)\end{aligned}$$

である。 □

Proof of Theorem 2. $r = 0$ の場合は Lemma 3 の (b) そのものであるから $r \neq 0$ とする。
この場合は

$$A \natural_s B = (A \natural_r B) \natural_{1-\frac{s}{r}} A$$

であるから,

$$\begin{aligned}\Re_{x,y}^{[n]}(A \natural_r B|A \natural_s B) &= \Re_{x,y}^{[n]}(A \natural_r B|(A \natural_r B) \natural_{1-\frac{s}{r}} A) \\ &= \left(1 - \frac{s}{r}\right)^n \Re_{(1-\frac{s}{r})x, (1-\frac{s}{r})y}^{[n]}(A \natural_r B|A) && ((b) \text{ in Lemma 3}) \\ &= \left(1 - \frac{s}{r}\right)^n (-1)^n \Re_{1-(r-s)\frac{x}{r}, 1-(r-s)\frac{y}{r}}^{[n]}(A|A \natural_r B) && ((a) \text{ in Lemma 3}) \\ &= r^n \left(\frac{s}{r} - 1\right)^n \Re_{r(1-(r-s)\frac{x}{r}), r(1-(r-s)\frac{y}{r})}^{[n]}(A|B) && ((b) \text{ in Lemma 3}) \\ &= (s-r)^n \Re_{(1-x)r+sx, (1-y)r+sy}^{[n]}(A|B).\end{aligned}$$

□

Corollary 4. *Let $A, B > 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $r, x, y \in \mathbb{R}$. Then*

- (a) $\Re_{x,y}^{[n]}(A \natural_r B|A) = (-r)^n \Re_{(1-x)r, (1-y)r}^{[n]}(A|B),$
- (b) $\Re_{x,y}^{[n]}(A \natural_r B|B) = (1-r)^n \Re_{(1-x)r+x, (1-y)r+y}^{[n]}(A|B).$

Theorem 5. Let $A, B > 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $r, s, x, y \in \mathbb{R}$. Then

- (a) $\Re_{x,y}^{[n]}(A|B) = 0$ if and only if $A = B$,
- (b) $\Re_{x,r}^{[n]}(A|B) = \Re_{x,s}^{[n]}(A|B)$ if and only if $r = s$ or $A = B$,
- (c) $\Re_{r,y}^{[n]}(A|B) = \Re_{s,y}^{[n]}(A|B)$ if and only if $r = s$ or $A = B$.

Proof. (5) 式より, $\Re_{x,y}^{[n]}(A|B) = 0$ が成立することと $\Psi^{[n]}(a, x, y) = 0$ が成立することは同値である.

$$\Psi^{[n]}(a, x, y) = \frac{a^y (\log a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} a^{t(x-y)} dt$$

であり, かつ

$$\frac{a^y}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} a^{t(x-y)} dt > 0$$

であるから, $\Psi^{[n]}(a, x, y) = 0$ と $a = 1$ は同値であり (a) がいえる. また, (b) を示すには, $\Psi^{[n]}(a, x, r) = \Psi^{[n]}(a, x, s)$ であることと $r = s$ または $a = 1$ であることが同値であることを示せばよい.

$$\Psi^{[n]}(a, x, r) - \Psi^{[n]}(a, x, s) = \frac{(\log a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} a^{tx} (a^{(1-t)r} - a^{(1-t)s}) dt$$

である. $r = s$ または $a = 1$ とすると, この式の右辺は 0 になるから, $\Psi^{[n]}(a, x, r) = \Psi^{[n]}(a, x, s)$ が成立する.

