

二階算術の諸公理 AC, DC, CA, BI の関係——

Cut-Elimination の初等的応用として

広大・総合科・数理情報 新井 敏康 (Toshiyasu Arai)

§1. 準備

L_1 : 一階算術の言語。constants は $=, <$ と primitive rec. functions (の定義) に対応する function constants 全部。first order variables は $x, y, z, \dots, n, m, k$ で表わす。これは number variables とも言う。

L_2 : 二階算術の言語。 $L_2 = L_1 + \{X_i : i \in \omega\}$ 。各 X_i は unary set variable。この原稿のほとんどが L_1 のところでは二階算術の二階の variables は set (predicate) variables のみ、i.e., function variables は含まないとしてあるが、ときどき (WLK や BI が かさねるとき) function variables も入っていることがある。

記法 $n \in X \Leftrightarrow X(n)$; $n \notin X \Leftrightarrow \neg X(n)$ 。

L_2 の formulae の集合 $\mathcal{F}$ について次の schemata を考える:

$A \in \mathcal{F}$ について

$$\mathcal{F}\text{-CA} : \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow A(n))$$

$$\mathcal{F}\text{-AC} : \forall n \exists X A(n, X) \rightarrow \exists Y \forall n A(n, (Y)_n) \quad \text{但し } L.$$

$(Y)_n = \{m : Y(\pi(n, m))\}$, π はある pairing function w/ inverses π_0, π_1 .

$$\mathcal{F}\text{-DC} : \forall X \exists Y A(X, Y) \rightarrow \forall U \exists Z [(Z)_0 = U \& \forall n A((Z)_n, (Z)_{n+1})]$$

$$\mathcal{F}\text{-GDC} : \forall n \forall X \exists Y A(n, X, Y) \rightarrow \forall U \exists Z \forall n [(Z)_0 = U \& A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})]$$

$$\mathcal{F}\text{-IA} : A(0) \& \forall n (A(n) \rightarrow A(n+1)) \rightarrow \forall n A(n)$$

また、 $\mathcal{F} = \Delta_1^0, \Delta_1^1, \Delta_2^1, \dots$ により.

$$\mathcal{F}\text{-CA} : \forall n (A(n) \leftrightarrow \neg B(n)) \rightarrow \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow A(n))$$

$$A, B \in \Sigma_1^0, \Sigma_1^1, \Sigma_2^1, \dots$$

Formulae の集合はうっすに定義される。例えば、

1. $\Sigma_0^0 = \Pi_0^0 = \Delta_0^0$ = the set of bounded formulae in L_2

2. Σ_1^0 は $\exists n B$ w/ $B \in \Pi_0^0$ なる形々の formulae の集合。

3. Σ_1^1 は $\exists X A$ w/ $A \in \Pi_\infty^0 = \Pi_0^1 = \Sigma_0^1$ (第二 order の quantifier 無し) の形々の formulae の集合。

NB. これらの formulae の集合の元には $\in$ の parameter は occur してはいない。

Rem. $\mathcal{F} = \Sigma_1^1$ などのように、 $\mathcal{F}$ が $\in$ に関与してはいない。

$\mathcal{F}\text{-GDC}$ の最初の集合 U は指定しなくてよい。

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow (n=0 \& Y=U) \vee (n \neq 0 \& A(n, X, Y)) \in \mathcal{F}.$$

これは、 $\mathcal{F}$ に set parameter (X, Y) (外の!) を与えたからである。

ある。 Σ_1^1 や $\Sigma_1^1\text{-DC}$ でも U を指定しなくてよいかは不明。

Formulae の集合 $\mathcal{F}$ について.

1. $\mathcal{F}^- \equiv \{A \in \mathcal{F} : A \text{ に } =\text{-階の parameter ない}\}$
2. $\mathcal{F}^+ \equiv \{A \in \mathcal{F} : A \text{ に } \neq\text{-階の parameter ない}\}$

以下で考える $=$ 階算術の理論は、 ω に断わらない限り、

次の理論 $\Sigma_0^0\text{-CA}_0$ を base theory として含む: $\Sigma_0^0\text{-CA}_0$ の公理は、

1. L_1 の constants についての公理.
2. $\Sigma_0^0\text{-CA}$
3. $IA : \forall X [0 \in X \ \& \ \forall n (n \in X \rightarrow n+1 \in X) \rightarrow \forall n (n \in X)]$.

そして、公理 (図式) S' について、理論 $\Sigma_0^0\text{-CA}_0 + S'$ (S' の公理を

$\Sigma_0^0\text{-CA}_0$ に加えた理論) そのものを S'_0 と書き、また、理論

$\Sigma_0^0\text{-CA}_0 + S' + \Pi_1^1\text{-IA} = \Sigma_0^0\text{-CA} + S'$ のことを S' と書く。 S'_0 と

S' の違いは、Induction Axiom が、一つの Π_1^1 -sentence IA ではない、

ているか (S'_0)、すべての L_2 の formulae ($= \Pi_1^1$) に、 IA を適用してよ

いか (S') の差。

$S' = \mathcal{F}\text{-AC}, \mathcal{F}\text{-DC}, \mathcal{F}\text{-GDC}, \Delta_1^1\text{-CA}$ について、 SR_0, SR は、公理 S を対応する rule でかきかえて S_0, S から得られる理論を

表わす: S の公理は $A \rightarrow B$ (の universal closure) という形をして

いる。 SR は、 A / B という rule, つまり、 $SR \vdash A \Rightarrow$

$SR \vdash B$ ということ。但し、 $\Delta_1^1\text{-CAR}$ 等は慣習に従って、

$\Delta_1^1\text{-CR}$ と書く。

次に、 Π_n^1 -CA^{< ω} の定義。 $\prec$ を、ある primitive rec. well-ordering w/ the least element 0 と ω の primitive rec. な predicates, function Suc, Lim, pd を:

Suc(β) $\Leftrightarrow$ β is a successor ordinal wrt $\prec$;

Lim(β) $\Leftrightarrow$ β is a limit ordinal wrt $\prec$;

pd(β) = $\begin{cases} \beta \text{ の } \prec \text{ についての predecessor} & \text{if Suc}(\beta) \\ \beta & \text{o.w.} \end{cases}$

となるものがある。(具体的に考えるのは、 ϵ_0 や Γ_0 の standard well-ordering だけ。) 各 $n \geq 0$ について formula $\text{Hier}_2^n(X, Y)$ を次のように定義する;

$$\text{Hier}_2^n(X, Y) \Leftrightarrow (Y|_0 = X \ \& \ \forall \beta \prec \omega [(\text{Suc}(\beta) \rightarrow (Y|_\beta = P_n((Y)_{\text{pd}(\beta)}))) \ \& \ (\text{Lim}(\beta) \rightarrow (Y|_\beta = \sum_{r \prec \beta} (Y|_r))]]$$

但し、1. $X = Y \Leftrightarrow \forall n (n \in X \Leftrightarrow n \in Y)$

2. $\sum_{r \prec \beta} (Y|_r) = \{(X, n) : \beta \prec \omega \ \& \ n \in (Y|_\beta)\}$

3. $P_n(X, x)$ は Π_n^1 -complete predicate.

3.0 $P_0(X) \triangleq X' \triangleq X$ の jump $\triangleq \{n : \{n\}^X(n) \downarrow\}$

$$= \{n : \exists m \ T^X(n, n, m)\} = \{n : \exists m \ T(n, n, \bar{X}(m), m)\}$$

T : Kleene の T -predicate, $\bar{X}(m) = \langle x_0, \dots, x_{m-1} \rangle$ s.t.

$$x_i = 0 \Leftrightarrow i \in X \quad \forall i < m.$$

($\Leftarrow$ については $\Pi_0^1 \in \Pi_1^0$ としている)

3.1 $P_1(X) \triangleq X$ の hyper-jump $\triangleq \mathcal{O}^X$, etc.

3.2. $n \geq 2$ について $P_n(X)$ は Π_n^1 -predicate in $X \in \text{enumerate}$ (2) < 3.

各 'ordinal' α について, theories $\Pi_n^1-CA_0^\alpha$, $\Pi_n^1-CA^\alpha \in$.

$$\Pi_n^1-CA_0^\alpha \equiv \Sigma_0^\omega-CA_0 + \forall X \exists Y \text{Hier}_\alpha^n(X, Y)$$

$$\Pi_n^1-CA^\alpha \equiv \Sigma_0^\omega-CA + \forall X \exists Y \text{Hier}_\alpha^n(X, Y)$$

また,

$$\Pi_n^1-CA_0^{<\alpha} \equiv \bigcup_{\beta < \alpha} \Pi_n^1-CA_0^\beta = \Sigma_0^\omega-CA_0 + \{ \forall X \exists Y \text{Hier}_\beta^n(X, Y) : \beta < \alpha \}$$

$$\Pi_n^1-CA^{<\alpha} \equiv \bigcup_{\beta < \alpha} \Pi_n^1-CA^\beta$$

とする。(ふつうは, α を下に書いて, $\Pi_n^1-CA_\alpha$ とするか. こ
うすると, IA を制限していることを表わす添字の 0 を書く
場所がなくなってしまう. S. Feferman 流なら, $\Pi_n^1-CA_0^\alpha$ を
($\Pi_n^1-CA_\alpha$) と書く.)

明らかに, $\Pi_n^1-CA_0^\alpha \vdash \forall X \exists Y \text{Hier}_\beta^n(X, Y)$ for each $\beta < \alpha < \omega$
より, $\Pi_n^1-CA_0^\alpha = \Pi_n^1-CA_0^{<\alpha \cdot \omega}$. 従って, $\Pi_n^1-CA_0^{<\alpha}$, $\Pi_n^1-CA^{<\alpha}$ で,
 α が additive principal のとき, i.e., $\alpha = \omega^\beta$ の形するときだけ扱え
ばよい. これは absolute hierarchy $\Pi_n^1-CA_0^\alpha$, $\Pi_n^1-CA^\alpha$ としてはま
くいいかない:

$$\Pi_n^1-CA_0^\alpha \equiv \Pi_{n-1}^1-CA_0 + \exists Y \text{Hier}_\alpha^n(\phi, Y) \quad (X = \phi, \text{空集合})$$

$$\text{但し, } \Pi_{-1}^1-CA \equiv \Sigma_0^\omega-CA, \Pi_0^1-CA \equiv \Pi_1^0-CA. \quad (\Pi_{-1}^1-CA = \Delta_1^0-CA \text{ の } \\ \text{「 } \exists Y \text{」 が「 } \forall Y \text{」 かつ (ね) })$$

Lemma 0.1

1) $S = AC, DC, GDC$ について.

$$\Sigma_{n+1}^1-\tilde{S} = \Pi_n^1-\tilde{S} \quad \text{但し, } \Pi_0^1 \equiv \Pi_2^0 \text{ (} \equiv \text{ ではない) であり}$$

$$\tilde{S} \in \{S, S_0, SR, SR_0\}.$$

- 2) $\Sigma_{n+1}^1 - DC_0 \vdash \Sigma_{n+1}^1 - AC$
 3) $\Sigma_{n+1}^1 - DCR_0 \vdash \Sigma_{n+1}^1 - ACR$
 4) $\Sigma_{n+1}^1 - DCR_0 \vdash \forall x \exists y H_{\epsilon_n}^n(x, y)$ for each $\epsilon < \omega^\omega$
 5) $\Delta_{n+1}^1 - CR + \Sigma_n^1 - AC \vdash \forall x \exists y H_{\epsilon_n}^n(x, y)$ for each $\epsilon < \omega^\omega$
 6) $\Delta_{n+1}^1 - CA + \Sigma_n^1 - AC \vdash \forall x \exists y H_{\epsilon_n}^n(x, y)$ for each $\epsilon < \epsilon_0$.

従って、

- 7) $\Pi_n^1 - CA_0 \subseteq \Delta_{n+1}^1 - CR_0 \overset{C, \Delta_{n+1}^1 - CA_0}{\cap} \Sigma_{n+1}^1 - AC_0 \overset{\cap \Sigma_{n+1}^1 - ACR_0}{\cap} \Sigma_{n+1}^1 - AC_0$
 8) $\Pi_n^1 - CA_0^{<\omega^\omega} \subseteq \Sigma_{n+1}^1 - DCR_0 \subseteq \Sigma_{n+1}^1 - DC_0 \subseteq \Sigma_{n+1}^1 - GDC_0$
 9) $\Pi_n^1 - CA_0^{<\omega^\omega} \subseteq \Delta_{n+1}^1 - CR + \Sigma_n^1 - AC \subseteq \Sigma_{n+1}^1 - ACR + \Sigma_n^1 - AC$
 $\subseteq \Sigma_{n+1}^1 - DCR \subseteq \Sigma_{n+1}^1 - GDCR$
 10) $\Pi_n^1 - CA_0^{<\epsilon_0} \subseteq \Delta_{n+1}^1 - CA + \Sigma_n^1 - AC \subseteq \Sigma_{n+1}^1 - AC \subseteq \Sigma_{n+1}^1 - DC$
 $\subseteq \Sigma_{n+1}^1 - GDC.$

但し (5), (6), (9), (10) では、 $n=0$ のときは $\Sigma_0^1 - AC$ は保たれる。また、 $n=1$ のときは $\Delta_2^1 - CR \vdash \Sigma_1^1 - AC$ より保たれる。かつ、 $n > 1$ のときは、 $\Delta_{n+1}^1 - CR$ も $\Delta_{n+1}^1 - CA$ も $\Sigma_{n+1}^1 - ACR \vdash \Sigma_n^1 - AC$ 及び、 $\Pi_n^1 - CA_0^{<\omega^\omega} \subseteq \Delta_{n+1}^1 - CR$ 等は不明。

Proof. 1) $n \neq 0$ は明らか。各 $A \in \Pi_\infty^0$ についてある $B \in \Pi_2^0$ があって

$$ACA_0 = \Pi_1^0 - CA_0 \vdash A \leftrightarrow \exists x B \quad (\text{Skolem 法})$$

よって $\Pi_2^0 - SR_0 \vdash \Pi_1^0 - CA$ である。明らかに、

$$\Pi_2^0 - ACR_0 \vdash \Pi_1^0 - CA \quad (\odot) \vdash \forall n \exists x (n \in x \leftrightarrow A(n))$$

すなわち、 $A \in \Pi_2^0$ について、 $\Pi_2^0 - DCR_0 \vdash \forall n \exists x A(n, x)$ である。

$B \in \Pi_2^0$ である。

$B(X, Y) \Leftrightarrow (X)_0 \neq \emptyset \rightarrow \forall n (n \text{ is the least element of } (X)_0 \rightarrow$
 $\rightarrow A(n, (Y)_1) \& n+1 \text{ is the least element}$
 $\text{ of } (Y)_0)$

とおく。仮定より $\Pi_2^0\text{-DCR}_0 \vdash \forall X \exists Y B(X, Y)$ より $\exists Y$ st.

$(Y)_0 = \{x(0, 0)\}$ and $\forall m [(Y)_{m,0} \neq \emptyset \rightarrow \forall n (n \text{ is the least element of}$
 $(Y)_{m,0} \rightarrow A(n, (Y)_{m+1,1}) \& n+1 \text{ is the least element of } (Y)_{m+1,0}]$

但し $(Y)_{m,i} = ((Y)_n)_i$ ind. on m で $\forall m$ m is the least
 element of $(Y)_{m,0}$ より $\forall m A(m, (Y)_{m+1,1})$. Put

$Z \equiv \{n(m, n) : n \in (Y)_{m+1,1}\}$ Then $\forall m A(m, (Z)_m)$. かつ

$\Pi_2^0\text{-DCR}_0 \vdash \forall n \exists x A(n, x) \Rightarrow \Pi_2^0\text{-DCR}_0 \vdash \exists Z \forall n A(n, (Z)_n)$, i.e.,

$\Pi_2^0\text{-DCR}_0 \vdash \Pi_2^0\text{-ACR}$, ところが $\Pi_2^0\text{-DCR}_0 \vdash \Pi_1^0\text{-CA}$.

2) 1) より $i \leq n$ についての ind. で $\Sigma_{n+1}^1\text{-DC}_0 \vdash \Pi_i^1\text{-AC}$ を
 言えばよい。 $i=0$ は 1) と同じ。 $i>0$ のとき、 i.e., $A \in \Pi_i^1$ のとき、

1) でなく、た B が $B \in \Pi_i^1$ を示すには、IH (= Induction Hyp.)

$\Sigma_{n+1}^1\text{-DC}_0 \vdash \Sigma_{i-1}^1\text{-AC}$ を使えばよい。

3) $A \in \Pi_n^1$ について、1) の B が $B \in \Pi_n^1$ を示すには、2) より、

$\Sigma_{n+1}^1\text{-DCR}_0 \vdash \Sigma_n^1\text{-DC}$ で十分。 $A \in \Sigma_n^1$ な S

$B(X, Y) \Leftrightarrow \forall x \exists y A(x, Y) \rightarrow A(x, Y) \in \Sigma_{n+1}^1$

より OK.

4) k に関する meta-induction $\tau: \forall X \exists Y \text{Hier}_{\omega^k}^n(X, Y) \in \bar{\tau}$.

($k=0$) $\Pi_2^0\text{-ACR}_0 \vdash \Pi_1^0\text{-CA}$ と同様に $(\tau, \Sigma_{n+1}^1\text{-ACR}_0 \vdash \Pi_n^1\text{-CA})$.

