

Eventually covering family について

長崎大学 教養 森川良三 (Ryozo Morikawa)

1. 序言 まづ用語について説明する. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は通常の意味とする. $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ について $S(\alpha, \beta)$ によって, 集合 $\{[\alpha n + \beta] : n \in \mathbb{N}\}$ を表わす. 但し $[]$ は Gauss 記号である.

定義 1. $\{S(\alpha_i, \beta_i) : 1 \leq i \leq k\}$ が eventually covering family (ECF と略記する) であるとは, 十分大なる自然数 n が $\exists i$ の $S(\alpha_i, \beta_i)$ に属していることをいう.

定義 2. 順序対の集合 $\{(r_i, m_i) : 1 \leq i \leq s\}$ が exactly covering set (ECS) であるとは, 任意の整数 n について $\exists i$ によって $n \equiv r_i \pmod{m_i}$ が成り立つことをいう.

定義 3. ECS $\{(r_i, m_i) : 1 \leq i \leq s\}$ ($=E$) が与えられた

時. $S(\alpha, \beta)$ から新しい family $\{S(\alpha_{m_i}, \alpha_{l_i} + \beta) : 1 \leq i \leq s\}$ をつくる. これを $S[E]$ と書く.

とすると ECF の構造に關して. 次の Graham の結果 [3] が基本的である:

ECF $\{S(\alpha_i, \beta_i) : 1 \leq i \leq g\}$ について. ある $d_i \in \mathbb{Q}$ が存在して全ての $d_i \in \mathbb{Q}$ である. これは $\{S_1[E_1], S_2[E_2]\}$ という形になる. ところで $\{S_1, S_2\}$ は ECF, 又 E_1, E_2 は ECS である.

一方. $g=2$ である ECF の構造は well known. つまり $d_i \in \mathbb{Q}$ について $\{S(\alpha_1, \beta_1), S(\alpha_2, \beta_2)\}$ の ECF $\iff 1/d_1 + 1/d_2 = 1$ & $\beta_1/d_1 + \beta_2/d_2 \equiv 0 \pmod{24}$.

従って. ある $d_i \in \mathbb{Q}$ であるような ECF は. 一つの ECS の問題に帰着出来て. 分かっている. これに反して. 全ての d_i が有理数である様な ECF については. 問題は非常に難しくなる. 確かに ECF の問題の特殊なと=3 である. 例えば 次の予想 (A. S. Fraenkel による) が未解決で残っている:

d_i 達が全て互いに異なる様な ECF は $1/d_i = 2^i / (2^N - 1)$

$1 \leq i \leq N-1$ の範囲に限る.

この予想については, Erdős-Graham [1] に Strömberg の
評がある。(問題の背景一般については [1] を参照されたい。)

ある $d_i \in \mathbb{Q}$ の ECF については必ず等しい d_i の pair が 出
来ることは ECS についてはよく知られたことである。

従って, 以下では我々は 全ての $d_i \in \mathbb{Q}$ であるような ECF
の構造を調べる。その考察のあり方を [4] - [7] に沿って
述べるのが本稿の目的である。更に折角の機会であるので,
考へ方の座にあるもの, 及び 示された展望については述
べておく。又証明については, 全くと違って 一言及出来
なかつたので, 最後の部分に それと基本的な事実を 三
述べておいた。それから, その全般的な雰囲気の理解に
資することを目指す。

2. まず問題を少し整理する。二, 三簡単な事実を注意する。

(a) $\mathbb{Q}$ の $\alpha = q/a$, $q, a \in \mathbb{N}$, $(q, a) = 1$ について

$S(\alpha, \beta)$ による β の影響は $[a\beta]$ の値にしかよらない。

(b) 全ての $d_i \in \mathbb{Q}$ のときは, ECF $\{S(d_i, \beta_i) : 1 \leq i \leq k\}$
は, $n \in \mathbb{Z}$ に対する n により, $\mathbb{Z}$ 全体を T 度一重に cover
する。

