

p 進 L 関数入門 II

(p 進 L 関数と円分体の類数公式)

名大 教養 工藤 愛知

K を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の $2m$ 次虚 abel 体, F を K の最大実部分体, h , d , R をそれぞれ F の類数, 判別式, 単数規準とする. K の類数は, h とある自然数 h' の積として hh' と表わされる. $L(s, \chi)$ を χ に対する Dirichlet の L 関数, W を K に含まれる 1 の根全体の群, Q を K の単数群における部分群 WE の群指数, w を W の位数, χ^0 を単位指標とする. そして, 以下 $\prod_{\chi}^{+}$, $\prod_{\chi}^{-}$ では つねに K に対応する primitive Dirichlet 指標のうち 偶指標全体にわたる積, 奇指標全体にわたる積を それぞれ表わすことにする. このとき, 代数体の解析的類数公式より

$$(1) \quad \frac{2^{m-1} h R}{\sqrt{d}} = \prod_{\chi \neq \chi^0}^{+} L(1, \chi),$$

$$(2) \quad h' = Q_w \prod_{\chi}^{-} \frac{1}{2} L(0, \chi)$$

が得られる.

自然数 n に対して $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$, f_x を χ の導手とおくと (1) はさらに

$$(3) \quad Rh = \Pi_\infty,$$

$$\Pi_\infty = \prod_{\chi \neq \chi^0}^+ \sum_{\pm a \bmod f_\chi} (-\bar{\chi}(a) \log |1 - \zeta_{f_\chi}^a|)$$

と表わされる. ここで, $\bar{\chi}$ は複素共役, $\pm a \bmod f_\chi$ は $\bmod f_\chi$ の 2 つの剰余類 $a \bmod f_\chi$, $-a \bmod f_\chi$ から一方の代表元だけを選ぶことを意味する.

さて F の Galois 群を $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$, 単数群を $E = \pm \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1} \rangle$ とすると,

$$R = |\det(\log |\sigma_i(\varepsilon_j)|)|_{1 \leq i, j \leq m-1} \neq 0$$

であるから, E の部分群 $H = \pm \langle \eta_1, \dots, \eta_{m-1} \rangle$ について $(E:H) < \infty$ であることと,

$$R(H) = |\det(\log |\sigma_i(\eta_j)|)|_{1 \leq i, j \leq m-1} \neq 0$$

であることが同値であり, このとき,

$$(4) \quad (E:H)R = R(H)$$

と表わせる. そこで まず, Π_∞ が適当な H をとると, 明確な因数を除いて $R(H)$ で表わされることを, 1 つの場合について見てみよう (高木 [9]).

$F = \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$, $p > 2$ とする. $\zeta = \zeta_p$ とおき, $\bmod p$

の1つの原始根 r を奇数にとっておく。そのとき、 $\eta = \zeta^{-\frac{r-1}{2}}(1-\zeta^r)/(1-\zeta)$ は F の単数で、 ± 1 と η の共役で生成される群 C の元は F の円単数と呼ばれる。

いま、 σ を $\zeta \rightarrow \zeta^r$ から生じる Galois 群 G の元とし、

$$\eta_i = \sigma^i(\eta), \quad \lambda_i = \sigma^i((1-\zeta)(1-\zeta^{-1}))$$

とおくと、

$$\eta_i^2 = \eta_i \bar{\eta}_i = \frac{1-\zeta^{r^{i+1}}}{1-\zeta^{r^i}} \cdot \frac{1-\zeta^{-r^{i+1}}}{1-\zeta^{-r^i}} = \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}$$

だから、

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \log |\lambda_0| & \log |\lambda_1| & \cdots & \log |\lambda_{m-1}| \\ \log |\lambda_1| & \log |\lambda_2| & \cdots & \log |\lambda_0| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \log |\lambda_{m-1}| & \log |\lambda_0| & \cdots & \log |\lambda_{m-2}| \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \log |\lambda_0| & \log |\eta_0|^2 & \cdots & \log |\eta_{m-2}|^2 \\ \log |\lambda_1| & \log |\eta_1|^2 & \cdots & \log |\eta_{m-1}|^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \log |\lambda_{m-1}| & \log |\eta_{m-1}|^2 & \cdots & \log |\eta_{m-3}|^2 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \log |\lambda_k| \cdot 2^{m-1} \cdot \det (\log |\sigma^{i+j-1}(\eta)|)_{1 \leq i, j \leq m-1} \\ &= \pm \sum_{k=0}^{m-1} \log |\lambda_k| \cdot 2^{m-1} R(C) \end{aligned}$$

である。一方、はじめの行列式は巡回行列式だから

$$\pm \sum_{k=0}^{m-1} \log |\lambda_k| \prod_{\chi \neq \chi^0}^+ \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\chi}(r^i) \log |\lambda_i|$$

$$= \pm \sum_{k=0}^{m-1} \log |\lambda_k| \cdot 2^{m-1} \cdot \prod_{\infty}$$

に等しく, $\sum_{k=0}^{m-1} \log |\lambda_k| \neq 0$ だから

$$\prod_{\infty} = R(C).$$

したがって, (3) と (4) により

$$h = (E : C)$$

が得られる.

