

正多胞体による4次元空間充填図形

宮崎 興二（神戸大学）

1. 目的

自然界や人工界の造形の中には、規則的な形状のユニットによる2次元平面や3次元空間の幾何学的な充填図形を基礎として広がっているものがある。

この充填図形は周期的パターン（部分の平行移動によって導かれるもの）と非周期的パターン（部分の平行移動によっては導かれないもの）に大別されることがあって、最近ではどちらかという、後者の持つ目新しく自由で有機的な雰囲気のように研究家の関心が集まっている。

ところがこの非周期的パターンの多くは、2次元平面上や3次元空間内でこそ目新しくても、じつは、4次元以上の高次元空間では、ごくふつうの高次元立方体による周期的パターンの射影、あるいは断面、ないしはそれらの規則的な変形、の現れとして理解できることがわかっている。

いいかえると、最近注目を集めている非周期的パターンを研究するということは、とりも直さず、4次元以上の高次元立方体を初めとする規則的な図形による充填図形のうちの周期的パターンを調べる、ということを意味する。

したがって本稿では、正多角形による周期的な2次元平面充填図形ならびに正多面体による周期的な3次元空間充填図形に相当する、正多胞体による周期的な4次元空間充填図形、ならびにその高次元空間への拡張図形、について基礎的に考察して今後の周期的あるいは非周期的パターン研究のための新しい視野を開いてみる。

2. 4次元正多胞体

2次元平面上の正多边形（正多角形の境界図形）ならびに3次元空間内の正多面体に相当する4次元空間内における図形が4次元正多胞体（以下ではたんに正多胞体という）である。

正多胞体とは、合同な正多面体状の3次元空間の粒（以下では正多面体状胞、あるいはたんに胞、と呼ぶ）が各稜まわりに同じ数ずつ同じ状態で集まっている図形であって、図1の6種類がある。

Aは、すべてで5個の正4面体状胞のうち3個ずつが各稜まわりに集まる正5胞体（正多面体のうちの正4面体に相当）、Bは、すべてで8個の立方体状胞のうち3個ずつが各稜まわりに集まる4次元立方体（正8胞体。正多面体のうちの立方体に相当）、Cは、すべてで16個の正4面体状胞のうち4個ずつが各稜まわりに集まる正16胞体（正多面体のうちの正8面体に相当）、Dは、すべてで24個の正8面体状胞のうち3個ずつが各稜まわりに集まる正24胞体（相当する正多面体はない。強いていえば立方体と正8面体の中間図形としての立方8面体、あるいはその双対図形としての菱形12面体、に相当）、Eは、すべてで120個の正12面体状胞のうち3個ずつが各稜まわりに集まる正120胞体（正多面体のうちの正12面体に相当）、Fは、すべてで600個の正4面体状胞のうち5個ずつが各稜まわりに集まる正600胞体（正多面体のうちの正20面体に相当）、である。

いずれも、それぞれを頂点、稜、側面、胞のいずれかを中心とするように3次元空間内へ射影（直射影）したとき得られる点心模型（①）、線心模型（②）、面心模型（③）、胞心模型（④）の各立体模型の図（AからDまでは見取図、EとFは平面図と立面図）で表現されている。

それぞれは右下に付記したような有限回転群の対称性を持つ。 D_n は正 n 角柱と同じ2面体群、 T は正4面体と同じ正4面体群、 O は正8面体あるいは立方体と同じ正8面体群、 I は正20面体あるいは正12面体と同じ正20面体群に属する対称性を意味する。