この二つの事実から, 集合 $\{[(qn+b)/a] : n \in \mathbb{Z}\}$
を $S(q, a, b)$ と書くことにして, $\{S(q_i, a_i, b_i) : 1 \leq i \leq k\}$

が $\mathbb{Z}$ 上-重に cover するものを以下で ECF とする。(= 中には、非本質的さうさうを避けることが出来る。)

と =] で、容易に分かる。

$$\{S(q_i, a_i, b_i) : 1 \leq i \leq n\} \text{ が ECF である} \\ \iff S(q_i, a_i, b_i) \text{ が互いに disjoint である} \iff \sum_{i=1}^n a_i/q_i = 1.$$

このうち、第 2 の条件はすぐ分る。問題は disjointness の方である。この criterion を示したのが [4] である。この内容を次節で簡単に紹介する。

3. $S(q_i, a_i, b_i) \quad i=1, 2$ について $(q_i, a_i)=1$ とする。
更に $(q_1, q_2)=q, (a_1, a_2)=a, a_i = a u_i \quad (i=1, 2)$ とおく。

定理 1. $S(q_i, a_i, b_i) \quad i=1, 2$ を適当に b_1, b_2 を選ぶことにすると disjoint になる $\iff$ 適当な $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ によって $xu_1 + yu_2 = q - 2u_1u_2(a-1)$ になる。

この定理 1 の条件が満たされることを y の最小正の組 (x_0, y_0) とする。つまり $1 \leq y_0 \leq u_1$ である。更に $x_0 > u_2$ のときは (x_1, y_1) を $x_1 = x_0 - u_2, y_1 = u_1 - y_0$ で定義する。

定理 2. $S(g_1, a_1, b_1) \cap S(g_2, a_2, b_2) = \emptyset$

$$\iff u_1 b_2 - u_2 b_1 \in E_1 \cup E_2 \pmod{g}$$

$$E_1 = \{ u_1 x + u_2 y + u_1 u_2 (a-1) : 0 \leq x \leq x_0-1, 1 \leq y \leq y_0 \}$$

$$E_2 = \{ u_1 x + u_2 y + u_1 u_2 (a-1) : 0 \leq x \leq x_1-1, y_0+1 \leq y \leq u_1 \}$$

($x_0 \leq u_2$ のときは $E_2 = \emptyset$ とする.)

証明 1. 2. 3. 4. の [4] に示すように。 $x = 3$ の $d_1/d_2 \notin \mathbb{Q}$ の場合に Th. Skolem の criterion を示す：

$$S(d_1, \beta_1) \cap S(d_2, \beta_2) = \emptyset \iff \exists (x, y) \in \mathbb{N}^2 \text{ により } x/d_1 + y/d_2 = 1 \text{ かつ } x(\beta_1/d_1) + y(\beta_2/d_2) \equiv 0 \pmod{4}.$$

これは $\mathbb{Q}$ のとき、 β_1 の結果は $\llcorner \llcorner$ の奇妙な点をもつてゐる。例として $a=1$ の場合は similar result としなくてはなる。しかし $a > 1$ のとき a の役割、又 Skolem の場合は x, y は unique に決まる。これは β_1 及び、定理 2 の (x_1, y_1) の役割は一寸奇妙である。(特に $y_1 = u_1 - y_0$ であることに注意せよ。) したがって β_1 のとき、 β_1 で述べた様に $d_i \in \mathbb{Q}$ のときは situation が $\llcorner \llcorner$ であることは証明されていると見えてくる。

したがって、殊に、 $d_1 \notin \mathbb{Q}$ $d_1/d_2 \in \mathbb{Q}$ の場合の disjointness criterion を示す：

$\mu \notin \mathbb{Q}$ と $m_1 d_1 = m_2 d_2 = m_1 m_2 \mu$ $m_i \in \mathbb{N}$ $(m_1, m_2) = 1$
 と定義する。このとき

$$S(d_1, \beta_1) \cap S(d_2, \beta_2) = \emptyset \iff \mu \| (d_2 - \beta_1) / \mu \| \geq 1.$$