逆に, $r \neq s$ かつ $a \neq 1$ とする. まず, $r > s$ の場合を考える. $a > 1$ ならば $\log a > 0$, $(1-t)^{n-1} a^{tx} (a^{(1-t)r} - a^{(1-t)s}) > 0$ ($0 \leq t < 1$) であるから,

$$\frac{(\log a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} a^{tx} (a^{(1-t)r} - a^{(1-t)s}) dt > 0$$

となり,

$$\Psi^{[n]}(a, x, r) > \Psi^{[n]}(a, x, s)$$

である. また, $0 < a < 1$ ならば $\log a < 0$, $(1-t)^{n-1} a^{tx} (a^{(1-t)r} - a^{(1-t)s}) < 0$ ($0 \leq t < 1$) であるから,

$$\frac{(\log a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} a^{tx} (a^{(1-t)r} - a^{(1-t)s}) dt \begin{cases} > 0 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ < 0 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

となる. したがって

$$\Psi^{[n]}(a, x, r) \begin{cases} > \Psi^{[n]}(a, x, s) & \text{if } n \text{ is odd,} \\ < \Psi^{[n]}(a, x, s) & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

がいえる.

同様にして, $r < s$ の場合は, $a > 1$ のとき

$$\Psi^{[n]}(a, x, r) < \Psi^{[n]}(a, x, s)$$

であり, $0 < a < 1$ のとき

$$\Psi^{[n]}(a, x, r) \begin{cases} < \Psi^{[n]}(a, x, s) & \text{if } n \text{ is odd,} \\ > \Psi^{[n]}(a, x, s) & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

である. 以上のことから, $r \neq s$ かつ $a \neq 1$ ならば, $\Psi^{[n]}(a, x, r) \neq \Psi^{[n]}(a, x, s)$ である. また,

$$\Psi^{[n]}(a, r, y) - \Psi^{[n]}(a, s, y) = \frac{(\log a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} a^{(1-t)y} (a^{tr} - a^{ts}) dt$$

であるから, (c) も同様に示すことができる. $\square$

non-commutative ratio $(A \natural_r B)A^{-1}$ を $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ に左からかけると x も y も r だけ移動する.

Theorem 6. *Let $A, B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and $r, x, y \in \mathbb{R}$. Then*

$$(A \natural_r B)A^{-1}\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B) = \mathfrak{R}_{x+r,y+r}^{[n]}(A|B).$$

Proof.

$$\begin{aligned} (A \natural_r B)A^{-1}\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B) &= A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^r A^{\frac{1}{2}}A^{-1}A^{\frac{1}{2}}\Psi^{[n]}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}, x, y)A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^r \Psi^{[n]}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}, x, y)A^{\frac{1}{2}}, \\ \mathfrak{R}_{x+r,y+r}^{[n]}(A|B) &= A^{\frac{1}{2}}\Psi^{[n]}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}, x+r, y+r)A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

であるから,

$$a^r \Psi^{[n]}(a, x, y) = \Psi^{[n]}(a, x+r, y+r)$$

となることを示せばよい. 実際,

$$\begin{aligned} a^r \Psi^{[n]}(a, x, y) &= a^r \frac{a^y (\log a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} a^{t(x-y)} dt \\ &= \frac{a^{y+r} (\log a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} a^{t((x+r)-(y+r))} dt \\ &= \Psi^{[n]}(a, x+r, y+r) \end{aligned}$$

である. $\square$

Corollary 7. *Let $A, B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and $r, x \in \mathbb{R}$. Then*

- (a) $(A \natural_r B)A^{-1}T_{x-r}^{[n]}(A|B) = \mathfrak{R}_{x,r}^{[n]}(A|B),$
- (b) $(A \natural_r B)A^{-1}S_{x-r}^{[n]}(A|B) = \mathfrak{R}_{x,x}^{[n]}(A|B) = S_x^{[n]}(A|B).$

3. Some applications to the n -th operator valued divergences

この section では, Section 2 で得られた結果を用いて, n 次 relative operator entropy と n 次 operator valued divergence に関して既に知られている性質を示すことにする.

まず, Theorem 1 より特に次のことがいえる.

Proposition 8. *Let $A, B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and assume $0 \leq \alpha \leq 1$. Then*

- (a) $\Re_{0,0}^{[n]}(A|B) \leq \Re_{\alpha,0}^{[n]}(A|B) \leq \Re_{\alpha,\alpha}^{[n]}(A|B) \leq \Re_{\alpha,1}^{[n]}(A|B) \leq \Re_{1,1}^{[n]}(A|B)$ if n is odd or $A \leq B$,
- (b) $\Re_{0,0}^{[n]}(A|B) \geq \Re_{\alpha,0}^{[n]}(A|B) \geq \Re_{\alpha,\alpha}^{[n]}(A|B) \geq \Re_{\alpha,1}^{[n]}(A|B) \geq \Re_{1,1}^{[n]}(A|B)$ if n is even and $A \geq B$.