それぞれの模型の側面の実形のほとんどは3次元空間内で回転する正多面体の規則的な平面図と立面図に現れる多角形に一致するという特徴を持つが、とくに

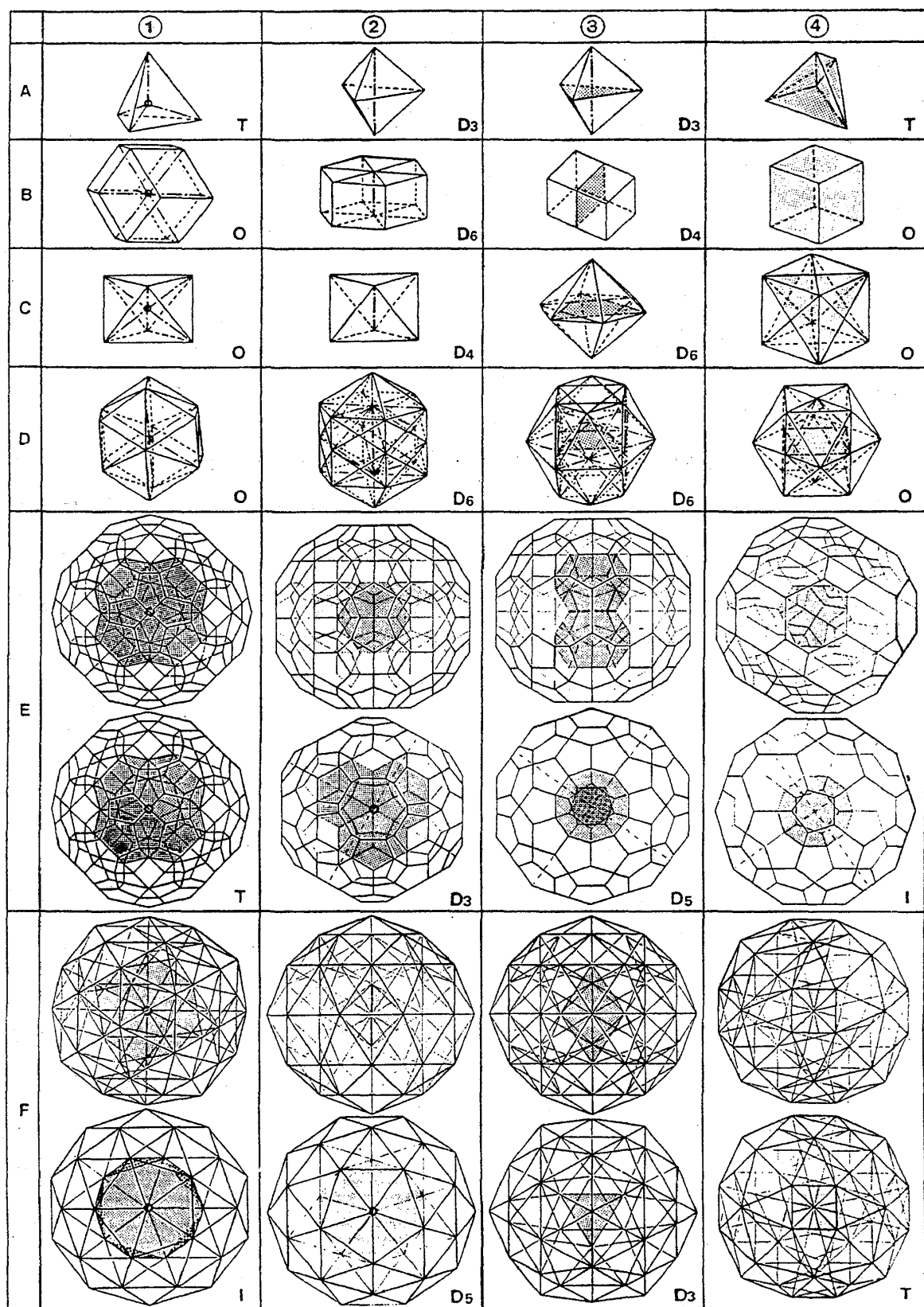


図1 正多胞体の3次元空間への射影としての模型。Aは正5胞体、Bは4次元立方体、Cは正16胞体、Dは正24胞体（以上の4種類については模型の見取図で示す）、Eは正120胞体、Fは正600胞体（以上の2種類については模型の平面図と立面図で示す）。①は点心中模型、②は線心中模型、③は面心中模型、④は胞心中模型。

本稿で主対象とする B (4次元立方体)、C (正16胞体)、D (正24胞体) の各模型についてはつぎのような外形をもつ。

B の①は菱形12面体 (対角線の長さが $1 : \sqrt{2}$ の菱形12枚からなる)、②は正六角柱 (正方形6枚と正六角形2枚からなる)、③は直方体 (正方形2枚と $\sqrt{2}$ 矩形4枚からなる)、④は立方体、である。C の①は正8面体、②は三角8面体 (底辺と高さの比が $\sqrt{2} : 1$ の2等辺三角形8枚からなる)、③は重六角錘 (底辺と高さの比が $2 : 3$ の2等辺三角形12枚からなる)、④は立方体、である。D の①は菱形12面体、②は1個の六角柱 ($\sqrt{2}$ 矩形6枚と正六角形2枚からなる) と2個の六角錘 (底辺と高さの比が $2\sqrt{2} : 3$ の3角形6枚と正六角形1枚からなる) の合体、③は重角錘台 (底辺と高さの比が $2 : 3$ の2等辺三角形12枚と同じく $2\sqrt{3} : \sqrt{7}$ の2等辺三角形12枚、正六角形2枚からなる)、④は立方8面体、である。