3) $\Sigma_{n+1}^1\text{-DCR}_0 \vdash \Pi_n^1\text{-CA}$.

(Induction Step) $\Sigma_{n+1}^1\text{-DCR}_0 \vdash \forall X \exists Y \text{Hier}_{\omega^k}^n(X, Y) \in \bar{\tau}$.

$\forall X \exists Y \text{Hier}_{\omega^k}^n((X)_{\omega^k}, Y) \in \bar{\tau}$. 2) $\Sigma_{n+1}^1\text{-DCR}_0 \vdash \Sigma_n^1\text{-DC}$, 3)

$\Sigma_{n+1}^1\text{-DCR}_0 \vdash \Sigma_n^1\text{-AC}$. $\tau, \text{Hier}_\alpha^n(X, Y) \in \Delta_{n+1}^1$ in

$\Sigma_{n+1}^1\text{-DCR}_0$. $\Sigma_{n+1}^1\text{-DCR}$ $\nVdash$. $\S \bar{\tau}$ した X に関する $Y \in$.

$\text{Hier}_{\omega^k}^n(X, (Y)_0)$ & $\forall m \text{Hier}_{\omega^k}^n((Y)_{m, \omega^k}, (Y)_{m+1}) \in \tau, Z \in$.

$$\begin{cases} (Z)_{\omega^k \cdot m + r} = (Y)_{m, r} & m < \omega \text{ \& } r < \omega^k \\ (Z)_{\omega^{k+1}} = \Sigma_{\alpha < \omega^{k+1}} (Z)_\alpha = \{(\omega^k \cdot m + r, x) : x \in (Y)_{m, r}\} \end{cases}$$

$\in \bar{\tau} < \tau$. and on $m \tau: \forall m < \omega \text{Hier}_{\omega^k}^n(m+1)(Y, Z) \in \bar{\tau}$

$\text{Hier}_{\omega^{k+1}}^n(X, Z)$ (induction (2) τ のは $\text{Hier}_\alpha^n(X, Y) \in \Delta_{n+1}^1$

in $\Sigma_{n+1}^1\text{-DCR}_0$ τ . 3), 4) $\Sigma_{n+1}^1\text{-DCR}_0 \vdash \Delta_{n+1}^1\text{-CR}$ (2.5)).

5), 6) $\Sigma_{n+1}^1\text{-AC!}, \Sigma_{n+1}^1\text{-ACR!} \in$. $A \in \Sigma_{n+1}^1$ に関する.

$\Sigma_{n+1}^1\text{-AC!} : \forall n \exists! X A(n, X) \rightarrow \exists Y \forall n A(n, (Y)_n)$,

$\Sigma_{n+1}^1\text{-ACR!}$ $\in$ した $\bar{\tau}$ した rule $\in \bar{\tau}$.

(*) $\Delta_{n+1}^1\text{-CA} + \Sigma_n^1\text{-AC} \vdash \Sigma_{n+1}^1\text{-AC!}$

$\Delta_{n+1}^1\text{-CR} + \Sigma_n^1\text{-AC} \vdash \Sigma_{n+1}^1\text{-ACR!}$

$\therefore A \in \Sigma_{n+1}^1$ に関する $B \in \Sigma_{n+1}^1 \in$.

$B(n, m, k) \Leftrightarrow \exists X [A(n, X) \& ((m \in X \& k=0) \vee (m \notin X \& k=1))]$

$$\forall n \exists! x A(n, x) \rightarrow \forall n \forall m \exists! k B(n, m, k) ,$$

$$\forall n \forall m \exists! k B(n, m, k) \rightarrow \forall n \forall m \forall k [B(n, m, k) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \forall u (B(n, m, u) \rightarrow k = u)] .$$

$$\text{と } \text{な} \text{る} \text{か} \text{ら} . \Delta_{n+1}^1 - CA + \Sigma_n^1 - AC \text{ より } \exists Y \quad s.t.$$

$$\forall n, m, k ((n, m, k) \in Y \leftrightarrow B(n, m, k))$$

$$Z \equiv \{ (n, m) : (n, m, 0) \in Y \} \text{ と } \text{な} \text{る} \text{か} \text{ら} . \forall n \exists! x A(n, x) \text{ より } \forall n A(n, (Z)_n).$$

$$\text{いま } H(\alpha) \text{ を}$$

$$H(\alpha) \equiv \forall x \exists! y H \lim_{\beta}^n (x, y) \text{ と } \alpha < \varepsilon_0.$$

$$\Delta_{n+1}^1 - CA + \Sigma_n^1 - AC \vdash \forall \beta < \alpha H(\beta) \rightarrow H(\alpha)$$

$$\Delta_{n+1}^1 - CR + \Sigma_n^1 - AC \vdash \forall \beta < \alpha H(\beta) \Rightarrow \Delta_{n+1}^1 - CR + \Sigma_n^1 - AC \vdash H(\alpha)$$

$$\therefore \text{Lim}(\alpha) \text{ のとき, } \text{さ} \text{ら} \text{し} \text{た} \text{ } X \text{ に } \text{対} \text{し} \text{て, 仮定より}$$

$$\forall \beta < \alpha \exists! y H \lim_{\beta}^n (x, y) . \quad \Sigma_n^1 - AC \text{ より } H \lim_{\beta}^n (x, y) \in \Sigma_{n+1}^1 .$$

$$\Sigma_{n+1}^1 - AC \text{ より } \exists Y \forall \beta < \alpha H \lim_{\beta}^n (x, (Y)_{\beta}) .$$

$$Z \equiv \bigcup_{\beta < \alpha} (Y)_{\beta} = \{ x : \exists \beta < \alpha (x \in (Y)_{\beta}) \} \text{ と } \text{な} \text{る} \text{か} \text{ら} . \forall \beta < \alpha H \lim_{\beta}^n (x, Z)$$

$$W \equiv Z \cup \{ \alpha \} \times Z \text{ と } \text{し} \text{て } H \lim_{\beta}^n (x, W) \text{ と } \text{な} \text{る} . \text{ uniqueness は明らか} .$$

$$\text{よって, full induction} = \Pi_{\infty}^1 - IA \text{ があれば, 各 } \alpha < \varepsilon_0 \text{ までの}$$

$$\text{超限帰納法系が } \text{な} \text{る} \text{か} \text{ら } \text{この formula について 言明可能} \text{な} \text{ } \omega \text{-公式} \text{ となる} . \quad 6)$$

$$\text{は OK. } \text{よ} \text{う} \text{に, } \Delta_{n+1}^1 - CR + \Sigma_n^1 - AC \vdash H(\alpha) \text{ for each } \alpha < \omega^{\omega} \text{ なら}$$

$$\Delta_{n+1}^1 - CR + \Sigma_n^1 - AC \vdash H(\omega^k) \quad \text{と } k \text{ についての meta-induction .}$$

$$\vdash H(\omega^k) \text{ と } \text{な} \text{る} \text{か} \text{ら, } \Pi_{\infty}^1 - IA \text{ より } \vdash \forall n H(\omega^k, (n+1)) \text{ となり}$$

$$\forall \beta < \omega^{k+1} H(\beta) . \quad \Sigma_{n+1}^1 - AC \text{ より OK, } H(\omega^{k+1}) . \quad \text{よ} \text{う} \text{に}$$

以下の証明論的議論をするのに都合のよい logic calculus を定義する。

Def. 1. L_2 (でなくともよいが) の formula は、以下すべて negation normal form に書かれていなくてはならない。すなわち、formula は、atomic formulae とその否定 $s=t, s \neq t, s < t, s \neq t, t \in X, t \notin X, \text{etc.}$ から logical operator $\wedge, \vee, \neg, \exists$ をはじめて得られるものに限る。formula A について、 $\neg A$ は (A : atomic 以外に) 記号列 A の左に記号 $\neg$ を書いた記号列を表わすのではなく、de Morgan の法則 $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ 等と二重否定の除去 $\neg\neg A = A$ によつてつくられる formula (in negation normal form!) を表わす。 $A \rightarrow B$ は $\neg A \vee B$ のこと等。

2. formulae の有限集合を sequent とよび、 $\Gamma, \Delta, \Lambda, \dots$ で表わす。 $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ のとき、 Γ の意味は $A_1 \vee \dots \vee A_n$ のこと。 $n=0$ のときは偽、矛盾を表わす。

3. sequents Γ, Δ と formula A について、

$$\Gamma, \Delta \equiv \Gamma \cup \Delta \quad (\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}, \Delta = \{A_{n+1}, \dots, A_m\} \text{ なら } \Gamma, \Delta = \{A_1, \dots, A_m\})$$

$$\Gamma, A \equiv \Gamma \cup \{A\}.$$

以下、基本となる純粹に論理的な logic calculus L_2K を定義する。 L_2K の公理(始式ともいう)と推論(図)は以下の通り:

$(Ax) \quad \neg A, A, \Gamma \quad A: atomic \quad (\Gamma \text{ は 任意の sequent, 以下同様})$

$$(A) \quad \frac{\Gamma, A_0 \quad \Gamma, A_1}{\Gamma, A_0 \wedge A_1}$$

$$(V) \quad \frac{\Gamma, A_i}{\Gamma, A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$(V^1) \quad \frac{\Gamma, A(x)}{\Gamma, \forall x A(x)}$$

$$(\exists^1) \quad \frac{\Gamma, A(t)}{\Gamma, \exists x A(x)}$$

但し, variable x は下式 $\Gamma, \forall x A(x)$

に free に は occur しない。

$$(bV) \quad \frac{\Gamma, x < t, A(x)}{\Gamma, \forall x < t A(x)}$$

$$(b\exists) \quad \frac{\Gamma, t_1 < t \quad \Gamma, A(t_1)}{\Gamma, \exists x < t A(x)}$$

但し, variable x は下式 $\Gamma, \forall x < t A(x)$

に free に は occur しない。

$$(V^2) \quad \frac{\Gamma, A(x)}{\Gamma, \forall x A(x)}$$

$$(\exists^2) \quad \frac{\Gamma, A(x)}{\Gamma, \exists x A(x)}$$

但し, variable x は下式 $\Gamma, \forall x A(x)$

に free に は occur しない。

$$(cut) \quad \frac{\Gamma, \neg A \quad A, \Delta}{\Gamma, \Delta}$$

== には, formula A (又は $\neg A$) $\in$ 上の (cut) の cut formula と
よぶ。

次に, 余計な rules (公理 or 推論) の λ , た場合を考へ子。

Def. 1. rule とは、次の 4 条件 をみたす triple $\{\langle \Gamma_i \rangle_{i \leq n}; \bar{a} = \bar{b}\}$

の $=$ と: i) $\langle \Gamma_i \rangle_{i \leq n}$ は sequents の有限列 ($n \geq 0$)

ii) $\bar{a}, \bar{b}$ は (free) variables $a_0, \dots, a_{m-1}$ と $b_0, \dots, b_{k-1}$ の列で、

$\#\{a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{k-1}\} = m+k$ (つまり $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, a_i \neq b_j$) ($m, k \geq 0$)

iii) $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$ に occur する free variables は $\bar{a} \cup \bar{b}$ に PR する ($\bar{a} \cup \bar{b}$ が全部、実際に occur していなくてもよい)

iv) a_i ($i < m$) は Γ_n に occur しない。

◎ 但し、 $\bar{a}, \bar{b}$ は いずれの sort の variables でもよい。つまり、例えば、

$\bar{a} = a_0, \dots, a_{m-1}$ は、 $a_0 = x_0, \dots, a_i = x_i, a_{i+1} = X_{i+1}, \dots, a_{m-1} = X_{m-1}$

で、 $x_0, \dots, x_i$ は first order variables, $X_{i+1}, \dots, X_{m-1}$ は second order variables, $-1 \leq i \leq m-1$, etc.

2. rules の集合 $\mathcal{R}$ が adequate とは、 $\mathcal{R}$ に属している rule $\{\langle \Gamma_i \rangle_{i \leq n}; \bar{a} = \bar{b}\}$ の $\bar{a}$ を、上の ii), iv) をみたす範囲で他の variables $\bar{a}' = a'_0, \dots,$

a'_{m-1} (勿論, sort がえら, ていないといけない) に書きかえた rule

$\{\langle \Gamma'_i \rangle_{i \leq n}; \bar{a}' = \bar{b}\}$ がまた $\mathcal{R}$ に属する。ii) は $a'_i \neq a'_j, a'_i \neq b_j$.

iv) は a'_i は Γ_n に occur しない, Γ'_i は Γ_i の中の variables $\bar{a}$ を同時に $\bar{a}'$ でかきかえて得られる sequent。

3. rule $\{\langle \Gamma_i \rangle_{i \leq n}; \bar{a} = \bar{b}\}$ の instance とは、次の形の図形:

$$\frac{\Gamma_0(\bar{a} = \bar{e}), \Lambda \quad \dots \quad \Gamma_{n-1}(\bar{a} = \bar{e}), \Lambda}{\Gamma_n(\bar{a} = \bar{e}), \Lambda} \quad (\Gamma_n(\bar{a} = \bar{e}) = \Gamma_n(\bar{e}))$$

$= = =$

- i) Δ は, variables $\bar{a}$ が occur しない 勝ちな sequent.
- ii) $\bar{E}$ は, terms の有限列 $t_0, \dots, t_{k-1}$ で, $\bar{a}$ の中の variables は $\bar{E}$ に occur しないようなもの。 ($\bar{b} = b_0, \dots, b_{k-1}$)
- ③. 勿論, term t_i の sort は, variable b_i の sort とそろっていないといけない。つまり, b_i が first order の variable なら t_i はふつうの意味での, L_2 での term, b_i が second order なら t_i は, second order の variable, i.e., second order の term は variable のみ。
- $\Gamma_i(\bar{a} = \bar{E})$ は, Γ_i の中の variables $\bar{b}$ に terms $\bar{E}$ を同時に代入して得られる sequent を表わす。
 - $\Gamma_n(\bar{E})$ の元となる formula Σ は, Σ の instance の principal formula とよぶ。
4. adequate set R of rules について, L_2K_R とは, R の中の rules の instances を含んでもよいように証明図の概念を拡張した体系。 L_2K_R の証明図を R -proof とぶ。つまり, R -proof とは, (Ax) から出発して, L_2K の推論と, R の rules を適用して得られる, 有限の本の形をした図形のこ。もし R -proof の一番下に ある sequent Σ を, その R -proof の endsequent (終式) とよぶ。

Rem. 1. rule $\{ \Gamma_i \}_{i \leq n} : \bar{a} : \bar{b} \}$ は,

$$\forall \bar{v} [\forall \bar{u} \Gamma_0(\bar{u} = \bar{v}) \wedge \dots \wedge \forall \bar{u} \Gamma_{n-1}(\bar{u} = \bar{v}) \rightarrow \Gamma_n(\bar{v})]$$

という公理を入れる = と同等である。(話は逆。上の形の公理を rule に書きかえる。)

2. $n=0$ のときの rule $\{\{\Gamma_i\}_{i \in n} : \bar{a} : \bar{b}\}$ は, *extra initial sequent* $\Gamma_0(\bar{c}), \Delta \in \lambda$ である。

Def. R -proof P が quasi normal とは, P の中の cut formula がすべて, ある $rule \in R$ のある instance の principal formula (と formula χ として同じ) $C = \text{formula の occurrences in } P \in \mathbb{N}^R(\chi)$ になっているか, atomic formula になっている = と。

Theorem (partial cut elimination thm for L_2K_R) 0.2

与えられた R -proof P について, endsequent が P と同じで quasi normal な R -proof P^{ct} が存在する。

証明はふつうにでき, e.g., H. Schwichtenberg の Handbook article [10] を見よ。勿論, R が primitive rec. な PR なら, $P \mapsto P^{ct}$ は primitive rec. に (しかも $PRA = \text{Primitive Recursive Arithmetic}$ で demonstrably に) とれる。

NB. quasi normal の定義で, cut formula χ は atomic なものを許したのは, $(\forall), (\exists)$ の $s < t$ を cut formula とする (cut) がある

るから5。

Corollary 0.3 sequent Γ が L_2K_R で証明できるから5、 Γ に至る L_2K_R の R -proof P で、 P の中の任意の formula が $\Gamma \cup UR \cup \text{Atm}$ の中の どの formula の subformula になっているかわかる。

但し、1. $UR \equiv \bigcup \{ \Gamma_i (\bar{a} : \bar{b}) : \{ \Gamma_i \}_{i \leq n} : \bar{a} : \bar{b} \} \in R, i \leq n, \bar{a} \text{ は terms のリスト}$

2. $\text{Atm} \equiv$ the set of atomic and negated atomic formulae
(実際には、 $s < t, s \neq t$ の形のみで十分)

3. formula の subformula は Gentzen 風のもので、e.g., $\forall u A(u)$ の subformula として、 $A(t)$ (t は u と同じ sort の項を term) を許す。

つまり、 P の中の formula は、 Γ の中の formula の subformula か、
どの $\text{rule} \in R$ (の instance) に occur している formula の subformula か、
 $s < t, s \neq t$ の形に PR 子 として。

Rem. rule $\{ \Gamma_i \}_{i \leq n} : \bar{a} : \bar{b} \}$, $\Gamma_n = \{ A_0, \dots, A_{l-1} \}$ のかわりに、rule
 $\{ \Gamma'_i \}_{i \leq n+l} : \bar{a} : \bar{b} \}$, $\Gamma'_i = \begin{cases} \Gamma_i & , i < n \\ A_j & , i = n+j, j < l \\ \phi & , i = n+l \end{cases}$

を λ しても等価である。よって、全ての $\text{rule} \in R$ がこのようになる。

もの, i.e., $\{\{\Gamma_i\}_{i \leq n} : \bar{a} = \bar{b}\} \in \mathcal{R} \Rightarrow \Gamma_n = \emptyset$ とすれば, Theorem は, cut formula χ いて, $S < t$ の形のみ残る proof がとれよくなる。
(Corollary は 3.1.2 も同じ)

§2. AC, DC の iterated CA に対する conservation results.