但し $\|x\|$ は x と x の最も近い整数との距離である。

この結果は [4] を用いた時点では既知と思つてゐるが、
 ようである。証明の手法は [4] で使つたものと同様
 で、ずつと簡単に片づく。しかし結論は既述の二つの場合
 の二つと異なる、注意を要する。

4. ECF の構造の話にもどつて、まづいくつかの注意をす
 る。ECF $\{S(q_i, a_i, b_i)\}$ の各元で $(q_i, a_i) = 1$ にとり代
 りに $Q = \text{L.C.M. } q_i$ とし、 $\{S(Q, a_i, b_i) : 1 \leq i \leq k\}$
 の形のものがより良くなる。この Q を ECF の size とする。
 又 a_i を modulus, b_i を residue とする。

residue は mod Q で考えればよい。更に、各 sequen-
 ce を平行移動 (たゞ a と同一視) して a の方が良くなる。
 次の定義を導入する。

定義 4. size Q の moduli の等しい ECF
 $\{S(0, a_i, b_i)\}$ と $\{S(Q, a_i, c_i)\}$ $1 \leq i \leq k$ が equivalent

である。 $\exists T \in \mathbb{Z}$ なる 2 . $c_i = Ta_i + b_i \pmod{Q}$ が $1 \leq i \leq k$ について成り立つことをいう。

$k=3$ で、ECF の構造をいうとき (相互に関連した) 2 つの問題に分れる。

A. 適当に residues を与えれば、ECF にあり得る Q , a_i の criterion を得ることは。

B. possible residues の組を (equivalence を除く) list up するのは。

これらの問題について、§3 の criterion を使えば、比較的簡単に ECF について調べることができる。例として。

(I) $k=3$ である ECF は、次の 3 つの値で表される。

($S(Q, a, b)$ を単に $(a; b)$ で表す。)

(i) $Q = 2(A+B)$, $(2A; -1) \cup (B; 0) \cup (B; Q/2)$,

(ii) $Q = A+2B$, A : odd $(A-1) \cup (B; 0) \cup (B; (Q-1)/2)$,

(iii) $Q = 3$, $(1; 0) \cup (1; 1) \cup (1; 2)$,

(iv) $Q = 7$, $(4; 0) \cup (2; 5) \cup (1; 4)$.

注意: (iv) の Fraenkel の予想は正しいことが知られている。

又 $k=2$ の場合は、全く $Q = A+B$, $(A; 0) \cup (B; -1)$ と

同値であることは、Fraenkel により given [2]. 又

§3 の結果より容易に分子。

(12) $a \in \mathbb{N}$ $k \geq 2$. $Q = a^k - 1$, moduli $x \mid 2$. a^{k-1} , $a^{k-2}, \dots, a, 1 \in a-1$ の k 重根 $1 \mid 2$ x , $a \nmid a \nmid 2$ 2 . Erf が存在する。例として a^{k-1} の residues $\in \{a^{k-1}$ ($0 \leq i \leq a-2$), a^i ($0 \leq i \leq k-2$) の residues $\in u a^{k-1} + a^i(a-1) - 1$ ($1 \leq u \leq a-1$) に x が $1 \mid 2$ 。 $x \mid 2$ $k \geq 3$ $a \nmid x \nmid 2$ 。 $= a$ residue set for unique x である。 ($k=2$, $a \geq 3$ $x \mid 2$ $x \nmid 2$ $x \nmid 2$ 。)

(1) 更に次の予想を得た:

$$\chi_1(Q, a_i) = 1 \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{and} \quad \text{residues } r_{42} \equiv -\frac{1}{2} \pmod{Q}.$$

5. $\varepsilon = 1$ が、後継者 ECF を調べるには、 $\{j\}$ の criterion が μ では 右が少し大きくなりすぎにすぎない。従って、 $\{j\}$ の (Global な) ECF の為の criterion が整った [6].