ここで, Table 1 の関係から $\Re_{0,0}^{[n]}(A|B) = S^{[n]}(A|B)$, $\Re_{\alpha,0}^{[n]}(A|B) = T_\alpha^{[n]}(A|B)$, $\Re_{\alpha,\alpha}^{[n]}(A|B) = S_\alpha^{[n]}(A|B)$, $\Re_{1,1}^{[n]}(A|B) = S_1^{[n]}(A|B)$ であり, 一方, Theorem 2 より, $\Re_{\alpha,1}^{[n]}(A|B) = (-1)^n \Re_{1-\alpha,0}^{[n]}(B|A) = (-1)^n T_{1-\alpha,0}^{[n]}(B|A)$ となることから, Proposition 8 は Theorem A と同じである.

次に, n 次 Petz-Bregman divergence は $D_{FK}^{[n]}(A|B) = \Re_{1,0}^{[n]}(A|B) - \Re_{0,0}^{[n]}(A|B)$ と書き換えられる. したがって, Theorem 1 と Theorem 5 の (c) より次の命題が得られる.

Proposition 9. ([12]) *Let $A, B > O$ and $n \in \mathbb{N}$. Then*

- (a) $D_{FK}^{[n]}(A|B) \begin{cases} \geq O, & \text{if } n \text{ is odd or } A \leq B, \\ \leq O, & \text{if } n \text{ is even and } A \geq B. \end{cases}$
- (b) $D_{FK}^{[n]}(A|B) = O$ if and only if $A = B$.

また, $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ と $\Delta_{i,\alpha}^{[n]}(A|B)$ との間には次のことが成立することがわかる.

Proposition 10. ([13]) *Let $A, B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and assume $0 < \alpha < 1$. Then*

- (a) $\Delta_{1,\alpha}^{[n]}(A|B) = \frac{1}{\alpha^n} D_{FK}^{[n]}(A|A \natural_\alpha B)$,
- (b) $\Delta_{2,\alpha}^{[n]}(A|B) = (-1)^{n+1} \frac{1}{\alpha^n} D_{FK}^{[n]}(A \natural_\alpha B|A)$,
- (c) $\Delta_{3,\alpha}^{[n]}(A|B) = \frac{1}{(1-\alpha)^n} D_{FK}^{[n]}(A \natural_\alpha B|B)$,
- (d) $\Delta_{4,\alpha}^{[n]}(A|B) = (-1)^{n+1} \frac{1}{(1-\alpha)^n} D_{FK}^{[n]}(B|A \natural_\alpha B)$.

Proof.

$$\begin{aligned}
 D_{FK}^{[n]}(A|A \natural_\alpha B) &= \Re_{1,0}^{[n]}(A|A \natural_\alpha B) - \Re_{0,0}^{[n]}(A|A \natural_\alpha B) \\
 &= \alpha^n \Re_{\alpha,0}^{[n]}(A|B) - \alpha^n \Re_{0,0}^{[n]}(A|B) && \text{((b) in Lemma 3)} \\
 &= \alpha^n (T_\alpha^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B)) = \alpha^n \Delta_{1,\alpha}^{[n]}(A|B)
 \end{aligned}$$

であり, $\alpha \neq 0$ であるので, (a) を得る. 次に

$$\begin{aligned}
 D_{FK}^{[n]}(A \natural_{\alpha} B|A) &= \mathfrak{R}_{1,0}^{[n]}(A \natural_{\alpha} B|A) - \mathfrak{R}_{0,0}^{[n]}(A \natural_{\alpha} B|A) \\
 &= (-\alpha)^n \mathfrak{R}_{0,\alpha}^{[n]}(A|B) - (-\alpha)^n \mathfrak{R}_{\alpha,\alpha}^{[n]}(A|B) && ((a) \text{ in Corollary 4}) \\
 &= (-\alpha)^n ((A \natural_{\alpha} B)A^{-1}T_{-\alpha}^{[n]}(A|B) - (A \natural_{\alpha} B)A^{-1}S^{[n]}(A|B)) && (\text{Corollary 7}) \\
 &= (-1)^{n+1} \alpha^n \Delta_{2,\alpha}^{[n]}(A|B)
 \end{aligned}$$