3. 合同な4次元正多胞体による4次元空間充填図形

合同な正多胞体を、胞 (多角形状に面縮しているものもある) を共有させて連結したとき4次元空間を充填するものは、周知のように、図1のうちの4次元立方体 (B)、正16胞体 (C)、正24胞体 (D) の3種類である。その場合の充填図形の3次元空間内への射影を図1の配列に従って図2に示す (4次元的に隠れた胞は表現されていない)。

4. $n (\geq 5)$ 次元正多胞体

2次元正多边形が無数、3次元正多面体が5種類、4次元正多胞体が6種類、それぞれあるのに対して、 $n (\geq 5)$ 次元正多胞体には図3の3種類がある。

左端は、 n 次元正4面体で、すべてで $n+1$ 個の $(n-1)$ 次元正4面体状の $(n-1)$ 次元空間が集積している。これを2次元平面上の図で表現するには正

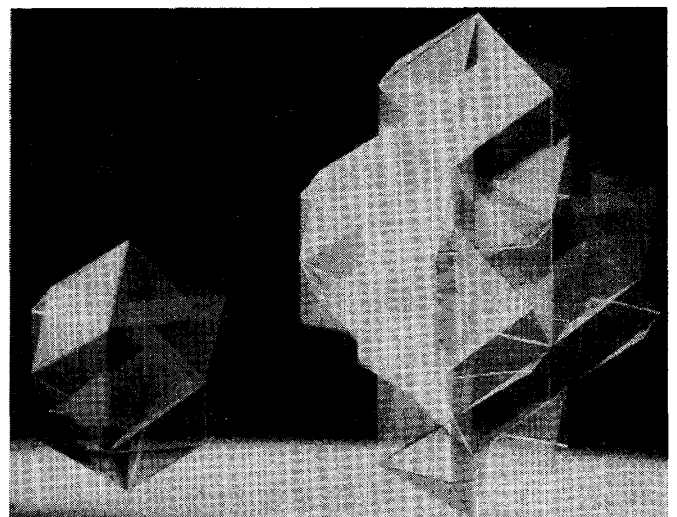
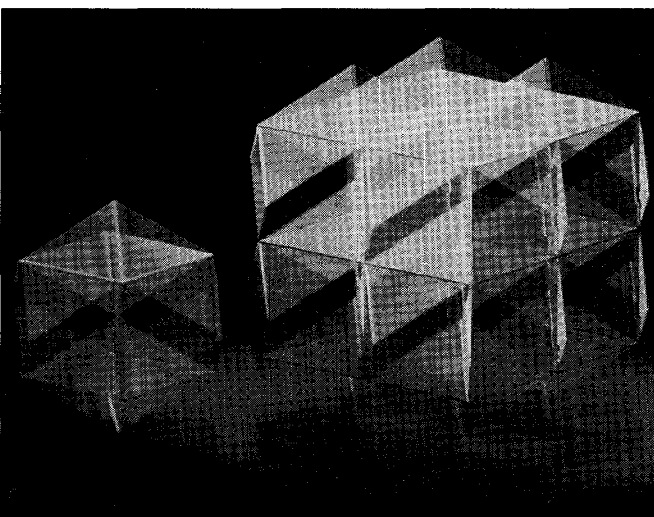
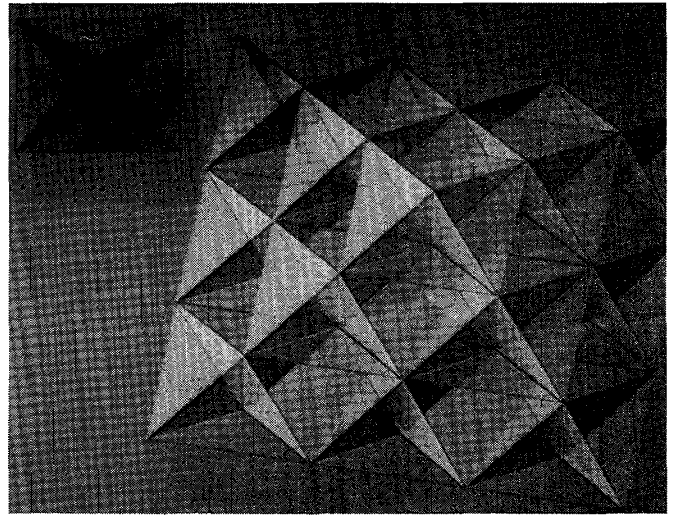
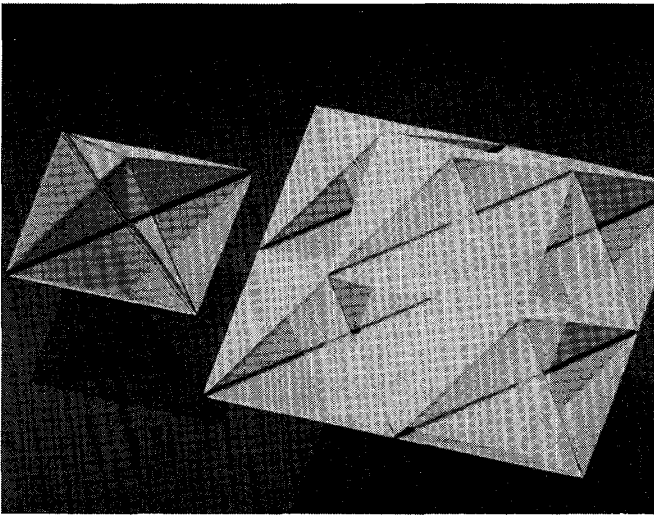
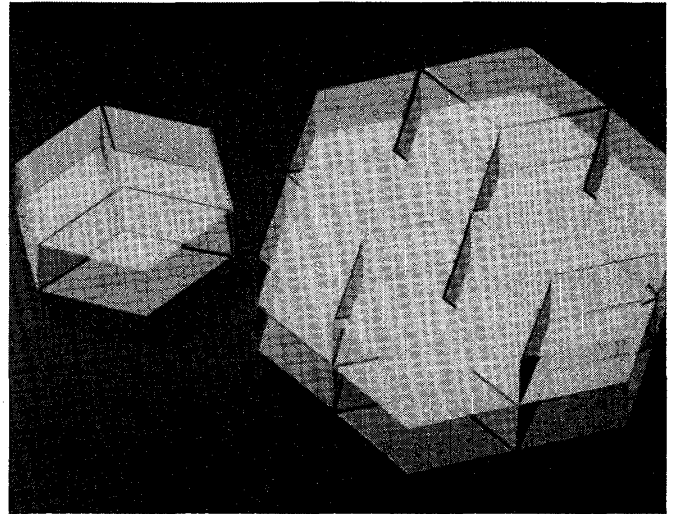