それについて以下に述べるが、それが自身興味深いと思
われる。一つの命題から始めよう。

命题 1. $g, a \in \mathbb{N}$, $(g, a) = 1$ とする

$$S(q, a, b) = \{ z : az \equiv b-j \pmod{q} \mid 0 \leq j \leq a-1 \}.$$

＝かにかきり、次の定義をよしよ。

定義5. $(q, a) = 1$ に対して、 $\hat{a}$ を $a\hat{a} \equiv 1 \pmod{q}$ の最小正整数とす。 $V(q, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \hat{a}(b-j) : 0 \leq j \leq a-1 \}.$

又 $(q, a) = d > 1$ のときは、 $q = dq'$ $a = da'$ とし

$$V(q, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{0 \leq j \leq d-1} V(q', a', [b/d] + j q')$$

＝かにかきり、次の criterion (#) を得よ。

$$(\#). \{ S(Q, a_i, b_i) : 1 \leq i \leq k \} \text{ が ECF}$$

$$\Leftrightarrow \{ CV(Q, a_i, b_i) : 1 \leq i \leq k \} \text{ が mod } Q \text{ の完全剰余系を}$$

与ふ。＝かにかきり C は $(C, Q) = 1$ のある数を一つ固定し、 a 。

＝かにかきり、注意を述べよ。

(a) C は必ずしも 1 に等しくなくともよい。しかし (#) を適用するときは

適当な C をとる＝かにかきり議論を簡明にする＝かにかきり。

(b) (#) は ECF と ECS との類似性を示している。つまり、

$V(Q, a_i, b_i)$ は公差 $-\hat{a}_i$ 、初項 $\hat{a}_i b_i$ 、項数 a_i の等差数列であり、＝かにかきり $\text{mod } Q$ の core になる、＝かにかきり ECF である。

ある。

(c) (d) によつて、[4] に述べた予想は容易に肯定される [5]。

(d) 命題 1 を出発点にして、 $S(q_i, q_i, d_i)$ $i=1, 2$ の disjoint の条件を $d_i = 0$ とおきまゝ。それの元が [4] で与えた証明よりわかる。しかしそれは $d_i \in \mathbb{Q}$ には使えない。つまり一長一短である。

6. 論文 [6] の内容に入る前に、先づこの理論構築の基本方針について説明しておく。上述の様に、又 Graham の結果で十分な様に、ECF の裏には ELS の形影相伴、という。従つて、先づこの次の概念構築をいう。

定義 6. ECF が standard な ECF である (SECF という) とは、 $\mathbb{Z}[E]$ が $\mathbb{Z}[E_1] \cup \mathbb{Z}[E_2]$ の和である。 (または、タイプ I, II という。) 但し、 $\mathbb{Z}$ は $\{ \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2 \}$ は ECF E, E_1, E_2 は ELS, 又 $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ は $S(1, 1, 0)$ と表さる。

この定義を適用すれば、Graham の結果は、 $d \in \mathbb{Q}$ である ECF は SECF of type II に属するということである。とこの結果の場合、それは「かな」。その代りに
 “任意の ECF の近くには、必ず SECF がある”

という類の命題を確立しようというのか、お互々目論見である。勿論、= 1 の essential なのは "近く" の定義である。それについて、研究がある訳ではない。しかし今迄の考察から、"近く"、"近く" というのに、= 1 の経験がある。つまり、

(1) "moduli set 近く" というのは $\text{SECF} \text{ a moduli set}$ である。
 "() を除く" と "近く" 意味。

(2) "residue set 近く" というのは、 $\text{SECF} \text{ a residues}$ の
 図 1 を指し示す "近く" 意味。

= a line に沿って、(b) では、" () を除く" 結果を付した。

(1) 4.7.10 I の SECF (= これは本質的に ECS である) の近くにある ECF とする:

$\text{ECS } E = \{ (x_i, m_i); 1 \leq i \leq S \}$ とする。但し $-m_{i+1} \leq x_i \leq 0$ としておく。又 $\|E\| \stackrel{\text{def}}{=} \text{L.C.M. } m_i$ とする。以下条件 (*) が満たされることを示す。

(*) 存在 $g \in \mathbb{N}$, $(g, \|E\|) = 1$ かつ E の各 α 件に g の $(x, \|E\|)$ で、 $-g+1 \leq x \leq 0$ がなり、かつ α である。

= a である $Q = \|E\| - g$, $a_i m_i = \|E\|$, $g b_i \equiv a_i x_i \pmod{Q}$ である Q , a_i , b_i を既約定数と示す。但し i は (1) に示した g に対する pair は除く a_i の条件を満足する。

= a である $\{ S(0, a_i, b_i) \}$ は ECF になる。

注意. 条件 (4) は $g=1$ の時口. 非零に起り易い. 一つ
(上, 1511) と " ; 対かおたは. 調節して $x=0$ に $x_1, x_2 < 0$
はす".

(12) residue on SECF at 420 nm & 430 nm

$Q = a^w + 1$, modulo ϵ_1, ϵ_2 . a^i ($1 \leq i \leq w-1$) $\in a-1$ 個 $\sim$ ϵ_1
 ϵ_2 . $1 \in a+1$ 個 $\sim$ ϵ_2 . $\therefore a$ ϵ_1, ϵ_2 possible residue set $\in$ list up
 $\uparrow$ $\epsilon_1 = \epsilon_2 \in \mathbb{F}_2$.

また注意すべきことは、 α 様相 SECT が存在するということ。
 である。今 $S_1 = S(Q, \alpha^u, 0)$, $S_2 = S(Q, 1, 0)$ にとり、2.

E_1 is tree

```
graph TD
    a --> P
    a --> i
    a -.-> dots
    dots -.-> i
    subgraph "a-1"
        i
    end
```

$\Rightarrow P$ -process is $W-2$ @ $\forall$, then

また k に対して $N \in \mathcal{C}_S$ と $2 \leq S_1[E_1] \vee S_2$ を示す。以下。

(ECS と tree との関係, 又 P-process の話口 [8] を参照
してください。又 1983 年 11 月 山形大のしんじょうの
報告にも、概要が述べています。)

結論は、 $W=2$ と $W \geq 3$ と分かった。

$W = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 1 \pmod{a-1}\}$. $a-1$ 個の modulo $a-1$ の residues $\in \mathbb{Z}$ は $a+1$ である。 a residues は 自然数的に送るべきである。 a residues $\in b_i$ $1 \leq i \leq a-1$ とする。 $b_1 = 0$ は $a+1$ である。

$a \in \mathbb{Z}$ $0 = b_1 < b_2 < \dots < b_{a-1} \leq a^2 - a + 1$.

で、各 $a_{i+1}-b_i \leq a$ であるように a を選ぶことはできる。又同様に a を i に入れれば、 a が $a_{i+1}-b_i$ であることがわかる。つまり

$$1) \text{ 左の種類の } a: \text{even } a \text{ に対して } (2a-1)! / (a+1)!(a-1)!$$

$$a=2A+1 \text{ のときは } (2a-1)! / (a+1)!(a-1)! + (2A-1)! / (A+1)!(A-1)!.$$

$W \geq 3$ のときは、 a^{W-1} a residue の性質に $a^{W-2}, \dots$ と進むことができる。詳細は [6] に譲りておく。 $a^{W-1} + (a-3)a/2$ の同値で a も a が加えられる。又 a 中、 $a^{W-1}+1$ 個は SECF である。

この結果は、例として $W=2$ と $W \geq 3$ の事情が変化するのは、上の SECF を与える $(a-1)(a-2)/2$ 個 (これは SECF である) は W に W relate した a の点と a である。