== では, 次の定理の A. Cantini [3] による証明を紹介す

3: formulae の集合 C_n, D_n を

$$C_n \triangleq \begin{cases} \Pi_2^1 \text{ (formulae)} & , n=0 \\ \Pi_3^1 & , n=1 \\ \Pi_4^1 & , n \geq 2 \end{cases} \quad D_n \triangleq \begin{cases} \Sigma_1^{1-} \text{ (formulae w/o set parameters)} & , n=0 \\ \Sigma_2^{1-} & , n=1 \\ \Sigma_3^{1-} & , n \geq 2 \end{cases}$$

χ いて.

Theorem 1.1.

1. $\Sigma_{n+1}^1\text{-AC}_0$ is $C_n[D_n]$ conservative over $\Pi_n^1\text{-CA}_0$
[$\Pi_n^{1-}\text{-CA}_0$].
2. $\Sigma_{n+1}^1\text{-GDC}_0$ is $C_n[D_n]$ conservative over $\Pi_n^1\text{-CA}_0^{<\omega^\omega}$
[$\Pi_n^{1-}\text{-CA}_0^{<\omega^\omega}$].
3. $\Sigma_{n+1}^1\text{-GDCR}$ is $C_n[D_n]$ conservative over $\Pi_n^1\text{-CA}_0^{<\omega^\omega}$
[$\Pi_n^{1-}\text{-CA}_0^{<\omega^\omega}$].
4. $\Sigma_{n+1}^1\text{-GDC}$ is $C_n[D_n]$ conservative over $\Pi_n^1\text{-CA}_0^{<\epsilon_0}$
[$\Pi_n^{1-}\text{-CA}_0^{<\epsilon_0}$].

== に、例えば 1. は、 $A \in C_n \sqsubset A \in D_n$ について、

$$\Sigma_{n+1}^1 - AC_0 \vdash A \Rightarrow \Pi_n^1 - CA_0 \vdash A \sqsubset \Pi_n^1 - CA_0 \vdash A$$

という = と, cf. Lemma 0.1

以下、= の定理の証明をするが、 n がいくつでも証明は同じなので、 $n=0$ の場合の証明を述べ、 $n>0$ の場合に必要を変更については最後で述べる = とにする。また、absolute hierarchy に対するほうも、ほぼ同様なので、relativized のほうだけ扱う。

$\Pi_1^0 - CA_0^{<\omega}$ ($\omega = \omega, \omega^\omega, \varepsilon_0$) の中で次の定義をする。 $\beta < \omega$ について H_β^X を X の β -th jump, $\uparrow$ とし、 $Hier_\beta^0(X, Y)$ なる Y の (Y/β) の = と $\sqsubset$ (β は formal な variable) $Rc(H_\beta^X) \sqsubset Rc'(H_\beta^X)$ と。

$$Rc(H_\beta^X) \equiv \{Y \leq \omega : Y \text{ is rec. in } H_\beta^X\}$$

$$Rc'(H_\beta^X) \equiv \{e \in \omega : \forall x (\downarrow_{H_\beta^X}(x) \downarrow)\} = \text{the set of codes of sets in } Rc(H_\beta^X)$$

とある。formula $F(Y)$ について、 $\forall Y \in Rc(H_\beta^X) F(Y)$ と。

$$\forall Y \in Rc(H_\beta^X) F(Y) \Leftrightarrow \forall e \in Rc'(H_\beta^X) F(e), \quad \text{但し、} F(e) \text{ は}$$

$F(Y)$ の中の $\forall$ と $\exists$ 、 $t \in Y$ の形 of (semi) formula と、 $\{e\}^{H_\beta^X}(t) \neq 0$

に e , $\exists x [\downarrow_{H_\beta^X}(e, t, x) \ \& \ U(x) = 0]$ (U : result extracting

function) で置きかえて得られる formula の = と。 $\exists Y \in Rc(H_\beta^X) F(Y)$

も同様に定義される。

1. 初めに、 $\Sigma_1^1 - AC_0$ について、

$ess - \Sigma_n^1, ess - \Pi_n^1$ formulae を定義する。

- Def. 1. $ess - \Pi_0^1 = ess - \Sigma_0^1 = \Pi_0^0$, the set of arithmetical formulae
2. $ess - \Pi_n^1 \subseteq ess - \Sigma_{n+1}^1$; $ess - \Sigma_n^1 \subseteq ess - \Pi_{n+1}^1$
3. $ess - \Sigma_n^1, ess - \Pi_n^1$ は $\forall, \exists$ に, $\wedge, \vee, \forall n, \exists n, \forall n < t, \exists n < t$ (1st order quantifiers) について閉じている。
4. $A \in ess - \Sigma_n^1 \subseteq ess - \Pi_n^1 \Rightarrow \exists X A \in ess - \Sigma_n^1 \subseteq \forall X A \in ess - \Pi_n^1$.
($n \neq 0$)

ここで $\Sigma_1^1 - AC_0$ は, L_2K に次の extra な公理 (= premisses などの rule)

と rule を加えて得られる L_2K_R のこととする。公理は次の3種類:

1. Γ, A , A は $=$, prim. rec. function に閉じた公理を quantifier-free に書いたもの, e.g., $s+1 \neq 0$ や, $t \neq s, t \notin X, s \in X$
(s, t : 任意の terms) 等。

Rem. $=$ の証明では, 上の公理を quantifier-free にしてかかなくてもよい。例えば, $\forall x (x+1 \neq 0)$ でも可。§3 では $=$ としておいたほうがよい, i.e., Σ_1^0 formulae だけからなる proof を扱いたいとき。

2. Induction Axiom は

$$\Gamma, 0 \notin X, \exists n (n \in X \wedge n+1 \notin X), \forall m (m \in X)$$

3. $\Sigma_0^0 - CA$ は

$$\Gamma, \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow A(n)) \quad A \text{ は } \Sigma_0^0 \text{ formula.}$$

rule は次の1種類:

$$\Pi_2^0 - AC \quad \frac{\Gamma, \forall x \exists X A(x, X)}{\Gamma, \exists Y \forall x A(x, (Y/x))} \quad A: \Pi_2^0 \text{ formula}$$

Theorem 0.2, Corollary 0.3 より分かる: Γ が $\text{ess-}\Sigma_1^1 \cup \text{ess-}\Pi_1^1$ formulae だけからなる sequent で $\Sigma_1^1\text{-AC}_0$ で証明できるとき、
 このとき、 Γ に至る $\Sigma_1^1\text{-AC}_0$ の quasi-normal proof P があ
 ったとき、 P の中の cut formulae はすべて Σ_1^1 (Π_1^1 を含む) であり、かつ、 P
 の中の formulae はすべて $\text{ess-}\Sigma_1^1$ か $\text{ess-}\Pi_1^1$ である。

Def. $A \in \text{ess-}\Sigma_1^1 \cup \text{ess-}\Pi_1^1$ と A に occur しない set parameter
 U について、formula $A_{n,m}^U$ ($n, m < \omega$) は、 A の中の $\forall Y$
 を $\forall Y \in R_c^U(H_n^U)$ で、 $\exists Y$ を $\exists Y \in R_c(H_m^U)$ で置きか
 えて得られる formula を表わす。 $A_{n,m}^U$ (== の n, m は numerals で
 formal な variables でない [とよい]) には、free variable U
 が与えられている (正確には $H_{n+m}^0(U, Y)$ なる Y も occur して、
 $H_{n+m}^0(U, Y) \rightarrow A_{n,m}^U$ である)。 sequent $\Gamma = \{A, B, \dots\} \subseteq$
 $\text{ess-}\Sigma_1^1 \cup \text{ess-}\Pi_1^1$ については、

$$\Gamma_{n,m}^U \equiv \{A_{n,m}^U, B_{n,m}^U, \dots\}$$

明らかには、次の (persistency) が成立する:

$$(\text{persistency}) \quad n \leq n' \leq m' \leq m \Rightarrow \Pi_1^1\text{-CA}_0 \vdash A_{n',m'}^U \rightarrow A_{n,m}^U$$

Def. Proofs の長さ。

$P \in \text{proof}$, Γ を P の endsequent, $k < \omega$ について $P \Vdash^k \Gamma$ である。

1. P が公理 = 始式 だけからなるとき: $P \Vdash^k \Gamma$ holds for
 all $k < \omega$

2. $P_0 \Vdash^{k'} \Gamma_0$, $P_1 \Vdash^{k'} \Gamma_1$, $k' < k$ とき、 P の最後が

$$P = \frac{\frac{\Gamma_0}{\vdash} \quad \frac{\Gamma_1}{\vdash}}{\vdash} \quad (P \text{ の immediate subproofs なら } P_0, P_1)$$

つまり, $P \mid^k \Gamma$ は Γ の P の $\text{depth} \leq k$ の部分である。

Theorem. 1.2 $P \in \Sigma_1^1\text{-AC}_0$ の quasi normal proof, $P \vdash^k \Gamma$,
 $\Gamma \subseteq \text{ess-}\Sigma_1^1 \cup \text{ess-}\Pi_1^1$ とする。 $V \in P$ に occur しない set parameter,
 $X \in \Gamma$ に occur する set parameters すべてを含む列 $X_0, \dots, X_g \in L$.
 $X \notin \text{Rc}(H_n^V) \in \text{formulae の集合 } \{X_0 \notin \text{Rc}(H_n^V), \dots, X_g \in \text{Rc}(H_n^V)\} \text{ の } =$
 ∞ とする。 $g_k(n) \equiv n + 2^k$ とすると、任意の $n < \omega$ について、

$$\pi_1^0 - CA_0 \vdash X \notin R_c(H_n^v), \Gamma_{n, g_k(n)}^v$$

Thm. 1.1.1 の証明. $\Sigma_1^0 - AC_0 \vdash \forall X \exists Y A(X, Y)$, $A \in \Pi_0^0$ とする.

Thm 1.2 より, $n=0$ とおいて, $\Pi_1^0 - CA_0 \vdash X \notin R_c(H_0^V), \exists Y \in R_c(H_m^V) A$
for some $m < \omega$. U として X ($\in A$: occur as set parameters of
rec. join) とすると, $\Pi_1^0 - CA_0 \vdash \forall X \exists Y \in R_c(H_m^X) A$, $\forall Y \in R_c(H_m^X)$
は $\Pi_1^0 - CA_0$ と set として存在するから $\Pi_1^0 - CA_0 \vdash \forall X \exists Y A$. $\times$

Thm. 1.2 の証明。P の構成 に関する induction。

1) $P \vdash \frac{\Gamma, \forall x \exists y A(x, y)}{\Gamma, \exists z \forall x A(x, (Z)_x)} \quad A \in \Pi_2^0 \quad z \text{ 系 } \omega, z'' \text{ 系 } \omega$

II 上 $\exists k_0 > k$ なる $\pi_1^0 - CA_c$ なる

$$X \notin R_c(H_n^v), \Gamma_{n, m_c}^v, \forall x \exists y \in R_c(H_{m_c}^v) A(x, y)$$

$$m_c = n + 2^{k_c}$$

Case 1. Γ_{n,m_0}^v のとき: $m_0 < m = n + 2^k$ と (persistence) は OK.

Case 2. Γ_{n,m_0}^v でないとき: $\forall x \exists Y \in R_c(H_{m_0}^v) A(x, Y)$ は書き直す.

$\forall x \exists y \in R_c'(H_{m_0}^v) A(x, y)$ で、 $y \in R_c'(H_{m_0}^v)$ は Π_2^0 in $H_{m_0}^v$.

$A(x, y)$ は $t \in Y \wedge \exists v \in T^{H_{m_0}^v}(y, t, v) \wedge V(v) = 0$ には、 $t \notin Y \wedge$

$\exists v \in T^{H_{m_0}^v}(y, t, v) \wedge V(v) \neq 0$ に書きかえ子 = 2 には、 $B(x, y) \Leftrightarrow$

$y \in R_c'(H_{m_0}^v) \wedge A(x, y)$ は Π_2^0 in $H_{m_0}^v$ と見てよい。Z は

$u \in (Z)_x \Leftrightarrow \exists y (y = \mu y B(x, y) \wedge \{y\}^{H_{m_0}^v}(u) \simeq 0)$

$\Leftrightarrow \forall y (y = \mu y B(x, y) \rightarrow \{y\}^{H_{m_0}^v}(u) \simeq 0)$

より、Z は Δ_3^0 in $H_{m_0}^v$ 。仮定より、 $m_0 + 2 \leq m$ だから (persistence)

より $\exists Z \in R_c(H_m^v) \forall x A(x, (Z)_x)$ 。

2) P が cut で終わる時。P の最後は

$$\frac{\Gamma, A \quad \neg A, \Lambda}{\Gamma, \Lambda} \quad A \in \Sigma_1^1 \quad \text{とあると IH より } \exists k_0 < k \text{ なる } n \text{ あり。}$$

$\forall n \in \omega$ にもなる。

$$X \notin R_c(H_n^v), \Gamma_{n,m_0}^v, A_{n,m_0}^v \quad \dots (1) \quad m_0 = n + 2^{k_0}$$

$$X \notin R_c(H_n^v), \Lambda_{n,m_0}^v, (\neg A)_{n,m_0}^v \quad \dots (2)$$

(2) で n は任意だが、たか $n < m_0$ とし、

$$X \notin R_c(H_{m_0}^v), \Lambda_{m_0,\ell}^v, (\neg A)_{m_0,\ell}^v \quad \dots (3) \quad \ell = m_0 + 2^{k_0}$$

A は Σ_1^1 だから、 $\neg(A)_{n,m_0}^v$ と $(\neg A)_{m_0,\ell}^v$ は同じ formula、だから (1)

(3) で cut (2)。

$$X \notin R_c(H_n^v), X \notin R_c(H_{m_0}^v), \Gamma_{n,m_0}^v, \Lambda_{m_0,\ell}^v$$

(persistently) あり。

$X \notin R_c(H_n^v), X \in R_c(H_{m_0}^v) ; \Gamma_{n,l}^v, \neg \Gamma_{n,m_0}^v ; \Lambda_{n,l}^v, \neg \Lambda_{m_0,l}^v$
 $(n \leq m_0 \leq l)$ 従って, $X \notin R_c(H_n^v), \Gamma_{n,l}^v, \Lambda_{n,l}^v$.

$l = n + 2^{k_0} + 2^{k_0} \leq n + 2^k$ により再び (persistence) で OK.

-/-

Rem. 上の Thm 1.2 の証明より, $\Pi_1^0 - CA_0$ は $\Sigma_1^1 - ACR$ について閉じている, $\Sigma_1^1 - ACR$ は $\Pi_1^0 - CA_0$ で derived rule,

$\Pi_1^0 - CA_0 \vdash \forall x \exists y A(x, y) \quad w/ A \in \Sigma_1^1 \Rightarrow \Pi_1^0 - CA_0 \vdash \exists z \forall x A(x, (z)_x)$
 となる。

2. $\Sigma_1^1 - GDC_0 \prec \Pi_1^0 - CA_0^{<\omega^\omega}$.

$\Sigma_1^1 - GDC_0$ は, 上の $\Sigma_1^1 - AC_0$ での $\Pi_2^0 - AC$ による $\Pi_2^0 - GDC$ にかきかえて得られる:

$$\Pi_2^0 - GDC \frac{\Gamma, \forall n \exists Y A(n, X, Y)}{\Gamma, \exists Z \forall n A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})} \quad A \in \Pi_2^0$$

== 即ち, X は $\Gamma, \exists Z \forall n A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})$ に occur しない。

$\Sigma_1^1 - GDC_0$ の proofs の長さや $A_{\alpha, \beta}^v$ の定義は前と同様系として (但し, α, β は $<\omega^\omega$ なる formal な variables) .

Theorem 1.3 $P \in \Sigma_1^1 - GDC_0$ の quasi normal proof, $P \vdash^K \Gamma$,
 $\Gamma \subseteq \text{ess-}\Sigma_1^1 \cup \text{ess-}\Pi_1^1$, $U \subseteq P$ に occur しない set parameter とする。
 Q を P の sub-proof, Δ を Q の endsequent とする。各 $k \leq K$ について,
 $g_k: \omega^{k+1} \rightarrow \omega^{k+1}$ を $g_k(\alpha) = \alpha + \omega^k$ で定義する。

X を Δ に occur する γ の set parameters を含む γ とする。

$$Q \vdash^k \Delta \text{ \& } k \leq K \Rightarrow \Pi_1^0 - CA_{\omega}^{<\omega} \vdash \Delta \neq \omega^{K+1}, X \notin Rc(H_{\Delta}^{\vee}), \Delta_{\Delta, \gamma_k}^{\vee}(\omega)$$

Proof. Q の本構成に関する induction. $\Rightarrow$ τ の (persistence) 17.