一般にも, $F = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$, $n > 2$, $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ に対して
 $C = E \cap (1 - \zeta_n)^{\mathbb{Z}[G]}$ が円単数の群と呼ばれる.

n が素数中 p^α ならば, r を $\pmod{p^\alpha}$ の奇の原始根 ($p=2$ のときは $r=5$) とすると, $n=p$ の場合と同様に C は ± 1 と $\eta = \zeta_n^{-\frac{r-1}{2}} (1 - \zeta_n^r) / (1 - \zeta_n)$ の共役で生成され $h = (E : C)$ が得られる.

また, n が素数中でなければ, n の素因数の個数を $g (> 1)$ とするとき $2^{2^{g-2}+1-g} h = (E : C)$ となることが最近知られている (Sinnott [8]).

さて, 実 abel 体の p 進類数公式を説明するために, Leopoldt によるもう一つの結果を紹介しよう.

実 abel 体 F に対応する primitive な Dirichlet 指標 $\chi \neq \chi^0$ に対して

$$\Theta_\chi = \prod_{\substack{\pm a \pmod{f_\chi} \\ \chi(a)=1}} (\zeta_{2f_\chi}^a - \zeta_{2f_\chi}^{-a}),$$

$$D_X = \frac{1}{(U_X:1)} \sum_{\sigma \in U_X} \prod_{\substack{l|m_X \\ \text{素数}}} (1 - \tau_X^{m_X/l})$$

とおく. ここに, U_X は $\langle X \rangle$ に対応する巡回体 K_X の G における不変部分群, τ_X は $\tau_X \bmod U_X$ が $G(K_X/\mathbb{Q}) = G/U_X$ を生成するような G の元, m_X は X の位数である.

このとき, $\eta_X = \bigoplus_X^{D_X}$ は K_X の単数で, H を ± 1 とすべての $X \neq X^0$ に対する η_X の共役で生成される群とすると, abel 群 G の構造のみに依存する自然数 Q_G があって,

$$Q_G \prod_{\infty} = R(H).$$

したがって (3), (4) によって

$$Q_G h = (E: H)$$

が得られる (Leopoldt [4]).

Leopoldt の p 進類数公式は, これによって 次のように導かれる.

$\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ から 有理 p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ への 1 つの埋め込みを ϕ とし,

$$\log_p: \overline{\mathbb{Q}_p}^{\times} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$$

を $\log_p p = 0$ で, $|x-1|_p < 1$ では $\log_p x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$ で与えられる $\overline{\mathbb{Q}_p}^{\times}$ の homomorphism とする [3].

このとき, $E = \pm \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1} \rangle$ と $H = \pm \langle \eta_1, \dots, \eta_{m-1} \rangle$

に対し ± 1 なる因数を除いて定義される

$$R_p = \det(\log_p(\phi(\sigma_i(\varepsilon_j))))_{1 \leq i, j \leq m-1},$$

$$R_p(H) = \det(\log_p(\phi(\sigma_i(\eta_j))))_{1 \leq i, j \leq m-1}$$

をそれぞれ F, H の p 進単数規準と呼ぶ.

そして, 指標 χ の値も ϕ によって $\mathbb{Q}_p$ の元と考えることにより,

$$\Pi_p = \prod_{\chi \neq \chi^0}^+ \sum_{\pm a \bmod f_\chi} (-\bar{\chi}(a) \log_p(1 - \zeta_{f_\chi}^a))$$

とおけば, 上に述べた $Q_G \Pi_\infty = R(H)$ の証明と平行に

$$Q_G \Pi_p = R_p(H)$$

が導かれる. これと, $Q_G h = (E: H)$ をかきなおした

$$Q_G h R_p = R_p(H)$$

により,

$$(3)_p \quad h R_p = \Pi_p$$

が得られる (Leopoldt [5]).

ここで, $\Pi_p \neq 0$, $R_p(H) \neq 0$, $R_p \neq 0$ は 互いに同値な条件で, F に対する Leopoldt 予想と呼ばれるものであるが, Brumer によって, この場合正しいことが知られている [2].