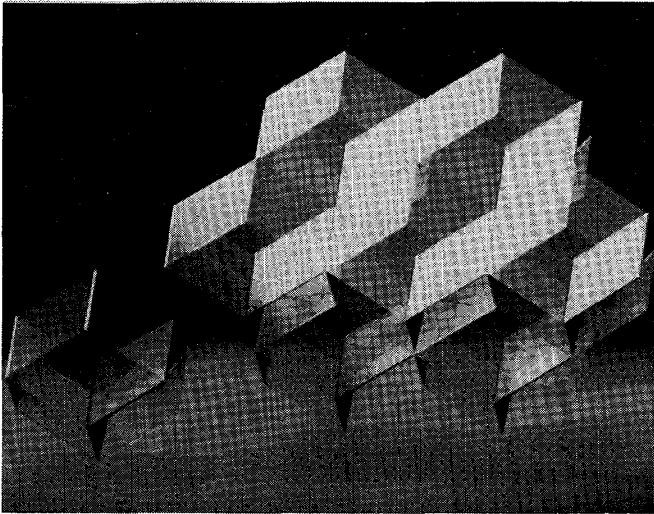
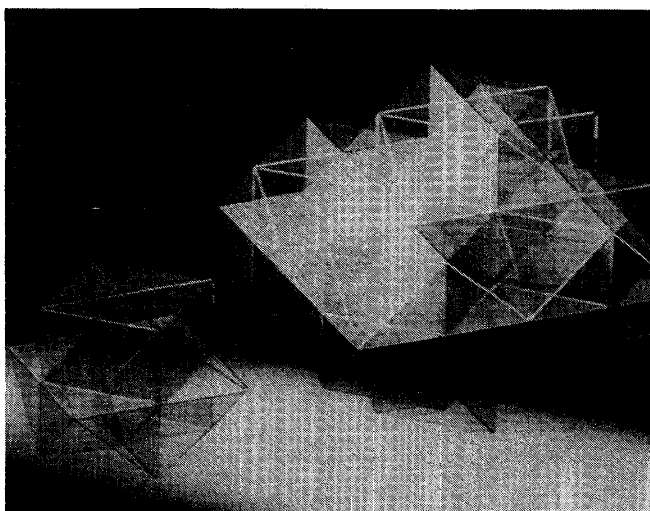
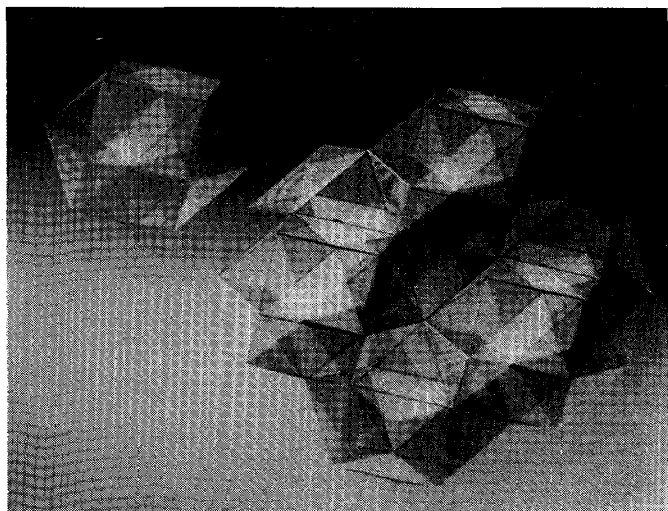
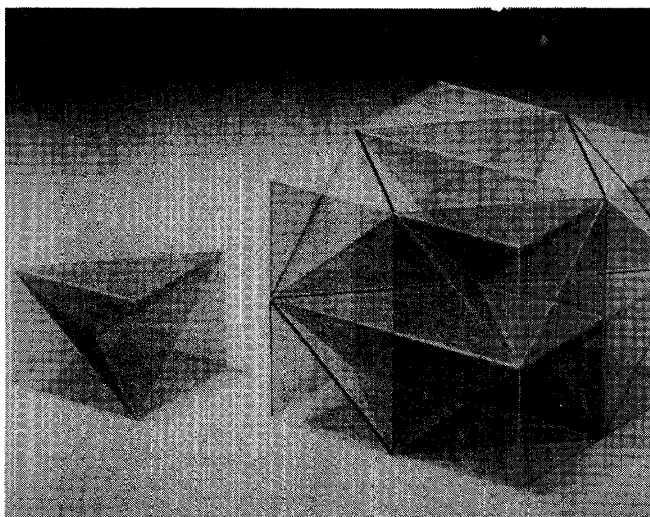
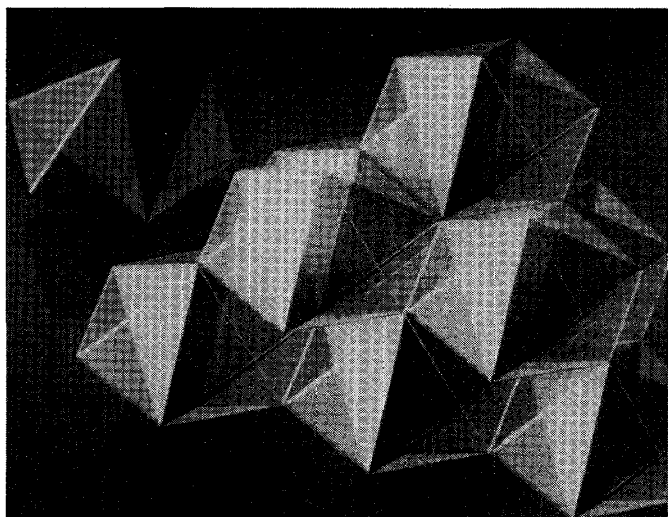
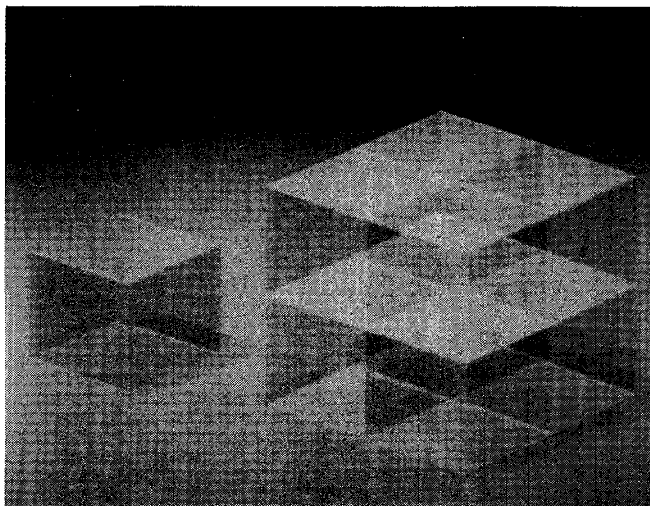
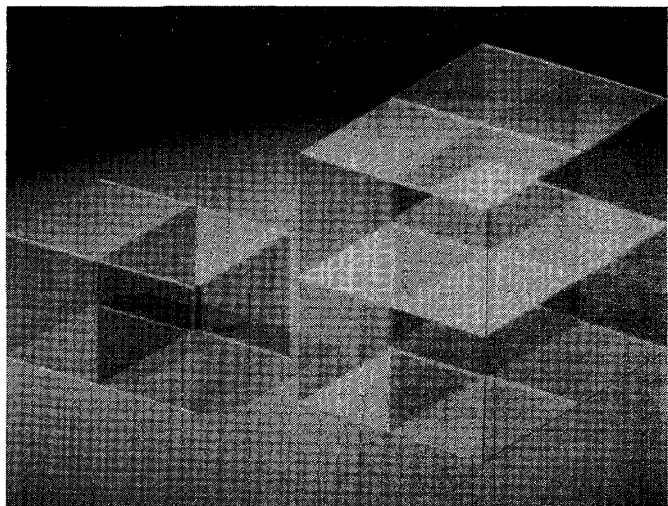