(persistence) 各 $K < \omega$ について.

$$\Pi_1^0 - CA_{\omega}^{<\omega} \vdash \forall \alpha, \beta, \beta' \leq \omega^{K+1} (\alpha \leq \beta' \leq \beta \& A_{\alpha, \beta'}^{\vee} \rightarrow A_{\alpha, \beta}^{\vee})$$

1) Q が $\Pi_2^0 - GDC$ で定まる τ であるとき: Q の最後 Σ .

$$\frac{\Delta, \forall n \exists Y A(n, X, Y)}{\Delta, \exists Z \forall n A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})} \text{ とする。 [H より } \exists k_0 < k \text{ について}$$

$$\Delta \neq \omega^{K+1}, X \notin Rc(H_{\Delta}^{\vee}), \Delta_{\Delta, \omega^{k_0}}^{\vee}, \forall n \exists Y \in Rc(H_{\Delta + \omega^{k_0}}^{\vee}) A(n, X, Y).$$

(但し X は γ の parameter は ω^{k_0}) $\Delta \neq \omega^{K+1} \in fix_0$.

Case 1. $\exists n (\Delta_{\Delta + \omega^{k_0}, \omega^{k_0}(n+1)}^{\vee})$ のとき: (persistence) より

$$\Delta_{\Delta, \omega^{k_0}}^{\vee} \text{ と } \tau \text{ の } O.K.$$

Case 2. $O.W.$: 上より $\forall n \forall x \in Rc(H_{\Delta + \omega^{k_0}, n}^{\vee}) \exists y \in Rc(H_{\Delta + \omega^{k_0}, (n+1)}^{\vee})$ s.t.
 $A(n, x, y)$

空集合 ϕ の code, index $x_0 \in fix_1$ (2. $B(w, n) \in \Sigma$ の formula とおき

' w は $\mathbb{N} \leq n+1$ の γ ' $\& (w)_0 = x_0 \& \forall m < n [(w)_m \in Rc(H_{\Delta + \omega^{k_0}, m}^{\vee})$
 $\& (w)_{m+1} = uy. (y \in Rc(H_{\Delta + \omega^{k_0}, (m+1)}^{\vee}) \& A(m, (w)_m, y))]$

ind. on n で $\forall n \exists! w B(w, n)$ がわかる。 $W \in$.

$$u \in (W)_n \Leftrightarrow \exists w (B(w, n) \& u \in' (w)_n)$$

$$\Leftrightarrow \forall w (B(w, n) \rightarrow u \in' (w)_n)$$

$$u \in' (W)_n \Leftrightarrow \{(w)_n\}^{H_{\Delta + \omega^{k_0}, n}^{\vee}}(u) \supseteq \emptyset.$$

と なる。 $W \in R_c(H_{2+\omega}^{\vee k_0+1}) \subseteq R_c(H_{2+\omega}^{\vee k})$ かつ、

$\forall n A(n, (W)_n, (W)_{n+1})$ と なる。

∴

Rem. 上の証明から容易に次がわかる: いま $\Sigma_1^1\text{-RDC}_0 \in \Sigma_0^0\text{-CA}_0$

に次の公理 $\Sigma_1^1\text{-RDC}$ を加えた理論である。

$$\begin{aligned} \Sigma_1^1\text{-RDC} : \forall n \forall X [F(n, X) \rightarrow \exists Y (F(n+1, Y) \ \& \ A(n, X, Y))] \rightarrow \\ \rightarrow \forall X [F(0, X) \rightarrow \exists Y (\forall n [(Y)_0 = X \ \& \ F(n, (Y)_n) \ \& \ A(n, (Y)_n, \\ (Y)_{n+1})])] \end{aligned}$$

for $F, A \in \Sigma_1^1$.

このとき、 $\Sigma_1^1\text{-RDC}_0$ is Π_2^1 conservative over $\Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\omega}$.

4. $\Sigma_1^1\text{-GDC} \prec \Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\varepsilon_0}$.

$\Sigma_1^1\text{-GDC}^*$ は、2. のように $\Sigma_1^1\text{-GDC}_0$ を書き、 ω -rule を加えて、(bV)

(V) を除いた semi-formal system とする:

$$\omega\text{-rule} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots P_n \\ \dots \Gamma, A(n) \dots \end{array}}{\Gamma, \forall x A(x)} \quad \left. \begin{array}{l} \forall n < \omega \\ \end{array} \right\} P$$

$\Sigma_1^1\text{-GDC}^*$ の proofs の長さは前と同様系に定義する。 $\prec$ に、

上の ω -rule を、

$$P_n \vdash^{\omega} \Gamma, A(n) \ \& \ n < \omega \text{ for } \forall n < \omega \Rightarrow P \vdash^{\omega} \Gamma, \forall x A(x).$$

$\Sigma_1^1\text{-GDC}^*$ の proof が quasi-normal かつ、その中の cut formulae

が Σ_1^1 の $\prec$ に $\prec$ である。 [10] と同様系にして、次がわかる (cf. §6)

1) Γ を sentences の集合 とし.

$\Sigma'_1\text{-GDC} \vdash \Gamma \Rightarrow \exists \Sigma'_1\text{-GDC}^*$ の proof P s.t.

$$P \vdash_{\leq \omega + \omega} \Gamma$$

2) $\forall \Sigma'_1\text{-GDC}^*$ の proof $P \exists \Sigma'_1\text{-GDC}^*$ の quasi normal proof P' s.t.

$$\vdash P \vdash_{\leq \omega + \omega} \Gamma \Rightarrow P' \vdash_{\leq \epsilon_0} \Gamma$$

$$(P \vdash_{\leq \alpha} \Gamma \Leftrightarrow P \vdash_{\beta} \Gamma \text{ for } \exists \beta < \alpha)$$

Thm 1.3 と同様系にいて.

Theorem 1.4. 各 $\alpha_0 < \epsilon_0$ について次が成立. $P \in \Sigma'_1\text{-GDC}^*$ の quasi-normal proof で $P \vdash_{\alpha_0} \Gamma$ とする. $\Gamma \subseteq \text{ess-}\Sigma'_1 \cup \text{ess-}\Pi'_1$.

$\omega \in P$ に occur (ない) set parameter. $Q \in P$ の subproof で

$Q \vdash \Delta$ とする. 各 $\beta \leq \alpha_0$ について $g_\beta: \omega^{\alpha_0+1} \rightarrow \omega^{\alpha_0+1}$ を

$g_\beta(\alpha) = \alpha + \omega^\beta$ とする. $X \in \Delta$ に occur する α についての set

parameters α についてを含む列として.

$$Q \vdash_{\beta} \Delta \text{ \& } \beta \leq \alpha_0 \Rightarrow \Pi_1^0\text{-CA}^{<\omega^{\alpha_0+1}}, * \vdash \alpha + \omega^{\alpha_0+1}, X \notin \text{Re}(H_{\alpha}^{\vee}), \\ \Delta_{\alpha, g_\beta(\alpha)}^{\vee}$$

== 1. $\Pi_1^0\text{-CA}^{<\omega^{\alpha_0+1}}, *$ は $\Pi_1^0\text{-CA}^{<\omega^{\alpha_0+1}}$ に対対応する semi-formal system w/ ω -rule.

== 2. 以上の議論を帰納的に形式化して partial truth definition for Π_1^0 formulae を与える. Π_1^1 sentence A について.

$$\Sigma'_1\text{-GDC} \vdash A \Rightarrow \exists \alpha_0 < \epsilon_0 (\Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\epsilon_0} \vdash A_{\alpha_0, \alpha_0 + \omega^{\alpha_0}, \alpha_0 \text{Re}^{\omega^{\alpha_0+1}}})$$

$\alpha_0 = 0$ とおけばよい.

$$3. \Sigma'_1\text{-GDCR} \prec \Pi'_1\text{-CA}^{\leq \omega}_0$$

$\Sigma'_1\text{-GDCR}$ は、公理 $\chi(2)$ full induction

$$\Gamma, A(0) \ \& \ \forall n (A(n) \rightarrow A(n+1)) \rightarrow \forall n A(n)$$

があり、'rule' $\chi(2) = \kappa$ の $\Sigma'_1\text{-GDCR}$ がある。

$$\Sigma'_1\text{-GDCR} \quad \frac{\forall n \forall x \exists y A(n, x, y)}{\exists z \forall n A(n, (z)_n, (z)_{n+1})} \quad A \in \Pi'_0$$

$\Sigma'_1\text{-GDCR}$ の proof の中で使われている 'rule' $\Sigma'_1\text{-GDCR}$ の回数 k を

数える: P は $\Sigma'_1\text{-GDCR}$ の proof s.t. $P \vdash \Gamma$ である。

1) P は公理 $\chi(2)$ であるとき、 $P \vdash^k \Gamma$ holds for $\forall k < \omega$.

2) P の最後が $\Sigma'_1\text{-GDCR}$ 以外で P の immediate sub-proof(s) $P_0 \sqsubset P_1$ について、 $P_0 \vdash^k \Gamma_0 \sqsubset P_1 \vdash^k \Gamma_1$ である。

$$P \vdash^k \Gamma$$

3) P の最後が $\Sigma'_1\text{-GDCR}$ で、 P の immediate sub-proof P_0 について

$$P_0 \vdash^{k_0} \Gamma_0 \text{ for } \exists k_0 < k \text{ である } P \vdash^k \Gamma$$

各 $k < \omega$, $\alpha < \omega^\omega$ である variable U について、

$$R_{k,\alpha}^U \equiv \bigcup_{\beta < \alpha} R_\beta(H_{\omega^{k,\beta}}^U) \quad \text{である。}$$

set parameter U が occur (しない) formula A について、

(A は ϕ less- Σ'_1 less- Π'_1 である) $A \in R_{k,\alpha}^U$ である。 A 中の $\forall Y$,

$\exists Y$ を一様に $\forall Y \in R_{k,\alpha}^U$, $\exists Y \in R_{k,\alpha}^U$ にかきかえた

formula である。 である。

Theorem 1.5. $P \in \Sigma_1^1\text{-GDCR}$ の proof で $P \vdash \Gamma$ とする。

(P は quasi normal でなくともよい。 $\Gamma \notin \text{ess-}\Sigma_1^1\text{ess-}\Pi_1^1$ である。)

$U \in P$ に occur しない set parameter, $X \in \Gamma$ に occur する

おいての set parameters に対してを含むようにして, $k < \omega$ と

$\delta < \omega^\omega$, δ = limit ordinal について,

$$P \vdash^k \Gamma \Rightarrow \Pi_1^0\text{-CA}_\delta^{<\omega^\omega} \vdash X \notin R_{k,\delta}^U, \quad \Gamma^{R_{k,\delta}^U}$$

Proof. P の $\mathbb{E}$ 法 による induction. P の最後から $\Sigma_1^1\text{-GDCR}$

のとき, $\frac{\forall n \forall X \exists Y A(n, X, Y)}{\exists Z \forall n A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})} \quad k = k_0 + 1$ とする

$$\exists Z \forall n A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1}) \quad \text{IH あり.}$$

$$\forall \text{ limit } \delta < \omega^\omega \quad \Pi_1^0\text{-CA}_\delta^{<\omega^\omega} \vdash \forall n \forall X \in R_{k_0,\delta}^U \exists Y \in R_{k_0,\delta}^U A(n, X, Y).$$

(parameters は $\mathbb{E}_n^2$)

--- (1)

与えられた limit $\delta < \omega^\omega$ について, $X_0 \in R_{k_0,\delta}^U$ とする。

$$X_0 \in R_c(H_{\omega^{k_0}, \beta}^U) \quad \text{for } \exists \beta < \delta. \quad \text{よって } X_0 \in R_c(H_{\omega^{k_0}, \delta_0}^U), k_0 = k+1$$

$$\delta_0 = \omega\beta, \quad \gamma \leq \omega\beta + \omega \quad \text{として, (1) の } \delta \text{ に対して } \mathbb{E}_n^2 \text{ は } (Z)_n$$

$$\text{と } \delta_n \text{ を recursive に, } (Z)_0 = X_0, \quad \delta_0 = \omega\beta,$$

$$(Z)_{n+1} \in R_c(H_{\omega^{k_0}, \delta_{n+1}}^U) \text{ s.t. } A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1}) \text{ と } \delta_{n+1} < \gamma$$

$$\text{と して, } Z \in R_c(H_{\omega^{k_0}, \gamma}^U). \quad \omega^{k_0} \gamma = \omega^k (\beta+1) \text{ と}$$

$$\beta+1 < \delta = \text{limit} \text{ より } Z \in R_{k,\delta}^U \text{ と なる}$$

/.

こゝまでの言証明で parameter U を suppress すれば, 対応する結果が absolute hierarchy についても得られる。

以下、 $n > 0$ の場合について述べる。 $\Pi'_n - CA_0^{<\alpha_0}$ ($\alpha_0 = \omega, \omega^\omega, \varepsilon_0$) の中で、 $\beta < \alpha_0$ について $H_\beta^X(n) \in \text{Hier}_\beta^n(X, Y)$ なる Y の $(Y)_\beta$ のことをし、

$$Rc(H_\beta^X(n)) \equiv \{Y \subseteq \omega : Y \text{ is rec. in } H_\beta^X(n)\}$$

$$Rc'(H_\beta^X(n)) \equiv \text{the set of codes of sets in } Rc(H_\beta^X(n))$$

と定義する。Formula $F(Y)$ について、 $\forall Y \in Rc(H_\beta^X(n)) F(Y), \exists Y \in Rc(H_\beta^X(n)) F(Y)$

は前と同様に定義される。

Def. $A \in \text{ess-}\Sigma'_{n+1} \cup \text{ess-}\Pi'_{n+1}$ と A に occur しない set parameter U に

ついて formula $A_{\alpha, \beta}^U$ ($\alpha, \beta < \alpha_0$) を帰納的に定義する：

$$1. A \in \text{ess-}\Sigma'_n \cup \text{ess-}\Pi'_n \Rightarrow A_{\alpha, \beta}^U \equiv A$$

2. operation $A \mapsto A_{\alpha, \beta}^U$ は second order quantifiers 以外の logical operator

と commute, e.g., $(B \circ C)_{\alpha, \beta}^U \equiv B_{\alpha, \beta}^U \circ C_{\alpha, \beta}^U, \circ \in \{\wedge, \vee\}$.

$$3. (\forall Y B(Y))_{\alpha, \beta}^U \equiv \forall Y \in Rc(H_\alpha^U(n)) B(Y)_{\alpha, \beta}^U \quad \text{if } \forall Y B(Y) \notin \text{ess-}\Sigma'_n \cup \text{ess-}\Pi'_n$$

$$(\exists Y B(Y))_{\alpha, \beta}^U \equiv \exists Y \in Rc(H_\beta^U(n)) B(Y)_{\alpha, \beta}^U \quad \text{if } \exists Y B(Y) \notin \text{ess-}\Sigma'_n \cup \text{ess-}\Pi'_n$$

Rem. $A = \forall Y B(Y) [= \exists Y B(Y)] \in \text{ess-}\Sigma'_{n+1} \cup \text{ess-}\Pi'_{n+1}$ のとき、 $A_{\alpha, \beta}^U$

は β には $[\alpha]$ に $[\beta]$ 依らずに定まる。

sequent Γ について、sequent $\Gamma_{\alpha, \beta}^U$ は前と同様に定義される。

Def. 1. $(V=L)_r$ と Σ_4' -sentence z 、relativized constructibility hypothesis $\exists Z \subseteq \omega \forall X \subseteq \omega \exists W \subseteq \omega$ [" W is a well ordering" & $X \in Rc(H_\alpha^Z)$ for some α in the field of the well ordering W] を表わすもの。

$$2. \text{ theory } T_n \text{ と } T_n \equiv \begin{cases} \Pi'_n - CA_0 & , n = 1, 2 \text{ と } \alpha < \alpha_0 \\ \Pi'_n - CA_0 + (V=L)_r & , n \geq 3 \end{cases}$$

このとき、 Σ_n^1 が成立する。

Lemma. cf. [3]

$$a) T_n \vdash \Sigma_n^1 - AC$$

$$b) T_n \vdash \forall Y \in H_1^X(n) F(Y) \rightarrow \forall Y F(Y) \text{ for } A \in \Sigma_n^1 - \Pi_n^1$$

$$c) (n \geq 3) \quad T_n \text{ is } \Pi_4^1\text{-conservative over } \Pi_n^1 - CA_0.$$

$$1. \Sigma_{n+1}^1 - AC_0 \prec \Pi_n^1 - CA_0.$$

Lemma a), b) を使えば、 $n=0$ のときと同様にして、 Π_{n+2}^1 formula

$\forall X \exists Y A(X, Y)$ w/o set parameters に対して、

$$\Sigma_{n+1}^1 - AC_0 \vdash \forall X \exists Y A \Rightarrow T_n \vdash \forall X \exists Y \in R_c(H_k^X(n)) A(X, Y)$$

for some $k < \omega$

$$\Rightarrow T_n \vdash \forall X \exists Y A(X, Y)$$

となり、Lemma c) より O.K.

$$2. \Sigma_{n+1}^1 - GDC_0 \prec \Pi_n^1 - CA_0^{<\omega\omega}.$$

$$\text{theory } S_n \text{ is } S_n \triangleq \begin{cases} \Pi_n^1 - CA_0^{<\omega\omega} & , n = 1, 2 \\ \Pi_n^1 - CA_0^{<\omega\omega} + (V=L)_r & , n \geq 3 \end{cases}$$

と、Lemma c) に対応する Lemma: S_n is Π_4^1 -conservative over $\Pi_n^1 - CA_0^{<\omega\omega}$

より、 $n=0$ と同様にして OK

$$4. \Sigma_{n+1}^1 - GDC \prec \Pi_n^1 - CA_0^{<\epsilon_0}.$$

2. と同様にして、 $n=0$ の場合と同じようにできる。但し、

ω -rule の λ として $\Pi_n^1 - CA^{<\delta, +}$ or $\Pi_n^1 - CA^{<\delta, +} + (V=L)_r$ ($\delta < \epsilon_0$) で、

$\beta < \varepsilon_0$ なる長さの proof で証明される formula $A_{\beta, \delta}^x$ ($\delta, \delta < \varepsilon_0$,

A は Σ_{n+1}^1) を partial truth def. によつて '外' へ出す, $\Pi_n^1 - CA_0^{<\varepsilon_0}$
or $\Pi_n^1 - CA_0^{<\varepsilon_0} + (V=L)_r$ で証明するときには、restricted ind.