であり, $\alpha \neq 0$ であるので, (b) が得られる. 次に

$$\begin{aligned}
 D_{FK}^{[n]}(A \natural_{\alpha} B|B) &= \mathfrak{R}_{1,0}^{[n]}(A \natural_{\alpha} B|B) - \mathfrak{R}_{0,0}^{[n]}(A \natural_{\alpha} B|B) \\
 &= (1-\alpha)^n \mathfrak{R}_{1,\alpha}^{[n]}(A|B) - (1-\alpha)^n \mathfrak{R}_{\alpha,\alpha}^{[n]}(A|B) && ((b) \text{ in Corollary 4}) \\
 &= (\alpha-1)^n \mathfrak{R}_{0,1-\alpha}^{[n]}(B|A) - (\alpha-1)^n \mathfrak{R}_{1-\alpha,1-\alpha}^{[n]}(B|A) && ((a) \text{ in Lemma 3}) \\
 &= (\alpha-1)^n ((B \natural_{1-\alpha} A)B^{-1}T_{-(1-\alpha)}^{[n]}(B|A) - (B \natural_{1-\alpha} A)B^{-1}S^{[n]}(B|A)) && (\text{Corollary 7}) \\
 &= (1-\alpha)^n \Delta_{3,\alpha}^{[n]}(A|B)
 \end{aligned}$$

であるので, $\alpha \neq 1$ より (c) を得る. 最後に

$$\begin{aligned}
 D_{FK}^{[n]}(B|A \natural_{\alpha} B) &= \mathfrak{R}_{1,0}^{[n]}(B|A \natural_{\alpha} B) - \mathfrak{R}_{0,0}^{[n]}(B|A \natural_{\alpha} B) \\
 &= \mathfrak{R}_{1,0}^{[n]}(B|B \natural_{1-\alpha} A) - \mathfrak{R}_{0,0}^{[n]}(B|B \natural_{1-\alpha} A) \\
 &= (1-\alpha)^n \mathfrak{R}_{1-\alpha,0}^{[n]}(B|A) - (1-\alpha)^n \mathfrak{R}_{0,0}^{[n]}(B|A) && ((b) \text{ in Lemma 3}) \\
 &= (1-\alpha)^n (T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) - S^{[n]}(B|A)) = (1-\alpha)^n (-1)^{n+1} \Delta_{4,\alpha}^{[n]}(A|B)
 \end{aligned}$$

であり, $\alpha \neq 1$ であるから (d) を得る. $\square$

このことから, $\Delta_{i,\alpha}^{[n]}(A|B)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) も $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ と同様の性質を持つことがわかる.

Proposition 11. ([13]) *Let $A, B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and assume $0 < \alpha < 1$. Then*

$$(a) \quad \Delta_{i,\alpha}^{[n]}(A|B) \begin{cases} \geq O & \text{if } n \text{ is odd or } A \leq B, \\ \leq O & \text{if } n \text{ is even and } A \geq B \end{cases} \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4.$$

$$(b) \quad \Delta_{i,\alpha}^{[n]}(A|B) = O \quad \text{if and only if } A = B \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4.$$

Proof. $A \leq B$ ならば $A \leq A \natural_{\alpha} B$, $A \geq B$ ならば $A \geq A \natural_{\alpha} B$ であり, また, $A = B$ と $A = A \natural_{\alpha} B$ は同値であるから, Proposition 9 より $i = 1$ のときの主張 (a) と (b) および $i = 2$ のときの主張 (b) は成立する. また, n が奇数ならば $D_{FK}^{[n]}(A \natural_{\alpha} B|A) \geq O$, n が偶数ならば $A \leq B$ のとき $D_{FK}^{[n]}(A \natural_{\alpha} B|A) \leq O$, $A \geq B$ のとき $D_{FK}^{[n]}(A \natural_{\alpha} B|A) \geq O$ であるから, Proposition 10 の (b) より $i = 2$ のときの主張 (a) も成立する.