図2 合同な4次元正多胞体による4次元空間充填図形。配列は図1と同じ。CG：今西雅文。



$n + 1$ 角形の中にすべての対角線を加えればよい。

中央は、 n 次元立方体で、 2^n 個の $(n - 1)$ 次元立方体状の $(n - 1)$ 次元空間が集積している。これを 1 次元ずつ低い次元の空間へ直射影していくと、最終的には、正 2^n 角形の中に各辺に平行で等長な辺からなる菱形をすべて加えた図となる。この図は考え方によっては n 次元立方体の 2 次元平面による断面と見ることが出来る。

右端は、 n 次元正 8 面体で、 2^n 個の $(n - 1)$ 次元正 4 面体状の $(n - 1)$ 次元空間が集積している。これを上記 n 次元立方体の双対図形として 2 次元平面上の図で表現するには正 2^n 角形の中に中心を通るもの以外のすべての対角線を加えればよい。

5. 合同な n (≥ 5) 次元正多胞体による n 次元空間充填図形

合同な n (≥ 5) 次元正多胞体を $(n - 1)$ 次元胞を共有させて連結させるとき n 次元空間を充填するものは、 n 次元立方体のみである。

その場合の 2 次元平面上への上述の意味での繰り返された直射影 (2 次元平面による断面とも考えられる) のいくつかの例を図 4 にあげる。右下に次元数を付記する (石原慶一氏考案)。いずれの場合でもユニットの形状を調節することにより、配列を、周期的にも非周期的にも組替えることができ、そのうちの $n = 6$ の場合の変化の一つが有名なペンローズ・パターンとなる。

フェドロフが数え上げたことで知られる平行多面体 (合同なユニットの平行移動のみで側面を共有し合いながら 3 次元空間を充填する多面体。立方体、正 6 角柱、菱形 12 面体、長菱形 12 面体、切頭 8 面体) は、3 次元空間への上述のような意味での繰り返された直射影 (3 次元空間による断面とも考えられる) としての模型の外形である。