しかないから β までの超限帰納法は $\Pi_n^1 - CA_0^{<\varepsilon_0}$ の中で set として
存在する formula に対してしか適用できないから少し注意を要する。

3. $\Sigma_{n+1}^1 - GDCR$ と $\Pi_n^1 - CA_0^{<\omega^\omega}$.

る $k < \omega$, $\alpha < \omega^\omega$ と variable U について、

$$R_{k, \alpha}^U(n) \equiv U_{\beta < \alpha} R_\beta(H_{\omega, k, \beta}^U(n))$$

として、 U が occur しない formula A について、 $A^{R_{k, \alpha}^U(n)} \in A$ の中
の $\forall$ の set quantifiers を一斉に $R_{k, \alpha}^U(n)$ に相対化・制限し
て得られる formula とする。Lemma a), b), c) の S_n (2. で定義された)
に対する analogue を使って、 $n=0$ と同様にして O.K.

$n > 0$ のときの absolute hierarchy $\Pi_n^1 - CA_0^{<\alpha}$ に対する定理は、
上の証明で、parameter U を suppress して、かつ、次が成立すれば
O.K.: $\Pi_n^1 - CA_0^{<\alpha} + V=L$ is Σ_3^1 -conservative over $\Pi_n^1 - CA_0^{<\alpha}$

($\alpha = \omega, \omega^\omega, \varepsilon_0$)。即ち、 $V=L$ は Π_3^1 sentence で書いた、

constructibility hypothesis ($(V=L)_r$ in P.28 の Z を $Z = \phi$ とした) として表わす。(筆者はこの Lemma が成立するかどうか知らない。という
で言うと、Lemma c) の証明も知らない。ので)

または次のようにしてもよい。相対化された $\Pi_n^1 - CA_0^{<\alpha}$ に対する
結果を使えばよい。つまり、次を示せば十分:

Lemma. $\Pi_n^{1,-} - CA_0^{<\delta}$ is $\Sigma_{n+1}^{1,-}$ -conservative over $\Pi_n^{1,-} - CA_0^{<\delta}$
for (at least) $\delta = \omega, \omega^\omega, \epsilon_0$.

この Lemma は、各 $\beta, \gamma < \delta$ についてある $\delta < \delta$ が実際にとれて
($\delta = \gamma + \beta$ 程度に)。

$\Pi_n^{1,-} - CA_0^{<\delta} \vdash \forall X \in R_c(H_\gamma(n)) \exists Y \in R_c(H_\delta(n)) \text{Hier}_\beta^n(X, Y)$
となることを示さなければならない。但し、 $H_\gamma(n)$ は $\text{Hier}_\gamma^n(\phi, Y)$ なる Y
の $(Y)_\gamma$ のこと。

付記. Theorem 1.1 の言明論論を使つた証明としては、上記の
A. Cantini によるものがほかに、S. Feferman & W. Sieg による。
Skolem operator theory を使つた証明が [1] の II, §2 にあ
る。

§3 WKL_0 と PRA

この § では次の定理を証明する：

Theorem 2.1 WKL_0 is Π_2^0 -conservative over $\Sigma_1^0 - CA_0$.

証明は、1) $WKL + \Delta_1^0 - CA$ をそれと同等な $\Sigma_1^0 - Sep$ に書きかえて、

$\Sigma_1^0 - Sep_0$ is Π_2^0 -conservative over $\Sigma_1^0 - CA_0$ を示す。のと、2)

直接、 WKL_0 を扱つて示すのの 2 通り である。

Def. 1. (WKL = Weak König Lemma). function variable (unary)

f (は、 L_2 に属していると思つてもいいし、又は、 $\forall x \exists! y (x, y) \in X$ なる X

と見、これも (iii) に対して、

$$c \in T_f \Leftrightarrow f(c) = 1$$

$$BT(T_f) \Leftrightarrow \forall c \forall d [(c * d \in T_f \rightarrow c \in T_f) \ \& \ (c \in T_f \Rightarrow c \in {}^{<\omega_2})]$$

但し、 ${}^{<\omega_2} \equiv 0-1$ の有限列全体の集合、 $d \in {}^{<\omega_2}$ に対して、

$c * d$ は c と d の concatenation, $lh(c) \equiv c$ の長さ、を表わす。

また、function variable g について、 $\bar{g}x \equiv \langle g(0), g(1), \dots, g(x-1) \rangle$ 。

このとき、WKL とは、次の公理を表わす：

$$WKL : \forall f \in {}^{<\omega_2} [BT(T_f) \ \& \ \forall g \in {}^{<\omega_2} \exists x (\bar{g}x \notin T_f) \rightarrow \exists x \forall c \in {}^{<\omega_2} (lh(c) = x \rightarrow c \notin T_f)]$$

$$\text{但し、} f \in {}^{<\omega_2} \Leftrightarrow \forall x (f(x) \leq 1)$$

2. 理論 WKL_0 は、 $\Sigma_0^0\text{-}CA_0 + \Sigma_1^0\text{-}IA + \Delta_1^0\text{-}CA + WKL$ の =c。

3. ($\Sigma_1^0\text{-}Sep = \Sigma_1^0\text{-}Separation\ Axiom$). $\Sigma_1^0\text{-}Sep$ は次の公理(図式)：

$$\Sigma_1^0\text{-}Sep : \forall n \neg (A_n \ \& \ B_n) \rightarrow \exists X \forall n [(A_n \rightarrow n \in X) \ \& \ (n \in X \rightarrow \neg B_n)]$$

A, B は Σ_1^0 -formulae.

4. 理論 $\Sigma_1^0\text{-}Sep_0$ は、 $\Sigma_0^0\text{-}CA_0 + \Sigma_1^0\text{-}IA + \Sigma_1^0\text{-}Sep$ の =c。

次の事実が知られている：

Proposition (cf. [13]) $WKL_0 = \Sigma_1^0\text{-}Sep_0$, i.e., $\Sigma_1^0\text{-}IA_0$ と

$$\text{で } WKL + \Delta_1^0\text{-}CA \Leftrightarrow \Sigma_1^0\text{-}Sep.$$

1) Theorem 2.1 の第 1 証明。上の Prop. より $\Sigma_1^0\text{-}Sep_0$ は Π_2^0 -conservative

over $\Sigma_0^0\text{-CA}_0$ を示せばよい。初めに、証明論が使い易いように $\Sigma_1^0\text{-Sep}_0$ を L_2K を使って書き直す。公理は L_1 の constants に関する公理を *quantifier-free* の形で書いたもの, cf. P.18. 推論は L_2K のそれに加え次の Σ を加える:

1) $\Sigma_1^0\text{-Sep}$:

$$\frac{\Gamma, \neg A_0(m, n) \vee \neg B_0(k, n) \quad \exists m \exists n \exists k [(A_0(m, n) \& n \notin X) \vee (n \notin X \& B_0(k, n))], \Gamma}{\Gamma}$$

== 1) $A_0, B_0 \in \Sigma_0^0$ 2) 左上式の m, n, k は *eigenvariables*, i.e., Γ に free に occur しない ($\neg A_0(0, 0) \vee \neg B_0(0, 0)$ に t !))

2) $\Sigma_1^0\text{-IA}$:

$$\frac{\Gamma, \exists m B(m, 0) \quad \Gamma, b \neq t, \neg B(c, b), \exists m B(m, b') \quad \neg B(c, t), \Gamma}{\Gamma}$$

== 1) $B \in \Sigma_0^0$ 2) b, c は *eigenvariables* 3) t は term
 => b' は $b+1$ の τ .

明らかに == で書いた $\Sigma_1^0\text{-Sep}_0$ は元のそれと同値である。 $(\Sigma_0^0\text{-CA}_0$ に相当する公理・推論は入っていない。何故なら、 $\Sigma_1^0\text{-Sep}$ だけ、それは出てくるから。) さらに、 $\Sigma_1^0\text{-IA}_0$ (くわしくは、 $\Sigma_1^0\text{-IA}_0$ マイナス $\Sigma_0^0\text{-CA}$ と呼ぶべき、次の $\Sigma_0^0\text{-IA}_0$ も同様) と $\Sigma_0^0\text{-IA}_0$ も、 $\Sigma_1^0\text{-IA}_0$ は、上のように書いた $\Sigma_1^0\text{-Sep}_0$ から推論 $\Sigma_1^0\text{-Sep}$ を除いて得られる体系として、また、 $\Sigma_0^0\text{-IA}_0$ は、 $\Sigma_1^0\text{-IA}_0$ から推論 $\Sigma_1^0\text{-IA}$ を除き、 $\Sigma_0^0\text{-formulae}$ についての *induction axiom* を入れた

体系として定義する。($\Sigma_0^0 - IA_0$ のほうは、Gentzen 派に書かなくてよいが) このとき次の Lemma が成立する。

Lemma 1. $\Gamma \cup \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Sigma_1^0$ ($n \geq 0$) について。

$$\Sigma_1^0 - IA_0 \vdash \Gamma, \exists m A_1(m), \dots, \exists m A_n(m) \quad \Rightarrow$$

$$\Sigma_0^0 - IA_0 \vdash \Gamma, \exists m < t_1 A_1, \dots, \exists m < t_n A_n \quad \text{for some terms } t_1, \dots,$$

t_n s.t. $t_1, \dots, t_n$ に occur する variables $\bar{x}$ (1st order!) は Γ ,

$\exists m A_1(m), \dots, \exists m A_n(m)$ に occur するもののみ, i.e. 各 $t_i \equiv t_i(\bar{a})$

は $\bar{a}$ に関する primitive rec. function $f_i(\bar{a})$ に対応している。

この Lemma から次が出る:

Lemma 2. $\Gamma \subseteq \Sigma_1^0$ & X does not occur in Γ として。

$$\Sigma_1^0 - IA_0 \vdash \exists m \exists n \exists k [(A_0(m, n) \& n \notin X) \vee (n \in X \& B_0(k, n))], \Gamma$$

$$\Rightarrow \Sigma_0^0 - IA_0 \vdash \exists n (A(n) \& B(n)), \Gamma$$

但し, $A_0, B_0 \in \Sigma_0^0$ であつ。 $A(n) \equiv \exists m A_0(m, n)$, $B(n) \equiv \exists k B_0(k, n)$ 。

Lemma 2 の証明。 Lemma 1 より ある term t について。

$$\Sigma_0^0 - IA_0 \vdash \exists n [(\exists m < t A_0(m, n) \& n \notin X) \vee (n \in X \& B(n))], \Gamma$$

しかもこの $\Sigma_0^0 - IA_0$ での proof には $(\exists^2)$ は使われていないと思

つてよいから (cf. Thm 0.2). Σ_0^0 formula に Σ_0^0 formula (abstract) を代

入しても Σ_0^0 formula なのて。 X の proof の $n \notin X$ に $\exists m < t A_0(m, n)$ を

代入してもなお $\Sigma_0^0 - IA_0$ での proof であり。 $\exists m < t A_0(m, n) \rightarrow A(n)$

より。 O.K.

Theorem 2.1 の証明。 Σ_1^0 formula が $\Sigma_1^0 - Sep_0$ で証明できる

とある。Thm 0.2, Corr. 0.3 より Σ_1^0 proof を quasi normal に書
きかえれば、 Σ_1^0 proof には Σ_1^0 formulaeしか occur していない
とよい。Lemma 2 を使って (Lemma 1 も)、上から順に推論
 Σ_1^0 -Sep (と Σ_1^0 -IA) を消していけるから、 Σ_1^0 formula は Σ_0^0 -IA₀
で言明できることがわかる。

Rem. 勿論、 Σ_0^0 -IA₀ は PRA (L_1 の quantifier-free formulae に関
する induction axiom を持った 1st order arithmetic) の conserva-
tive extension である。

Lemma 1 の言明。 Σ_1^0 -formulae に至る、 Σ_1^0 -IA₀ での quasi normal
proof の長さに関する induction。

1) ($\exists^1$) $\frac{A t, \exists m A, \Gamma}{\exists m A, \Gamma}$ (で終っているとき)。 $\exists H$ より $\exists p.r. \text{ function } f$
 $A t, \exists m < f \bar{a} A m, \Gamma \quad g \in$.

$g \bar{a} \equiv \max(f \bar{a}, t+1)$ とかけば、 $\exists m < g \bar{a} A m, \Gamma$ となる。

2) (bV) $\frac{\exists m A m, b \neq t, B b, \Gamma}{\exists m A m, \forall x < t B x, \Gamma}$ のとき。 $\exists H$ より $\exists f \text{ s.t.}$

$\exists m < f \bar{a} b A m, b \neq t, B b, \Gamma$

($B \in \Sigma_0^0$) $b < t \equiv t \bar{a} \Rightarrow f \bar{a} b \leq g \bar{a} \equiv \max(f \bar{a} b; b < t \bar{a})$

より $\exists m < g \bar{a} A m, \forall x < t B x, \Gamma$.

3) (Σ_1^0 -IA)

$\Gamma, \exists m B(m, 0), \exists n A \dots (1) \quad \Gamma, b \neq t, \neg B(c, b), \exists m B(m, b'), \exists n A \dots (2)$

$\neg B(c, t), \Gamma, \exists n A \dots (3) \quad \text{よって、} \quad \frac{(1) \quad (2) \quad (3)}{\Gamma, \exists n A n}$

のとき。

IH 対). $\exists f_0, g_0, h, f_1, f_2$ s.t.

(1') $\Gamma, \exists m < g_0 \bar{a} B m 0, \exists n < f_0 \bar{a} A n$

(2') $\Gamma, b \neq t, \neg B c b, \exists m < h \bar{a} b c B m b', \exists n < f_1 \bar{a} b c A n$

(3') $\neg B c t, \Gamma, \exists n < f_2 \bar{a} c A n$.

g は $\begin{cases} g \bar{a} 0 = g_0 \bar{a} \\ g \bar{a} b' = \max(h \bar{a} b c : c < g \bar{a} b) \end{cases}$ $\times$ primitive recursion $\times$
定義すれば、(1'), (2') 対。

(1'') $\Gamma, \exists m < g \bar{a} 0 B m 0, \exists n < f_0 \bar{a} A n$

(2'') $\Gamma, b \neq t, \neg \exists m < g \bar{a} b B m b, \exists m < g \bar{a} b' B m b', \exists n < f_3 \bar{a} A n$

但し、 $f_3 \bar{a} \equiv \max(f_1 \bar{a} b c : b < t \bar{a}, c < g \bar{a} b)$

よ、 Σ_1^0 -IA 対). $k \bar{a} \equiv g \bar{a}(t \bar{a})$ $\times$ 12.

(4) $\Gamma, \exists m < k \bar{a} B m t, \exists n < f_0 \bar{a} A n, \exists n < f_3 \bar{a} A n$

$f \bar{a} \equiv \max(f_0 \bar{a}, f_3 \bar{a}, f_2 \bar{a} c : c < k \bar{a})$ $\times$ 12, (3'), (4) 対)

$\Gamma, \exists n < f \bar{a} A n$ $\times$ なる。

∴

2) Theorem 2.1 の第 2 言証明 (W. Sieg [11] による言証明)

再び WKL_0 を書き直す。言語は L_2 、対 $\text{function variables}$ をし。こ

での WKL_0 は、1) での Σ_1^0 -Sep₀ に次の推論 WKL を加える:

$WKL: \frac{\Gamma, \neg A_0(\bar{a}) \quad \exists m (\bar{Y} m \notin T_X), \Gamma}{\Gamma}$

== 1) $Y \times \bar{a}$ は eigenvariables 2) $\bar{Y} m \equiv \langle K_Y(0), \dots, K_Y(m-1) \rangle$

(K_Y は Y の characteristic function) $\neg$ 対). $\bar{Y} m \notin T_X \Leftrightarrow$

$\exists c \in {}^{<\omega}\mathbb{Z} (\text{lh}(c) = m \ \& \ \forall \bar{c} < \text{lh}(c) (c(\bar{c}) = 0 \iff \gamma(\bar{c})) \ \& \ c \notin T_x)$

1) $c \in T_x \iff c \in X$, 2) $T_x = X$.