また, $A \natural_{\alpha} B = B \natural_{1-\alpha} A$ だから, $i = 1, 2$ の場合と同様にして $i = 3, 4$ の場合も主張 (a) および (b) が成立する. $\square$

Remark. $\Delta_{i,\alpha}^{[n]}(A|B)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) は $\alpha \in \mathbb{R}$ に拡張して定義でき, $i = 1, 2$ のときは $\alpha > 0$ で (a) が, $\alpha \neq 0$ で (b) がいえる. また, $i = 3, 4$ のときは $\alpha < 1$ で (a) が, $\alpha \neq 1$ で (b) がいえる.

最後に, Corollary 7 の (a) より

$$\Lambda_{\alpha}^{[n]}(A|B) = (A \natural_{\alpha} B)A^{-1} \left(T_{1-\alpha}^{[n]}(A|B) - T_{-\alpha}^{[n]}(A|B) \right) = \mathfrak{R}_{1,\alpha}^{[n]}(A|B) - \mathfrak{R}_{0,\alpha}^{[n]}(A|B)$$

と書き換えられるので, Theorem 1 と Theorem 5 の (c) から $\Lambda_{\alpha}^{[n]}(A|B)$ も $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ と同様の性質を持つことがわかる.

Proposition 12. ([13]) *Let $A, B > O$, $n \in \mathbb{N}$. Then*

$$(a) \quad \Lambda_{\alpha}^{[n]}(A|B) \begin{cases} \geq O & \text{if } n \text{ is odd or } A \leq B, \\ \leq O & \text{if } n \text{ is even and } A \geq B. \end{cases}$$

$$(b) \quad \Lambda_{\alpha}^{[n]}(A|B) = O \quad \text{if and only if} \quad A = B.$$

参考文献

- [1] S. Amari, Differential Geometrical Methods in Statistics, Springer Lecture Notes in Statistics, **28**(1985).
- [2] J. I. Fujii, On the relative operator entropy, RIMS Kôkyûroku, **903**(1995), 49–56.
- [3] J. I. Fujii and E. Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, Math. Japon., **34**(1989), 341–348.
- [4] J. I. Fujii and E. Kamei, Interpolational paths and their derivatives, Math. Japon., **39**(1994), 557–560.
- [5] J. I. Fujii and E. Kamei, Path of Bregman-Petz operator divergence, Sci. Math. Jpn., **70**(2009), 329–333.
- [6] J. I. Fujii, Interpolationality for symmetric operator means, Sci. Math. Jpn., **75**(2012), 267–274.
- [7] T. Furuta, Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators, Linear Algebra Appl., **381**(2004), 219–235.
- [8] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Relative operator entropy, operator divergence and Shannon inequality, Sci. Math. Jpn., **75**(2012), 289–298.
- [9] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, On relations between operator valued α -divergence and relative operator entropies, Sci. Math. Jpn., **78**(2015), 215–228. (online: e-2015 (2015), 215–228.)
- [10] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Expanded relative operator entropies and operator valued α -divergence, J. Math. Syst. Sci., **5**(2015), 215–224. <https://doi.org/10.17265/2159-5291/2015.06.001>
- [11] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Some operator divergences based on Petz-Bregman divergence, Sci. Math. Jpn., **80**(2017), 161–170.
- [12] H. Isa, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, The n -th relative operator entropies and operator divergences, Ann. Funct. Anal. (2020). <https://doi.org/10.1007/s43034-019-00004-5>

- [13] 伊佐浩史, 亀井栄三郎, 遠山宏明, 渡邊雅之, The n -th operator valued divergences, 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会.
- [14] E. Kamei, Paths of operators parametrized by operator means, Math. Japon., **39**(1994), 395–400.
- [15] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, Math Ann., **246**(1980), 205–224.
- [16] D. Petz, Bregman divergence as relative operator entropy, Acta Math. Hungar., **116**(2007), 127–131.
- [17] K. Yanagi, K. Kuriyama and S. Furuichi, Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy, Linear Algebra Appl., **394**(2005), 109–118.