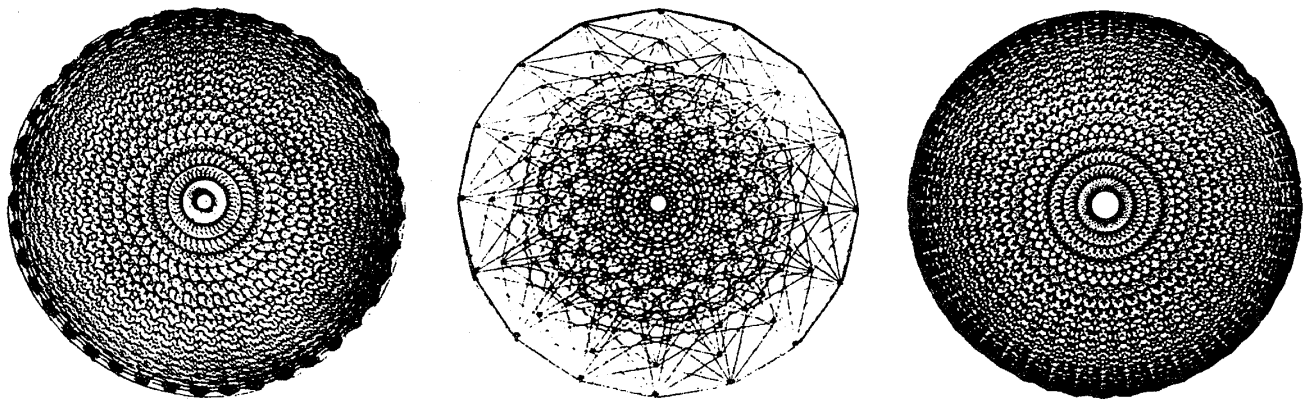


図3 n 次元正多胞体。左端は n 次元正4面体、中央は n 次元立方体、右端は n 次元正8面体。CG：高田一郎。

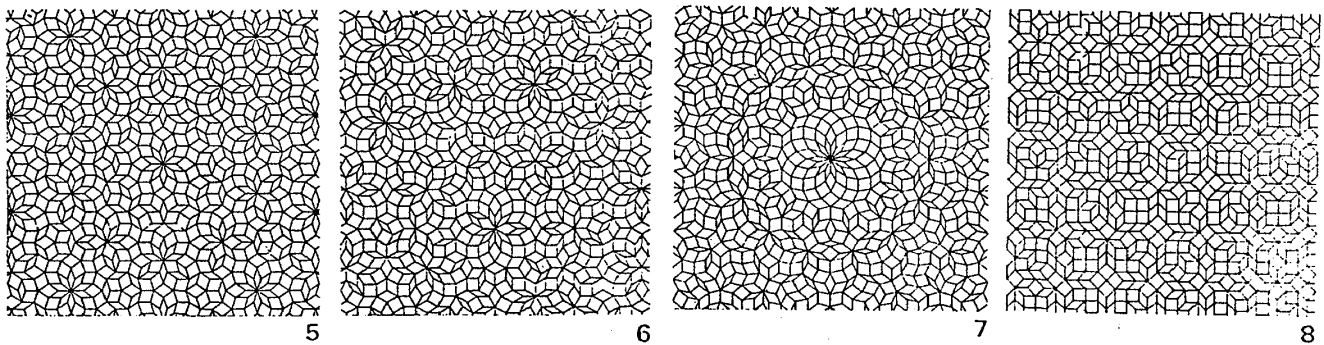


図4 n (≥ 5)次元立方体による n 次元空間充填図形の、射影（繰り返された直射影）、あるいは2次元平面による断面。CG：石原慶一。

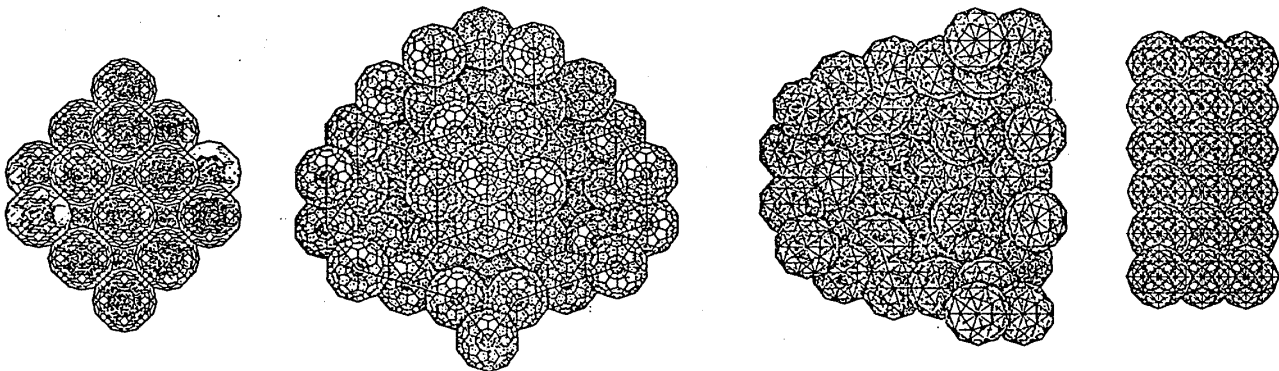


図5 合同な正120胞体（左2種類）と正600胞体（右2種類）による4次元空間内での周期的あるいは非周期的連結図形

6. 関連図形

以上のような高次元空間充填図形（図2、4）に関連する図形にはつぎのようなものがある。

まず、図1のうち図2に関係しないA（正5胞体）、E（正120胞体）、F（正600胞体）の3種類を、胞の共有によって連結させてみる。

正5胞体の場合は、3次元空間における正4面体の場合と同じく、閉じることのない無限に発散するさまざまな造形がつぎつぎ得られると考えられる。ただしそれを3次元空間へ射影した場合、付加されていく正5胞体の姿はきわめて一般的なものとなり、図2のような整った模型としての表現は困難となる。

それに対して正120胞体と正600胞体の場合は、4次元空間を充填するのではないが、胞および側面を共有し合って図5のように連結する。この連結図形は、3次元空間へ射影された場合、その3次元空間を周期的あるいは非周期的に被覆（ユニット同士が側面のみならず3次元空間の部分をも共有し合って3次元空間を部分的には二重に間隙なく覆い尽くす）している。ただし、周期的パターンは、正120胞体の点心模型と線心模型、ならびに正600胞体の面心模型と胞心模型、にそれぞれ現れ、それに対して、非周期的パターンは、正120胞体の面心模型と胞心模型、ならびに正600胞体の点心模型と線心模型、にそれぞれ現れる。理由は、さきに触れたそれぞれの持つ有限回転群の対称性の種類にある。つまり5方対称性を持つもの（ D_5 、あるいは I ）からは非周期的パターンが生まれ、それ以外からは周期的パターンが生まれる。図5には、そのうち正120胞体の点心模型（左端。周期的）、面心模型（左から二つ目。非周期的）、および正600胞体の線心模型（右から二つ目。非周期的）、胞心模型（右端。周期的）を示す。