1) $\forall \bar{x} \exists A_0(\bar{x}) \ (A_0 \in \Sigma_0^0)$ は, $BT(T_x) \ \& \ \forall x \exists c (\text{lh}(c) = x \ \& \ c \in T_x)$ の

Π_1^0 -form. $BT(T_x) \iff \forall c \forall d \sqsubset (c * d \in T_x \rightarrow c \in T_x) \ \& \ (c \in T_x \rightarrow c \in {}^{<\omega}\mathbb{Z})$

($\exists c (\text{lh}(c) = x \dots)$ は $\exists c < 2^{x+1} (\text{lh}(c) = x \dots)$ と見えてよい)

Rem. 勿論 Σ_1^0 -Sep は Δ_1^0 -CA でよい。

= のとき、

Lemma 3 $\Gamma \subseteq \Sigma_1^0$ & γ does not occur in Γ として、

$\Sigma_1^0\text{-IA}_0 \vdash \exists m (\bar{\gamma}_m \notin T_x), \Gamma \Rightarrow \Sigma_0^0\text{-IA}_0 \vdash \exists \bar{x} A_0(\bar{x}), \Gamma$, i.e.,

$\Sigma_0^0\text{-IA}_0 \vdash \neg [BT(T_x) \ \& \ \forall x \exists c (\text{lh}(c) = x \ \& \ c \in T_x)], \Gamma$

Lemma 3 の言明. Lemma 1 より ある term t について、

$\Sigma_0^0\text{-IA}_0 \vdash \exists m < t (\bar{\gamma}_m \notin T_x), \Gamma$. 以下、 $\Sigma_0^0\text{-IA}_0$ 内での話。

$BT(T_x) \ \& \ \forall x \exists c (\text{lh}(c) = x \ \& \ c \in T_x)$ を仮定して Γ を導く。仮定より

c を、 $\text{lh}(c) = t \ \& \ c \in T_x$ とするようにとる。 $BT(T_x)$ より

$\bar{\gamma}_t \notin T_x$, $\Gamma(\)$ は '又は' と読む。 γ は任意だが、たかす $\bar{c} \in \gamma$ に formula

(abstract) $c(\bar{c}) = 0$ を代入して (も、 $c(\bar{c}) = 0 \in \Sigma_0^0$ より $\Sigma_0^0\text{-IA}_0$ の proof に

なり) (わかり易く言うと、 γ を $\bar{\gamma}_t = c$ なる γ ととってよい) $c \notin T_x, \Gamma$

よ、て Γ を得る。

/.

この Lemma 3 より 1) におけると同様にして Σ_1^0 formula に至る WKL。

での quasi-normal proof から、WKL, Σ_1^0 -Sep, $\Sigma_1^0\text{-IA}$ を取り除く

ことができて、Theorem 2.1 が $WKL_0 \vdash A \Rightarrow \Sigma_0^0\text{-IA}_0 \vdash A$

~~A~~, $w/A \in \Pi_2^0$ の形で言明される。

付記. 1. W. Sieg [11] のもとでの言明では, WKL_0 は function variables $f, g, \dots \in {}^\omega\omega$ を持った言語で、公理は $WKL + \Sigma_1^0\text{-IA} + \Sigma_1^0\text{-AC}_0$ となっている。ここは $\Sigma_1^0\text{-AC}_0$ は、

$$\Sigma_1^0\text{-AC}_0 : \forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists f \forall x A(x, f(x)) \quad , A \in \Sigma_1^0$$

(添字の 0 は restricted induction であること示すのではなく、AC の type が 0 だけ、 $\omega = \mathbb{N}$ の type であること)。こうしたとき、

Lemma 1 は、 $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \Sigma_1^0$ について、

$$\Sigma_1^0\text{-IA}_0 \vdash \exists n A_n, \Gamma \Rightarrow \exists \text{ primitive rec. functional } F \text{ s.t.}$$

$$\Sigma_1^0\text{-IA}_0 \vdash \exists n < F(\bar{a}, \bar{f}) A_n, \Gamma$$

となる。但し、ここは $\Sigma_1^0\text{-IA}_0$ ($i=0, 1$) には、(lowest type の)

primitive rec. functionals が入っているとある。この設定で、

Lemma 3 の analogue を示すには、W. Howard により、prim.

rec. functional を hereditarily に majorize する prim.

rec. functional を使えることになる。しかしながら WKL に関係

する関数は $\in {}^\omega 2$ と思えばよく (これを正に Lemma 3 の analogue の

言明で使う)、かつ、 $\Sigma_1^0\text{-AC}_0 \leftrightarrow \Delta_1^0\text{-CA}$ over $\Sigma_1^0\text{-IA}_0$ である

から、function variables のない上で与えた WKL_0 を扱えば十分で

ある。なお、prim. rec. functionals of lowest type の入った $\Sigma_1^0\text{-IA}_0$

が、入っていない $\Sigma_1^0\text{-IA}_0$ の conservative extension になる

ことを見るには、そのような functional は連続でかつ $\times$ の modulus of continuity が prim. rec. function で与えられることに注意されたい。くわしくは、[14] を参照。

2. W. Sieg は Logic Colloquium 85, Paris の abstract において、次の結果を announce している: $\forall n \geq 1$ について、

$WKL_0 + \Sigma_n^0\text{-IA}$ is Π_1^1 -conservative over $\Sigma_n^0\text{-IA}_0$.

これは、L. Harrington の結果を含んでおり興味深いから、筆者はその証明を知りたい。

次に、function symbols を変えて(減らして)かつ、induction を $\Sigma_0^0\text{-IA}$ に制限したときの WKL_0 , $\Sigma_1^0\text{-Sep}_0$ について述べる。

$\mathcal{E}$ を primitive rec. functions からなる集合とする。 $L_2(\mathcal{E})$ とは、 $L_2(L_1)$ での function constants $\Sigma, \mathcal{E}$ に属するものに制限した言語とする。(正確には、各 $f \in \mathcal{E}$ の定義 (p.r. index) ごとに function constant Σ それに対応して一つずつ入れる。さらに、 Σ の定義に使われた functions に対応する constants も入れる。例えば、掛け算 $\cdot \in \mathcal{E}$ によって定義されていたとして、なら、+ (足し算) という記号も入れる。) このとき、 $\Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-IA}_0$ とは、言語 $L_2(\mathcal{E})$ での理論で、公理は $\mathcal{E}$ に属する関数の defining equations と $L_2(\mathcal{E})$ での bounded formulae $= \Sigma_0^0(\mathcal{E})$ に適用した induction axiom, から成る。 $\Sigma_1^0(\mathcal{E})\text{-Sep}_0$ は、 $\Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-IA}_0$ に、公理として $\Sigma_1^0(\mathcal{E})\text{-Sep}$ を加えた理論 ($\Sigma_1^0(\mathcal{E})$ は $\exists x B, w/B \in \Sigma_0^0(\mathcal{E})$ なるもの)。

また、 $WKL(\mathcal{E})_0$ とは、 $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) - I\mathcal{A}_0$ に公理として、 $\Delta_1^0(\mathcal{E}) - CA$ と WKL を加えた理論。但し、 WKL を書くには、少なくとも $0-1$ の有限列に関する $\wedge, *, C(\bar{c})$ ($c = \langle c_0, c_1, \dots, c_n \rangle, i \leq n$ とき $C(c_i) = c_i$) が $\mathcal{E}$ に入っているか。または、 $\Delta_0^0(\mathcal{E}) = \Sigma_0^0(\mathcal{E})$ formulae で定義されていて、かつ、これらの簡単な性質が証明できないと言えないので、 $WKL(\mathcal{E})_0$ は、 $\mathcal{E}$ に足し算、掛け算、 $\cdot$ (と $0, 1$) が入っているときにのみ定義する。($0, 1, +, \cdot$ で十分であるのは、Wilkie & Paris [5] にある。) 是れだけの仮定のもとで、まず、

Proposition. $WKL(\mathcal{E})_0 = \Sigma_1^0(\mathcal{E}) - Sep_0$

証明は、[3] にあるものを注意して読めば、 $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) - I\mathcal{A}$ で十分であることがわかる。

$\mathcal{E}$ に関して次の仮定をする：

仮定 : ある $\mathcal{E}_M \subseteq \mathcal{E}$ があって、次の成立する。

$$a) \quad \forall f \in \mathcal{E} \exists g \in \mathcal{E}_M [\Sigma_0^0(\mathcal{E}) - I\mathcal{A}_0 \vdash \bar{a} \leq \bar{b} \rightarrow f(\bar{a}) \leq g(\bar{b})]$$

$$(\bar{a} = a_0, \dots, a_{n-1}; \bar{b} = b_0, \dots, b_{n-1}, \bar{a} \leq \bar{b} \Leftrightarrow \bigwedge_{i < n} a_i \leq b_i)$$

$$b) \quad \forall g \in \mathcal{E}_M [\Sigma_0^0(\mathcal{E}) - I\mathcal{A}_0 \vdash \bar{a} \leq \bar{b} \rightarrow g(\bar{a}) \leq g(\bar{b})]$$

a) は各 $f \in \mathcal{E}$ について f を majorize する $g \in \mathcal{E}_M$ が存在する ($\mathcal{E}_M$ が $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) - I\mathcal{A}_0$ で provable)

b) は各 $g \in \mathcal{E}_M$ は (weakly) monotonic, non-decreasing である ($\mathcal{E}_M$ が $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) - I\mathcal{A}_0$ で provable)

正確には、必要なのは次の形。 $T_M(\mathcal{E}) \subseteq L_1(\mathcal{E})$ 上の terms 全体の集合

とすると、ある $T_M(\mathcal{E})_M$ があって、

$$a') \quad \forall t \in T_M(\mathcal{E}) \exists s \in T_M(\mathcal{E})_M [\Sigma_0^0(\mathcal{E}) - I\mathcal{A}_0 \vdash \bar{a} \leq \bar{b} \rightarrow t(\bar{a}) \leq s(\bar{b})]$$

b') $\forall s \in T_m(\mathcal{E})_M [\Sigma_0^0(\mathcal{E}) \vdash A_0 \vdash \bar{a} \leq \bar{b} \rightarrow s(\bar{a}) \leq s(\bar{b})]$.

各 term $t \equiv t(\bar{a}) \in T_m(\mathcal{E})$ について、もし $f \in \mathcal{E}$ があって、 $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) \vdash A_0 \vdash t(\bar{a}) = f(\bar{a})$ であるならば、 $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) \vdash A_0 \vdash t(\bar{a}) = f(\bar{a})$ である。これは仮定していないのだから、本当は a'), b') を仮定している。この仮定のもとで、

Theorem 2.2. $\Sigma_1^0(\mathcal{E})\text{-Sep}_0$ is $\Pi_2^0(\mathcal{E})$ -conservative over $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) \vdash A_0$ である。 $+, \cdot \in \mathcal{E}$ である。

Theorem 2.3. $WKL(\mathcal{E})_0$ is $\Pi_2^0(\mathcal{E})$ -conservative over $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) \vdash A_0$ である。 Theorem 2.2 の証明には Lemma 1 に代わって $\Sigma_1^0(\mathcal{E})$ で十分。

Lemma 4. $\Gamma \cup \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Sigma_1^0(\mathcal{E})$ について、

$\Sigma_0^0(\mathcal{E}) \vdash A_0 \vdash \Gamma, \exists m A_1, \dots, \exists m A_n \Rightarrow \Sigma_0^0(\mathcal{E}) \vdash A_0 \vdash \Gamma, \exists m \leq t_1 A_1, \dots, \exists m \leq t_n A_n$ for some terms $t_1, \dots, t_n$ in $L_1(\mathcal{E})$.

これは Parikh (-type) の定理として知られている。Lemma 4 の証明のアウトラインは次の通り。簡単のため、 $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) \vdash A_0 \vdash \exists m A$ ($A \in \Sigma_0^0(\mathcal{E})$) $\Rightarrow \Sigma_0^0(\mathcal{E}) \vdash A_0 \vdash \exists m \leq t A$ for some term t を示す。 $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) \vdash A_0$ の前のように Gentzen 流に書いて cut を取り除いて quasi-normal にし、かつ余計な free variables を除いてみる。 $\exists m A$ に至る proof P には $\Sigma_0^0(\mathcal{E})$ -formulae か、 $\exists m A$ の形の $\Sigma_1^0(\mathcal{E})$ -formulae しか occur していないことになる。 P に occur する eigenvariables (つまり、 $\exists m A$ に occur する variables) に外、 $\exists m A$ に occur する free variables を $\bar{a}$ とする。 $\bar{a}$ の走る変域は、 $g(\bar{a})$, $g \in \mathcal{E}_M$ で押さえることができる。それを見るには、 P の中で、下のほうに occur する eigenvariable から順に $g \in \mathcal{E}_M$ を決めていけばよ

い。 (ここで 仮定 も使った) よって P の中で $(\exists')$ で $A(t(b, \bar{a}))$ が
 $\exists m A$ が導かれていたと、 $b \leq g(\bar{a}) \rightarrow t(b, \bar{a}) \leq h(g(\bar{a}), \bar{a})$ for
 $\exists h \in E_{M_1}$, 及び $k \in E_{M_1} \wedge k(\bar{a}) = h(g(\bar{a}), \bar{a})$ として、 $\exists m \leq k(\bar{a}) A$ と
 なす。 この証明は S. Buss [2] による、のでくわしくはそれを参照。

Prop. と Thm 2.2 より Thm 2.3 が出てくる。 Lemma 4 から直接、前
 のように Thm 2.3 を示すこともできる。 但し、その際、 $\exp \in \mathcal{E}$ を仮
 定していたから、たしか $\forall x (\mathcal{L}(x) = x \& x \in T_x)$ は $\Sigma_1^0(\mathcal{E})$ になっ
 てしまう。 つまり、 P.36 の $\neg A_0 \in \Sigma_1^0(\mathcal{E})$ 。 しかしこれでは Lemma 4
 と Lemma 3 の analogue が使えないことは明らかだから、 O.K. である。

例 1. $\mathcal{E} = \{0, 1, +, \cdot, \exp\}$ ($\exp(a) = 2^a$) として、 $WKL_0^* = WKL(\mathcal{E})_0$
 である。 $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) - IA_0 \in EFA$ と書く。 Thm 2.3 より、 $A \in \Sigma_q^0(\mathcal{E})$ により、

$$WKL_0^* \vdash \forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow EFA \vdash \forall x \exists y < 2_n(x) A(x, y) \text{ for some } n$$

$$2_0(a) = a, \quad 2_n(a) = 2^{2_{n-1}(a)} \quad \text{と} \quad \text{な} \quad \text{す}.$$

2. $\mathcal{E} = \{0, 1, +, \cdot\}$ のときは、 $\Sigma_0^0(\mathcal{E}) - IA_0 \in \Pi\Delta_0$ と書く。 すると、 $A \in \Sigma_1^0(\mathcal{E})$,

$$WKL_0^*(\mathcal{E})_0 \vdash \forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow \Pi\Delta_0 \vdash \forall x \exists y < p(x) A(x, y) \text{ for some}$$

polynomial p , となる。

付註 2. 上の証明 ^は $\Rightarrow$ 、 $\Pi_2^0[\Pi_2^0(\mathcal{E})]$ sentence A の $WKL_0[WKL(\mathcal{E}/_0)]$ の
 proof P には、 $\Sigma_0^0 - IA_0[\Sigma_0^0(\mathcal{E}) - IA_0]$ での A の proof P' を対応させてい
 る。 '実際に' P から P' をつくっている。 しかも、明らかに、その証明は、
 $\Sigma_0^0(\text{Tower}) - IA_0$ ($\text{Tower}(n) = 2_n(0)$) で形式化でき、かつ、 P' の '長さ'
 (= Gödel 数, symbols の数, 推論の数, 等) は P の '長さ' の Tower であ

さえることができる。従って、この定理は $\text{Tower} \in \mathcal{E}$ のときにはバ
 ランスがとれているとさえする。(Tower が出てくるのは、 L_2K の
 cut-elimination をしているから) しかしながら上の二つの例では
 そうではない。少なくとも上の証明では。つまり、上の定理が
 EFA や $\text{I}\Delta_0$ で証明できるのかという問題。又は、次のように $\Sigma_1^0 A_0, A_1,$
 $\dots$ があるか? 各 A_n は、 WKL_0 では短かく証明でき、(例として n
 の polynomial で長さかきさえされる) しかしながら、 $\Sigma_1^0\text{-I}\Delta_0$ での A_n
 の証明は、 $\text{Tower}(n)$ 以上 長 くなってしまふ。(A_n は Σ_1^0 sentence
 で true 故、証明はできる) このどちらの問題の解答も等価に
 は open である。

§4. BI

この § では言語 L_2 に、 ω を走る function variables $f, g, h, \dots$ が
 入っているとする。

Def. $\mathcal{F}$ を L_2 での 各 formulae の集合とする。

1. $\text{BI}(\mathcal{F})$ とは次のような公理図式: $P \in \mathcal{F}$ と任意の Q について、

$$\text{Hyp 1} \ \& \ \text{Hyp 2} \ \& \ \text{Hyp 3} \rightarrow Q \langle \rangle \quad (\langle \rangle \text{ は空列})$$

$$\text{Hyp 1} : \forall f \exists x P(\bar{f}x) \quad (\bar{f}x = \langle f0, \dots, f(x-1) \rangle)$$

$$\text{Hyp 2} : \forall c \in {}^\omega\omega (Pc \rightarrow Qc)$$

$$\text{Hyp 3} : \forall c \in {}^\omega\omega [\forall x Q(c * \langle x \rangle) \rightarrow Qc]$$

2. $\text{TI}(\mathcal{F}), \text{TI}'(\mathcal{F})$ は次の公理図式: $\varphi \in \mathcal{F}$ と任意の Q について、

$$TI(\mathcal{I}) : WF(\mathcal{I}) \rightarrow I(\mathcal{I}, \mathcal{Q})$$

$$TI'(\mathcal{I}) : \forall x I(\mathcal{I}, x) \rightarrow I(\mathcal{I}, \mathcal{Q})$$

$$\text{但し, } WF(\mathcal{I}) \stackrel{\text{def}}{=} \forall f \exists x (fx' \neq fx) ; I(\mathcal{I}, \mathcal{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} Prg[\mathcal{I}, \mathcal{Q}] \rightarrow \forall x \mathcal{Q}x$$

$$Prg[\mathcal{I}, \mathcal{Q}] \stackrel{\text{def}}{=} \forall x (\forall y \mathcal{I}x \times \mathcal{Q}y \rightarrow \mathcal{Q}x)$$

$$3. BI \stackrel{\text{def}}{=} BI(\Sigma_0^o) , BI^- \stackrel{\text{def}}{=} BI(\Sigma_0^{o,-}) \quad (\Sigma_0^o \text{ は } L_2 \text{ 上 bndd formulae の集合,}$$

$$TI \stackrel{\text{def}}{=} TI(\Sigma_0^o) , TI^- \stackrel{\text{def}}{=} TI(\Sigma_0^{o,-}) \quad \Sigma_0^{o,-} \text{ は second order parameters}$$

$$TI' \stackrel{\text{def}}{=} TI(\Sigma_0^o), TI'^- \stackrel{\text{def}}{=} TI'(\Sigma_0^{o,-}) \quad \text{ただし } \Sigma_0^{o,-} = \Sigma_0^o)$$

4. $VE(\pi_0')$ とは次の公理図式:

$$VE(\pi_0') : \forall x A(x) \rightarrow A(V) , \quad A \in \pi_0' \text{ 且 } V \text{ は任意の abstract } (x)(F(x)),$$

(つまり, $A(V)$ とは A の中の $t \in X$ を $F(t)$ で置きかえた formula)

5. $VE(\pi_0'^-)$ とは, 上の $VE(\pi_0')$ で, $A(x)$ に occur する set parameter

(function parameter ϵ) は X のみとした公理図式, i.e., $\forall x A(x) \in \pi_1'^-$.