P -process は ECF の理論に於いて a の役割を果すことは、平面的な a の如くである。

(A) ECF がある条件の下では (これは可変制限的変数である) SECF に a である:

$$(Q, a_i) = 1, 1 \leq i \leq h, \text{ 且つ, } \exists a_i > 2Q \text{ である。} \text{ であるとき}$$

ECF $\{S(Q, a_i, b_i): 1 \leq i \leq h\}$ が存在する。これは、

$$S(Q, a_i, -1) \cup S(E) \text{ と同値である。}$$

7. このことは、今とちがったところにある問題の中で、結論が得られる a の a の a である。

(1) [7] では次の問題をとり扱う。

$$Q = a_1 v_1 + a_2 v_2, \quad (Q, a_i) = (a_1, a_2) = 1 \text{ とする。}$$

このとき moduli とし、 a_1 を v_1 個 a_2 を v_2 個 とつ 様な SET が存在する ことは容易に分る。この residue set を list up すればよい。

この場合 一方の例えは v_2 個の a_2 について v_2 residues を与えれば、 a_1 の方は自動的に決まる。とすることで、この v_2 個の residues は次の様に与えられるものと常に同値である。

$$\text{つまり、} v_2 \text{ 個の整数を } 0 \leq c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_{v_2-1} \leq v_1 - 1$$

にとり、 $n(l, m) \stackrel{\text{def}}{=} [(c_l + m v_1) / a_2] \quad 0 \leq l \leq v_2 - 1, 0 \leq m \leq a_2 - 1$ とおく。又 t を $a_1 t \equiv a_2 \pmod{Q}$ の整数を一つとっておく。

ここで $\{-lt + m v_1 - n(l, m) a_2 : 0 \leq m \leq a_2 - 1\}$ を考えよう。これは、相ついく長さ a_2 の整数である。この中の一番大きな整数、これを $0 \leq l \leq v_2 - 1$ についてとっていったものが求める residue set である。難しいのは、そして銀目そのは、そういうものに限る方であるか。詳細は [7] 参照。

例えは、 $(v_1, v_2) = 1$ のとき、同値であるものは $(v_1 + v_2 - 1)! / v_1! v_2!$ 個出て来る。

(2) [4] の延長上にある問題とし、 $S(q_i, a_i, b_i) \quad i=1, 2, 3$ が disjoint である為の criterion を探すことを考えたが、

これについて、今 $a \equiv 3$, $g = g_1 = g_2 = g_3$ & $g \equiv a_1, a_2, a_3$ は $a = 7$ と互いに素という条件の下で(か分る) なる。又 possible residues を list up すると $g \equiv 1$ と $g \equiv 2$ となる。

結果は次の様である。二つが disjoint という = となる。

$$\begin{cases} x_1 a_1 + y_1 a_2 = g \\ x_2 a_2 + y_2 a_3 = g \\ x_3 a_3 + y_3 a_1 = g \end{cases} \quad (x_i, y_i) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{が存在する。}$$

ここで、若 $y_i \in$ 最小正整数 $< a_i$ 。 $a = 3$ で、上の relation から $(a_i, a_j) = 1$ に注意すると、 $\exists f \in \mathbb{N}$ により $g f = x_1 x_2 x_3 + y_1 y_2 y_3$ に出来る = と分かる。

定理3. 上述の situation において、どの様に residue を g と a_i と互いに素。三つが disjoint には出来ない。

$$\iff f=1 \text{ \& } x_1 \leq a_2, \quad x_2 \leq a_3, \quad x_3 \leq a_1$$

$$\text{又は} \dots g = a_1 + a_2 a_3 \quad a_1 > a_2, a_3.$$

つまり $f=1$ の時は、二つの場合があるのだが、それらの数値例を与えておく。 $g = 2536$ $a_1 = 101$ $a_2 = 117$ $a_3 = 203$ は disjoint には出来ない例、又 $g = 265$ $a_1 = 19$ $a_2 = 9$ $a_3 = 34$ は disjoint に出来る。