いま, $\tau(\chi) = \sum_{x \bmod f_\chi} \chi(x) \zeta_{f_\chi}^x$ とすれば, $(3)_p$ からただちに

$$\frac{2^{m-1} h R_p}{\sqrt{d}} = \prod_{\chi \neq \chi^0}^+ 2 \frac{\tau(\chi)}{f_\chi} \sum_{\pm a \bmod f_\chi} (-\bar{\chi}(a) \log_p(1 - \zeta_{f_\chi}^a))$$

が得られる. この式の右辺の $\prod_{\chi \neq \chi_0}^+$ の中味 $\mathcal{L}_p(\chi)$ は

$$\mathcal{L}(1, \chi) = 2 \frac{\tau(\chi)}{f_\chi} \sum_{\pm a \bmod f_\chi} (-\bar{\chi}(a) \log |1 - \zeta_{f_\chi}^a|)$$

の p 進的類似と考えられるが, これが p 進 $\mathcal{L}$ 関数 $\mathcal{L}_p(a, \chi)$ を用いて 実際

$$\mathcal{L}_p(\chi) = (1 - \frac{\chi(p)}{p})^{-1} \mathcal{L}_p(1, \chi)$$

と表わされることが, Γ -transform による p 進 $\mathcal{L}$ 関数の構成法にしたがって証明される [6], [3], [7], [10] etc..

以上を総合して, p 進類数公式は,

$$(1)_p \quad \frac{2^{m-1} h R_p}{\sqrt{d}} = \prod_{\chi \neq \chi_0}^+ (1 - \frac{\chi(p)}{p})^{-1} \mathcal{L}_p(1, \chi)$$

とかかれる. また, p 進 $\mathcal{L}$ 関数の性質からただちに,

$$(2)_p \quad \prod_{\chi}^{-} (1 - \chi(p)) \cdot h' = Q \omega \prod_{\chi}^{-1} \mathcal{L}_p(0, \chi \omega)$$

が得られる. ここに, ω は p と素な整数 α に対し $p > 2$ ならば $\omega(\chi) = \lim_{p \rightarrow \infty} \chi^{\alpha^p}$, $p=2$ ならば $\omega(\chi) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}$ で定まる Dirichlet 指標である.

こうして得られた p 進類数公式は, cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大の類数公式などに広く応用されている.

また, 2次体に対する Ankeny-Artin-Chowla の合同式にも, 合理的な説明を与える.

すなわち, $h(d)$ を実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (d は判別式 $\neq 8, 12$) の類数, $h(-3d)$ を虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$ の類数, ε を $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の基本単数 > 1 , χ を $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$ に対応する 2 次の指標とすると,

$$\frac{2h(d)\log_3 \varepsilon}{\sqrt{d}} = \left(1 - \frac{\chi\omega(3)}{3}\right)^{-1} L_3(1, \chi\omega),$$

$$(1 - \chi(3))h(-3d) = L_3(0, \chi\omega)$$

が得られ, これからさらに Ankeny-Artin-Chowla 型の合同式

$$\frac{1 - \chi(3)}{2} h(-3d) \equiv \left(1 - \frac{\chi\omega(3)}{3}\right) \frac{h(d)\log_3 \varepsilon}{\sqrt{d}} \pmod{3}$$

が導かれる.

参考文献

- [1] N.C. Ankeny - E. Artin and S. Chowla, The class-number of real quadratic number fields, *Annals of Math.* 56 (1952) 479-493.
- [2] A. Brumer, On the units of algebraic number fields, *Mathematika*, 14 (1967), 121-124.

- [3] K. Iwasawa, *Lectures on p -adic L -functions*, Princeton, 1972.
- [4] H.-W. Leopoldt, *Über Einheitsgruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper*, Abh. Dt. Akad. Wiss., Math. Nat. Kl., Jahrg. 1953 No. 2.
- [5] ———, *Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern*, J. reine angew. Math., 209 (1962) 54-71.
- [6] ———, *Eine p -adische Theorie der Zetawerte. II. Die p -adische Γ -Transformation*, J. reine angew. Math., 274/275 (1975) 224-239.
- [7] K. Shiratani, *On certain values of p -adic L -functions*, Mem. Fac. Science Kyushu Univ. 28 (1974) 59-82.
- [8] W. Sinnott, *On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field*, Annals of Math. 108 (1978) 107-134.
- [9] 高木貞治, *代数的整数論*, 岩波 (1948).
- [10] L. C. Washington, *The calculation of $L_p(1, \chi)$* , J. Number Theory 9 (1977) 175-178.