以下でこれらが同値であることを示す。base theory として、 $\Sigma_0^o\text{-CA}_0$ とする。これは §1 で定義された $\Sigma_0^o\text{-CA}_0$ に function variables に関する equality axiom と Σ_0^o の Gp (= Graph principle) を加えたもの:

$$Gp : \forall x \exists ! y ((x, y) \in X) \rightarrow \exists f \forall x ((x, f(x)) \in X).$$

Rem. 1. BI_M と $P \in \Sigma_0^o$ と任意の $\mathcal{Q}$ について

$$BI_M : H_{\gamma P} 1 - H_{\gamma P} 3 \text{ と } H_{\gamma P} M \rightarrow \mathcal{Q} \leftrightarrow$$

$$H_{\gamma P} M : \forall c \in {}^{<\omega\omega} \forall x (Pc \rightarrow Pc \leftrightarrow x)$$

なる公理図式として、 $BI_M \vdash BI$ (つまり、 $\Sigma_0^o\text{-CA}_0 \vdash BI_M \rightarrow BI$)

となる ([7], Theorem 4A)。与えられた $P \in \Sigma_0^o$ と $\mathcal{Q}$ について、

$$P_1 \in \Sigma_0^-, Q_1 \in, (d \in C \Leftrightarrow \exists d' \neq \langle \rangle (d * d' = C))$$

$$P_1 \in \Leftrightarrow \exists d \in C P d (\Leftrightarrow P \text{ is past secured})$$

$Q_1 \in \Leftrightarrow P_1 \in \vee Q \in$ とおくと明らかに P_1, Q_1 は Hyp1, Hyp2, HypM をみたす。Hyp3 が OK なら BI_M より $Q_1 \in$ となり $Q \in$ を得る。 $\forall x Q_1(C * \langle x \rangle)$ とする。

Case 1. C is past secured: $P_1 \in \rightarrow Q_1 \in$. Case 2 C is immediately secured, i.e. $P \in \& \neg P_1 \in : P \in \rightarrow Q \in$. Case 3 C is unsecured, i.e., $\forall d \in C \neg P d : \forall x \neg P_1(C * \langle x \rangle)$ と仮定より, $\forall x Q(C * \langle x \rangle)$ 。よ, $Q \in$ 。

2. BI_M の結論は $\forall C Q \in$ とできる ([Remark 4]). 与えられた P, Q, C について

で, i) C is past secured なら HypM より $P \in$ よ, $Q \in$ 。 ii) C is not past secured なら, $P_C(d) \equiv P(C * d)$, $Q_C(d) \equiv Q(C * d)$ とおいて BI_M の仮定 (Hyp1) がみたされ $Q_C \in$ を得る。BI では結論を $\forall C Q \in$ としたものは偽である。

Def. $N_2 (= \text{Neighborhood})$ は次の公理の $\in$ と:

$$N_2 : \forall f \forall x \exists C (\ell(C) = x \& f \in C) \Leftrightarrow \forall f \forall x \exists C (C = \bar{f}x)$$

$$\Leftrightarrow \forall f \forall x \exists C \forall c \langle x = \ell(c) \wedge (C(c) = f(c)) \rangle$$

Proposition 1. $N_2 + BI \vdash TI$, $N_2 + BI^- \vdash TI^-$ ([7], Theorem 5A)

Proof

与えられた $\langle \in \Sigma_0^+ [\in \Sigma_0^{*-}]$ と F について, $WF(\langle \rangle)$ と $\text{Pr}_g[\langle \rangle, F]$ を仮定する。 $\forall x Fx$ を示したい。 $P \in \Sigma_0^+ [\in \Sigma_0^{*-}]$ と $Q \in$ 。

$$P \in \Leftrightarrow 2 \leq \ell(C) \& \exists n < \ell(C) - 1 (C(n+1) * C(n))$$

$$Q \in \Leftrightarrow [C = \langle \rangle \& \forall x Fx] \vee [C \neq \langle \rangle \& (P \in \vee \forall x \neg \ell(C) Fx)]$$
 とおくと。

但し, $\ell(C) \equiv C(\ell(C) - 1)$ 。Hyp1 は N_2 より, Hyp2 は明らかに OK。

Hyp 3. $\forall x Q(c * \langle x \rangle)$ とする。i) $c = \langle \rangle$: 仮定と $tl(\langle x \rangle) = x$ より。

$\forall y \langle x F y \rangle$. $Pr_g \vdash \langle \rangle, F \vdash Fx$. ii) $c = \langle x \rangle$: Qc には $\forall y \langle x F y \rangle$ でよい。

iii) $y \langle x \rangle$ とする。 $\neg P(\langle x, y \rangle)$ とするから $Q(\langle x, y \rangle)$ より $\forall z \langle y F z \rangle$. Pr_g で

OK. iii) $ll(c) \geq 2$: $d \triangleq tl(c)$ とおく。 $\neg Pc$ とする, i.e., $\forall n < ll(c) = 1$

$(c(n+1) \neq c(n))$. $\forall y \langle d F y \rangle$ を示したいので $y \langle d \rangle$ とする。よって $\neg P(c * \langle y \rangle)$

であり, $Q(c * \langle y \rangle)$ より $\forall z \langle y F z \rangle$. 再び Pr_g で OK. %

Proposition 2. $TI \vdash BI$, $TI^- \vdash BI^-$ ([7], Theorem 5C)

Proof. Σ とした $P \in \Sigma_0^+ [\in \Sigma_0^{*-}]$ と Q により Hyp 1-3 とする。

$RC \triangleq \exists d \not\subseteq c P d$ (c is past secured)

$d \prec c \triangleq c \not\subseteq d \wedge \neg R d$, $\prec \in \Sigma_0^+ [\in \Sigma_0^{*-}]$ とおく。

i) $\forall f \exists n (f(n+1) \neq f(n))$: Case 1. $\forall n (f(n) \neq f(n'))$: Define $\bar{g} = Uf(n)$,

i.e., $\bar{g}n \triangleq (f(n+1))(n)$. Hyp 1 より $\exists x P(\bar{g}x)$. $n \triangleq x+1$ とし $R(\bar{g}n)$.

$\bar{g}n \subseteq f n$ より $R(fn)$. $\therefore f n \neq f(n-1)$. Case 2. $\exists n \neg (f(n) \neq f(n+1))$:

$f(n+1) \neq f(n)$.

ii) $Q_1 c \triangleq \neg RC \rightarrow Qc$ とおく。 $Pr_g \vdash \langle \rangle, Q_1 \vdash \neg S$, TI (or TI^-) より、

$\forall c Q_1 c$, $\prec \prec$ に $Q_1 \prec \rangle$. $\prec \rangle$ is not past secured より $Q \prec \rangle$ と仮定して

OK. $\forall d \prec c Q_1 d$ と仮定する。 $\therefore S$ に $\neg RC$ として Qc を示したいので $\prec$

の def. より $\forall d \prec c Q d$ (*) とする。 Case 1. Pc : Hyp 2 より Qc . Case 2.

$\neg Pc$: $\forall y \neg R(c * \langle y \rangle)$ とする (*) より $\forall y Q(c * \langle y \rangle)$. Hyp 3 で OK.

Proposition 3. $TI' \vdash TI$, $TI'^- \vdash TI^-$.

Proof. $\prec \in \Sigma_0^+ [\in \Sigma_0^{*-}]$ により, $\Sigma_0^+ - CA_0$ で, $WFC(\prec) \vdash \forall x I(\prec, x)$

ε はよい。 $\forall m (m \notin X \rightarrow \exists n \prec m (n \notin X)) \rightarrow \exists f \forall m (m \notin X \rightarrow f m \prec m \ \& \ m \notin X)$ による。 γ .

Proposition 4. $\forall E(\pi_0^+) \vdash BI$, $\forall E(\pi_0^{+-}) \vdash BI^-$

Proof. Prop 3 と同様に $(\varepsilon, P \in \Sigma_0^+ [\in \Sigma_0^{+-}])$ と set variable X に適用した $BI : Hyp 1-3 \rightarrow X < >$ がよい。 $\forall E(\pi_0^+) [\forall E(\pi_0^{+-})]$ での $A(X)$ と $(\varepsilon = \text{true})$ はよい。 γ .

Proposition 5. $TI'^- \vdash Ng$ $\rightarrow$ $\forall E(\pi_0^{+-}) \vdash Ng$

Proof. $TI'^- \vee \forall E(\pi_0^{+-}) \vdash \pi_\infty^+ - IA$ γ .

Proposition 6. $Ng + BI^- \vdash \pi_\infty^+ - IA$

Proof. $A_0 \ \& \ \forall n (A_n \rightarrow A_{n'})$ とする。 Aa を示したい。 $P \in \Sigma_0^{+-}$ と $Q \in$.

$Pc \Leftrightarrow a \leq \mathcal{H}(c)$; $Qc \Leftrightarrow A(a \leq \mathcal{H}(c))$ とすると Ng より Hyp 1. はかた明かたから BI^- より $Q < >$, i.e., Aa . γ .

Def. 1. formula $A(\vec{f})$ ($\vec{f} = f_0, \dots, f_n$) が $\vec{f}$ -normal とは、 A の中に $f_i, i \leq n$ が occur すれば、それは ある variables y_i について $f_i(y_i) = y_i$ の形のみのときにいふ。

2. quantifier-free (abb. by *qf*) formula $R(\vec{f})$ の $\vec{f}$ -normal form とは、いくつかの new variables $\vec{x}$ について $\exists \vec{x} R_0(\vec{x}, \vec{f})$ の形で、 R_0 が *qf* かつ $\vec{f}$ -normal であるもの。 $\vec{f}$ -normal form $\exists \vec{x} R_0(\vec{x}, \vec{f})$ は $R(\vec{f})$ から ある canonical な方法でつくられる。 とする。

3. *qf* formula $R(f)$ と binary abstract $F \equiv \langle x, y \rangle F(x, y)$ について、

" R の中の f に F を代入して得られる formula" $R(F)$ とは、 $R(f)$ の

f -normal form $\exists \vec{x} R_0(\vec{x}, f)$ について、 $\exists \vec{x} R_0(\vec{x}, F)$ のことを。但し、 $R_0(\vec{x}, F)$ は、 R_0 の中の $f(x) = y$ を $F(x, y)$ で置きかえた formula を表わす。

Proposition 7. $N_g + BI^- \vdash NG$. 但し、 NG は、任意の F に対して、

$$NG: Fnc(F) \rightarrow \forall x \exists c (c = \bar{F}x),$$

$$Fnc(F) \Leftrightarrow \forall x \exists ! y F(x, y); c = \bar{F}x \Leftrightarrow \forall i < x = \mathcal{L}(c) F(i, c(i)).$$

Proof. Prop. 6 より OK. ✓

Proposition 8. 各 f から f -normal な $R(x, f)$ について、次をみたす $P \in \Sigma_0^1$ がとれる:

- 1) P に occur する free variables は、 x, f 以外の R に occur する variables か、又は、a new free variable c .
- 2) 任意の binary abstract F に対して、

$$NG \vdash Fnc(F) \rightarrow [\exists x R(x, F) \Leftrightarrow \exists c (F \in c \ \& \ P c)]$$

$$\text{但し、} F \in c \Leftrightarrow c = \bar{F}(\mathcal{L}(c)).$$

Proof. R の中の $f(y) = z$, $f(y) \neq z$ の形の formula (R : in negation normal form) を x とし、 $c(y) = z \ \& \ y < \mathcal{L}(c)$, $c(y) \neq z \ \& \ y < \mathcal{L}(c)$ で置きかえた formula を $P_0 c$ とし、 $P c \Leftrightarrow \exists x < \mathcal{L}(c) P_0 c$ とする。

$Fnc(F)$ のとき $\exists x R(x, F) \rightarrow \exists c (F \in c \ \& \ P c)$ は NG で示す。✓

Proposition 9. 各 f から f -normal な $R(x, f)$ に対して、

$$N_g + BI \vdash Fnc(F) \ \& \ \forall f \exists x R(x, f) \rightarrow \exists x R(x, F), F: \text{binary abstract.}$$

又、 R に f 以外の 2nd order parameter がなければ、これは $N_g + BI^-$ で OK.

Proof. $\text{Fnc}(F) \ \& \ \forall f \exists x R(x, f)$ とする。Prop. 8 で述べた P をとる。

Hyp 1 は OK. Q を $Qc \Leftrightarrow F \in c \rightarrow \exists d (F \in c+d \ \& \ P(c+d))$ とする。明らかに、Hyp 2, Hyp 3 も満たされ ($F(\mathcal{U}(c), x) \ \& \ Q(c+d) \rightarrow Qc$)。

BI より $Q < \gamma$ 。よって $\exists d (F \in d \ \& \ P(d))$ 。Prop. 8 で OK。 γ .

Proposition 10. $\& f$ formula $R(x, f)$ と任意の F について、

$$N_g + BI \vdash \text{Fnc}(F) \ \& \ \forall f \exists x R(x, f) \rightarrow \exists x R(x, F).$$

R に f 以外の 2nd order parameter がなければ $N_g + BI^-$ で OK.

Proof. Prop. 9 と、 $\exists x R(x, F)$ の定義による。 γ .

Proposition 11. formula A について abstract F を

$$F \equiv F(x) \triangleq \{x, y\} \ (y \simeq \mu y. \neg A(x, y, X)) \quad \text{ただし、}$$

$$y \simeq \mu y. \neg A \Leftrightarrow \exists y \neg A \text{ なら } y \text{ はその } y \text{ を最小, いさぎれば } y = 0,$$

という formula とする。任意の abstract V について、

$$N_g + BI^- \vdash \text{Fnc}(F(V)) \quad \text{かつ、}$$

$$N_g + BI^- \vdash \forall x \exists y \neg A(x, y, V) \rightarrow \forall x \forall y [F(V)(x, y) \rightarrow \neg A(x, y, V)]$$

$$\text{つまり、} \quad \exists x A(x, F(V)(x), V) \rightarrow \exists x \forall y A(x, y, V).$$

Proof. Prop. 6. γ .

Proposition 12. $N_g + BI \vdash \forall E(\pi'_0)$, $N_g + BI^- \vdash \forall E(\pi'^{-}_0)$.

Proof. $\forall x A(x) \rightarrow A(V)$ を $A \in \pi'_0 [\in \pi'^{-}_0]$ と任意の V について示したい。

第一段. A を $\exists$ が先頭にくる prenex normal form に書きかえる。例

$$\text{えは、} \quad A \Leftrightarrow \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0. \quad (A_0 : \& f) \text{ とする。 prenex 1 の書きか}$$

えには logical な $\exists$ としか使わないから、任意の V について.

$A(V) \leftrightarrow \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0(V)$ も logical に言える。よ、てねの如から

A は prenex normal form, 例えは上の形としてよい。

第 2 段 Herbrand 型。 A に $\exists$ に対し new function variables f_0, f_1

を $\exists$ で $A_H \in$. $A_H \equiv A_0(x_0, f_0(x_0), x_1, f_1(x_0, x_1))$ とおく。

logical に. $\exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0 \rightarrow \forall f_0 \forall f_1 \exists x_0 \exists x_1 A_H$ abstracts

$F_0, F_1 \in$. $F_0 \equiv \{x_0, y_0\} (y_0 \supseteq \mu y_0. \neg \exists x_1 \forall y_1 A_0)$

$F_1 \equiv \{x_0, x_1, y_1\} (y_1 \supseteq \mu y_1. \exists y_0 (F_0(x_0, y_0) \& \neg A_0))$

とすれば Prop. 11 より任意の abstract V について.