以上はいずれも合同なユニットからなるが、複数種類のユニットを使う場合はさらにさまざまなパターンを導くことができる。

そのうちの代表的なものが、複数種類の n 次元正多胞体を $(n-2)$ 次元境界図形のまわりに同じ数ずつ同じ状態で集める n 次元空間充填図形である。

この図形の延長線上にあるものとして、2次元平面上には、8種類の半正タイル貼り図形（2種類以上の正多角形が各頂点まわりに同じ数ずつ同じ状態で集ま

る2次元平面充填図形)が、また3次元空間内には、オクテット・ブロック(正4面体と正8面体を交互に配列する3次元空間充填図形)が、それぞれある。

これらに相当する図形を4次元空間内で捜すと、正5胞体と正16胞体による充填図形というものが考えられる。しかし、この図形の成立する可能性はないようである。もし存在するとするなら、図2の正16胞体の欄(C)の、たとえば④において、立方体による3次元空間充填図形の形に射影された正16胞体群のあいだに、図1のA欄で見られるような外形として射影された正5胞体を加えられなければならないが、明かにそのようなことは可能でない。

オクテット・ブロックに相当する n 次元図形、つまり n 次元正4面体と n 次元正8面体による n 次元空間充填図形、が一般的に5次元以上の空間で存在するかどうかは判らないが、この図形は、けっきょく、 n 次元正多胞体による唯一の n 次元空間充填図形としての立方体による空間充填図形に双対なのであって、その存在を模索することは2次元平面上や3次元空間内における周期的あるいは非周期的パターンの研究上無意味ではない。

7. 結論

図1に示す6種類の正多胞体は、図2のように4次元空間を充填する。この操作を n (≥ 5)次元空間において拡張すれば、 n 次元立方体による n 次元空間充填図形1種類のみが得られ、それは2次元平面上で、図4のように周期的にも非周期的にも表現することができる。

このようなところからも、4次元以上の高次元空間における n 次元正多胞体による n 次元空間充填図形に関する考察は、自然界や人工界におけるさまざまな造形に関係する研究において基礎的な重要性を持っている、と結論することができる。

討論(DISCUSSION)

C. Voronoi 分割の観点では空間を各粒子のなわばりに分割しつつして、いわばどの土地の誰かの物、どこかの国の物です。4次元結晶から射影した3次元空間の分割は射影の方法によっては共有域もあり、何か示唆的にも思われます。

小川 泰(筑波大・物理工)