この様な結果を (a_i, a_j) が公約数をもつとせ、又は4つ以上の sequences についても得ることを整列し、このときの上の f の様な適当な不変量が足つかないとしてもあつて、取り扱えるものである。

8. 今迄に述べて来たことは、全て証明抜きにせざるを得なかった。そして、それぞれの場合に少しづつ工夫が必要なのであるが、中でも basic なことは、三注意して、読者の理解の一助にしたい。

$(q, a) = 1$ のとき $S(q, a, b)$ の value は $\text{mod } q$ の剰余類の合併であるから、 $\mathbb{Z}$ の代りに、

$$\mathbb{Z} \ni z \longrightarrow \exp(2\pi i z/q) \in \mathbb{C} \quad \text{に写してとり扱う。}$$

この q 個の点から成る円を $C(q)$ と書く。又この円周上の一つにつき a 点を segment とよぶ。

この時、 $S(q, a, b)$ の value は $a\hat{a} \equiv 1 \pmod{q}$ である $\hat{a}$ によつて、長さ a の segment $b, b-1, \dots, b-a+1$ を合併したものの属する類に属する。

これは、二つというものを $S(q_i, a_i, b_i)$ についてもあつて、相互関係は混み入つて、併に分り難い。特に $\text{mod } q$ で所り違ふときは、面倒である。こゝでよく使うのは、

(1) 適当な C を全体にわたって $\hat{c}_i \pmod{q}$ が比較的小さい
 "数" C である $\pmod{q}$ の形に区別する。184 では §4, §6 に出てきた moduli $a^{w-1}, a^{w-2}, \dots, 1$
 の場合は $C = a^{w-1}$ になる。

(2) 二つの modulus a_1, a_2 から出てきた $\hat{a}_i$
 について (symmetry を断念して) 一方を $a_2 \hat{a}_1$ 倍、他方
 は長さを a_2 の segment として扱う。

二つの場合、 t と τ 基本的なことは [4] Lemma 2 で示さ
 れる事実である。

(1) $(a_1, a_2) = 1$ のとき $a_1 t \equiv a_2 \pmod{q}$ となる t は、 τ

(q) 上の長さ a_1 の segment を t 倍する。これは (q) 上
 で、距離が $\tau_0 + a_2$, τ_0 の α 個、長さは a_1 の y_0 個、短さは
 y_1 個、但し τ_0, y_0, y_1 は定理 1, 2 に出てきたものである。

(2) $(a_1, a_2) = a$ のときは $a_1 t = a u_1$ とする。一つの
 block が $\underbrace{\overset{\text{長さが } a_1}{\circ \quad \circ \quad \circ \quad \dots \quad \circ}}_{a \text{ 個}}$ のような u_1 個出てくる

これは (q) 上の分布について、(1) と同様のことが出てくる。

これは、一見奇妙な定理 1, 2 の理由である。以上

参考文献

- [1] P. Erdős - R. L. Graham : Old & new problems and results in combinatorial number theory . Geneva . 1980.
- [2] A. S. Fraenkel : The bracket function and complementary set of integers . *Canad. J. Math.* 21 (1969) 6-29.
- [3] R. L. Graham : Covering the positive integers by disjoint sets of the form $\{ [nd+\beta] : n=1, 2, \dots \}$. *J. Comb. Th. Ser. A* 15 (1973) 354-358.
- [4] R. Morikawa : Disjointness of sequences $[dn+\beta_i]$, $i=1, 2$. *Proc. Japan Acad.*, 58 (1982) 269-271.
- [5] — : On eventually covering families generated by the bracket function . *Bull. Fac. Lib. Arts, Nagasaki Univ.*, (Natural Science) 23. (1982) 17-22.
- [6] — : " II. *ibid.*, 24 (1983) 1-9.
- [7] — : " III. " ., to appear in vol 25.
- [8] — : On a method to construct covering sets. *ibid.*, 22 (1981), 1-11.