$N_g + B \vdash \vdash F_{nc}(F_0(V)) \& F_{nc}(F_1(V))$

$N_g + B \vdash \vdash \exists x_0 \exists x_1 A_0(x_0, F_0(V)(x_0), x_1, F_1(V)(x_0, x_1), V) \rightarrow$

$\rightarrow \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0(V)$

よ、て $N_g + B \vdash \vdash \forall x A(x) \rightarrow \forall x \forall f_0 \forall f_1 \exists x_0 \exists x_1 A_H$,

$\forall x \forall f_0 \forall f_1 \exists x_0 \exists x_1 A_H \rightarrow \exists x_0 \exists x_1 A_0(x_0, F_0(V)(x_0), x_1, F_1(V)(x_0, x_1), V)$

(Prop. 10) $\rightarrow \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0(V) \equiv A(V)$. γ .

Prop. 1-12 と. TI' , TI'^- はそれぞれ $\forall E(\pi_0')$, $\forall E(\pi_0'^-)$ に含まれていることにより $\vdash$ を得る。

Theorem 3.1. $\Sigma_0^0\text{-CA}_0$ 上、次の 2 つの同値な公理図式の系列がある:

a) $N_g + B \vdash \vdash N_g + TI \leftrightarrow TI' \leftrightarrow \forall E(\pi_0')$

b) $N_g + B \vdash \vdash N_g + TI^- \leftrightarrow TI'^- \leftrightarrow \forall E(\pi_0'^-)$.

Rem. $\forall E(\pi_1') \leftrightarrow \forall E(\pi_0')$ (lightface ϵ) だから $\forall E(\Sigma_1^{1-})$ は強い。

より、 $\forall E(\Sigma_1^{0,1}) \leftrightarrow \Pi_\infty^0 - CA$ 。 $\forall Y \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow n \in Y)$ を考えればよい。

しかし $BI(\Pi_n^1)$ は '弱い' , cf. §5.

次に L_2K w/o ω -rule と induction の同等性について。

Def. RFN とは、 L_2K に 対する (uniform) Reflection principle を表わす:

$$RFN : Pr_{L_2K}(\ulcorner A(x, f, \bar{n}) \urcorner) \rightarrow A(x, f, n)$$

A は L_2 の任意の formula, $\bar{n}$ は 自然数 n に 対応する numeral $0^{(n)}$ の Gödel

数みたいなもの。i.e., $\ulcorner A(\bar{n}) \urcorner$ は 'formula' $\ulcorner A(x) \urcorner$ の x に numeral $0^{(n)}$ を代入

した formula $\ulcorner A(0^{(n)}) \urcorner$ の Gödel 数。 Pr_{L_2K} は L_2K の canonical な $\Sigma_1^{0,1}$ -provability predicate.

Theorem 3.2. $\Sigma_1^{0,1} - CA \vdash RFN \leftrightarrow \Pi_\infty^1 - IA$.

Corollary. $ACA_0 \vdash RFN_{ACA_0} \leftrightarrow \Pi_\infty^1 - IA$ (cf. [12], Lemma 2.7)

== には $ACA_0 \equiv \Pi_1^0 - CA$ 。 RFN_{ACA_0} は、' ACA_0 で 証明 できれば 正しい' に 対応する、 ACA_0 に 対する reflection scheme.

Corollary の proof. ACA_0 は finitely axiomatizable だから。

Thm 3.2 の proof. 1) $\Pi_\infty^1 - IA \rightarrow RFN$ は cut-elimination, Thm 0.2 ($\Sigma_1^{0,1} - CA$ で 証明 できる) と partial truth def. による。 2) $RFN \rightarrow \Pi_\infty^1 - IA$

は、 $A(0) \& \forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(n)$ の L_2K で proof P_n が、 n に

ついて prim-rec. によって 与えられる。

次に、 ω -rule が与えた L_2K と ω -branching tree (well-founded!) についての induction による BI との同等性。簡単のため、言語 L_2 を 与える。

Def. 1. 1st order language L_1 は、individual constant として 0 (zero) のみ、function constant として、' (successor, $+1$) のみを持ち、predicate constants として、おびの prim. rec. relations に対したものを持つ。
 さらに、 L_1 の closed terms は numerals $0, \dots$ のみである。

2. 2nd order language L_2 は、 L_1 に、各 $n \geq 1$ に n -place の predicate variables $X_0^n, X_1^n, \dots$ を加えて得られる。

3. $X_0 \subseteq \omega \times \omega$ を ω 上の binary relation (predicate variable) とする。このとき、 $L_2 K^\omega(X_0)$ は 2次の公理と推論を持つ。

Rem. $L_2 K^\omega(X_0)$ の定義は、 X_0 の arity は いくつでもよく、また $X_0 \rightarrow \dots$ なくともよい、e.g., $L_2 K^\omega(X_0, Y)$ 等も同様。

1) $L_2 K^\omega(X_0)$ の sequents はおび、1st order free variable を持たない (2nd order のはおび、よい。)

2) 公理。 2.1. L_1 の constants に関する公理。その main formulae はおび atomic か negated atomic となる。さらに $\& f$ で書いた公理の closed instances。 2.2 $\Gamma, X_0(\bar{n}, \bar{m})$ if $X_0(n, m)$ holds

($\bar{n} \equiv 0, \dots, n, \dots$, $\bar{m} \equiv 0, \dots, m, \dots$) 2.3 $\Gamma, \neg X_0(\bar{n}, \bar{m})$ if $X_0(n, m)$ does not hold.

3) 推論は、 $L_2 K$ のそれに次の変更を加える。

3.1 ($\forall$), ($\exists$) を取り除く (つまり bound quantifiers を primitive な logical operators と見ない) 3.2 ($\forall$) を次の ω -rule に置きかえる:

$$(w) \quad \frac{\{\Gamma, A(\bar{n})\}_{n \in \omega}}{\Gamma, \forall x A(x)} \quad \text{おび} \quad \frac{\Gamma, A(0) \quad \Gamma, A(1) \quad \dots \quad \Gamma, A(\bar{n}), \dots}{\Gamma, \forall x A(x)}$$

3.3 (3) を次の形に制限する:
$$\frac{\Gamma, A(\bar{n})}{\Gamma, \exists x A(x)}$$

4. $L_2 K^\omega(X_0)$ の preproof とは, ω -branching な *labeled tree* で, x の各 node は $L_2 K^\omega(X_0)$ の sequent が label として与えられており, かつ, 上の $L_2 K^\omega(X_0)$ の公理・推論に関して *locally correct* になっている, かつ, cut degree が finite なもの ($\Leftrightarrow$ cut formulae の $\text{length} = \text{degree} = \text{logical symbols}$ の数 (71 頁を要する) に有限な bound がある)。

5. $L_2 K^\omega(X_0)$ の proof とは, preproof で *well-founded* (naked tree かな) なもの。 (ω -proof とも言う)

6. preproof をもう少し formal に定義する。 $f: {}^{<\omega}\omega \rightarrow (\omega \times \omega \times \omega) \cup \{x\}$ ($x \notin \omega \times \omega \times \omega$) が preproof とは,

6.1 $T_f \triangleq \{c \in {}^{<\omega}\omega : f c \neq x\}$ として, 1) T_f は tree (non-empty)

2) $c * \langle n \rangle \in T_f$ & $m < n \Rightarrow c * \langle m \rangle \in T_f$ 3) $c * \langle n \rangle \in T_f$ & $n \geq 2 \Rightarrow c * \langle m \rangle \in T_f$

6.2. $c \in T_f$ について, $f c$ は $\langle R, \Gamma, d \rangle$ の形。 6.2.1 R は公理か推論の名前

6.2.2 Γ は $(L_2 K^\omega(X_0))$ の sequent 6.2.3 d は, $f_c (f_c(c) \triangleq$

$f(c * \langle c' \rangle)$, i.e., node c 上の subproof of f) の中で使われている cut の

cut formulae の長さの upperbound 6.2.4 $f c$ と $\{f(c * \langle n \rangle)\}_{n \in \omega}$ は,

公理・推論に関して correct になっている。 但し, $(f c)_0$ が公理なら,

$f(c * \langle n \rangle) = x$ for $\forall n \in \omega$ 。

明かに, preproof は Π_1^0 in X_0 , i.e., f is a preproof in $L_2 K^\omega(X_2) \Leftrightarrow$

$\text{prepf}(f, X_0)$ なる $\text{prepf} \in \Pi_1^0$ がある。

7. ω -RFN とは 次のような公理図式: sequent Γ に至る $L_2 K^\omega(X_0)$ の proof があるならば Γ は真。

Theorem 3.3 $\Sigma_0^0\text{-CA}_0 \vdash \omega\text{-RFN} \leftrightarrow \text{TI}' \leftrightarrow N_3 + \text{BI}$, etc.

Proof. 1) $\omega\text{-RFN} \rightarrow \Pi_1^0\text{-IA}$ より N_3 は OK. TI を示す。binary predicate variable $<$ について, $\text{WF}(<)$ を仮定して, $I(<, A) \equiv \text{Pr}_g[\langle <, A \rangle] \rightarrow \forall x A x$ を示せばよい。これを帰答して書くと,

--- $\text{Pr}_g[\langle <, A \rangle, m < n \supset A m]$ --- $\vdots$ これは preproof of

$\text{Pr}_g[\langle <, A \rangle, \forall x \langle n A x \rangle] \quad \text{Pr}_g[\langle <, A \rangle, \forall x A x]$

$\text{Pr}_g[\langle <, A \rangle, \neg(\forall x \langle n A x \rangle \supset A n), A n]$ ε をとる。左上の

--- $\text{Pr}_g[\langle <, A \rangle, A n]$ --- $\text{Pr}_g[\langle <, A \rangle, m < n \supset A m]$

$\text{Pr}_g[\langle <, A \rangle, \forall x A x]$ である。 $m \neq n$ ならば

たかき stop。このまじか。

系集けて $\langle < \text{と } \text{WF}(<) \text{ により } \varepsilon$ は proof になる。より $I(<, A)$ に至る proof があるから $\omega\text{-RFN}$ より $I(<, A)$ を得る。

2) Thm 3.2 と同様系集, i.e., cut-elimination for $L_2 K^\omega(X_0)$ と partial truth def. による。かわくは, [6] を参照。 χ .

Def. theory T について, $\omega\text{-model-RFN}_T$ とは, 任意の formula $A(X)$ について, 次の主張が公理図式:

$A(X)$ is true $\Rightarrow \exists$ countable $\omega\text{-model } M = (M_n)_{n \in \omega}$ s.t. $M_0 = X$ &

$M \models A[X]$ & $M \models T$.

Γ が L_1' の L_2K での Π_1^0 公理だけから導ける、すなわち ω -model-RFN である。

Proposition (Henkin-Crey の ω -completeness thm) ACA_0 で、

$A(X_0)$ の ω -proof in $L_2K^\omega(X_0)$ がある $\Leftrightarrow A(X_0)$ は 全ての countable ω -model M ($X_0 \in M$) で true.

Corollary $ACA_0 \vdash \omega\text{-RFN} \Leftrightarrow \omega\text{-model-RFN}$ あり

$ACA_0 \vdash \omega\text{-model-RFN}_{ACA_0} \Leftrightarrow TI'$ (cf. [12] §4)

parameter free の場合の $\Sigma_1^0, 4$ の L_2K^ω の preproof は、 $L_2K^\omega(X_0)$ の preproof で 公理 2.2 $\Gamma, X_0(\bar{n}, \bar{m})$ 2.3 $\Gamma, \neg X_0(\bar{n}, \bar{m})$ in P.5 2 が使われていたもの。 $\omega\text{-RFN}^-$ (for L_2K^ω) とは、各 formula A と、各 $f \in \Sigma_0^{0,-}$ ($\Leftrightarrow f(x)=y \in \Sigma_0^{0,-}$) について、

f が A に至る L_2K^ω の proof なら A は 真

という公理図式。 また、 $\omega\text{-RFN}_{cf}^-$ とは、上の proof $f \in \text{cut-free}$ (但し、atomic formula についての cut は可) に制限したもの。このとき、

Theorem 3.4 $\Sigma_0^{0,-}\text{-}CA_0 \vdash \omega\text{-RFN}_{cf}^- \Leftrightarrow TI'^-$

証明は前と同じ。また、[6] より、ある prim. rec. functional ν があ

って、各 $f \in \Sigma_0^{0,-}$ について、 $\Sigma_0^{0,-}\text{-}CA_0 \vdash TI'^-$ である。

f が A に至る L_2K^ω の proof $\Rightarrow \nu(f)$ は f に至る L_2K^ω の cut-free proof

となる。(実際には、 ν は、 f の code に cut-free な $g = \nu(f)$ の code を対応させる function) 二重に微妙なのは、 f が proof である

これ, かわり, $WF(f)$ か $WF(\nu(f))$ を示すことはたゞに $f \in \Sigma_0^-$ と, $TI' = VE(\pi_0') \rightarrow \pi_1' = CA$ より, [6] の議論が work するかわかる。よ, τ

Theorem 3.5 $\Sigma_0^- - CA_0 \vdash \omega - RFN^- \leftrightarrow TI'^-$

付記. Def. formulae の集合 $\mathcal{F}$ について, $\mathcal{F} - BI$ とは, BI の $Q \in \mathcal{Q} \in \mathcal{F}$ に制限したものとする。

Proposition. $Ng + \pi_1' - BI \vdash \Sigma_1' - GDC$ ([7], Theorem 7B, [12] Theorem 4.1)

Proof. 証明は, Thm 3.1 の proof より $Ng + \pi_1' - BI \vdash \pi_1' = CA$ ($\pi_0' - BI$ と $\dagger$)。よ, τ 。

$\forall \bar{c} \forall f \exists g \forall n A(\bar{c}, \bar{f}n, \bar{g}n) \rightarrow \exists h \forall \bar{c} \forall n A(\bar{c}, \bar{h}_i(n), \bar{h}_{i+1}(n))$

を, $A \in \pi_0'$ について示せば $\dagger$ 。但し, $\equiv =$ 。 $h_i(n) = h(\langle \bar{c}, n \rangle)$ と。

pairing function $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, $\langle 0, 0 \rangle = 0$, $1. \langle n, n \rangle + 1 = \langle 0, n+1 \rangle$

2. $\langle \bar{c}, n \rangle + 1 = \langle \bar{c}+1, n \rangle$ if $\bar{c} < n-1$ 3. $\langle n-1, n \rangle + 1 = \langle n, 0 \rangle$

4. $\langle \bar{c}, n \rangle + 1 = \langle \bar{c}, n+1 \rangle$ if $n < \bar{c}$ なるものとする。明かには,

$\langle \bar{c}, n \rangle < \langle \bar{c}, n+1 \rangle$ と δ 。 $P \in \pi_0'$ と。

$P \subset \Leftrightarrow \neg \forall \bar{c} < lh(c) \forall n \leq \min(lh_1(c), lh_1(c_{i+1})) A(\bar{c}, \bar{c}_i(n), \bar{c}_{i+1}(n))$

但し, $lh_1(c_i) \equiv 1 + \max\{n : \langle \bar{c}, n \rangle < lh(c)\}$, $c_i(n) \equiv c(\langle \bar{c}, n \rangle)$

for $\langle \bar{c}, n \rangle < lh(c)$, 且, $\exists h \forall x \neg P \bar{h}x$ なる OK がある。 $\forall h \exists x P \bar{h}x$

と δ 。 $Q \in \pi_1'$ と。 $Q \subset \Leftrightarrow P \subset \vee \forall h \in \mathbb{E} \neg \forall \bar{c} < lh(c) \forall n A(\bar{c}, \bar{h}_i(n), \bar{h}_{i+1}(n))$

と δ と, $H_{\gamma P} \exists : \forall x Q(c + \langle x \rangle) \rightarrow Qc$ と δ 。 $\odot \forall x Q(c + \langle x \rangle) \& \neg Qc$

と δ 。 $l = lh(c) = \langle \bar{c}, n \rangle$ と δ 。 1) $\bar{c} = n : h \in c \in \mathbb{E} \forall \bar{c} < lh(c) \forall n$

$A(i, \bar{h}_i(n), \bar{h}_{i+1}(n))$ とおきよに $x = h_0(n+1)$ とおけば $\neg Q(c * \langle x \rangle)$.

□) $i < n-1$: $x = h_{i+1}(n)$ 1) $n < i$: $x = h_i(n+1) \Rightarrow i = n-1$: 仮

定より $g \in \forall n A(i, \bar{h}_i(n), \bar{g}(n))$ とおきよに $x = g0$ とし $h' \in$.

$h'_j = h_j$ for $j \leq i$, $h'_i = g$ とおきよにすれば: この $x \in L'$ に

ついて $\neg Q(c * \langle x \rangle)$. よって Π'_1 -B により $Q \langle \rangle$. (かく明かには $\neg Q \langle \rangle$).

§5. ID と iterated Π'_1 -CA.

この § では S. Feferman [4] の結果をまとめよう。ID に関する証明論は [1] にくわしい。この § 以降、再び言語は *function variables* をしつもの L_2 にもとめる。order type ε_0+1 の standard well-ordering on ω をいって ω として fix. ordinals $\alpha, \beta \leq \varepsilon_0$ と対応する自然数を同一視する。 $\alpha < \beta$ と書いたとき、自然数の上から α 以下の大小ではなく、この順序での大小を表わすとする。

Def. 1. $L_1(X, Y)$ を、言語 L_1 に a unary predicate variable (constant) X と binary Y を加えて得られる一階の言語とする。 $L_1(X, Y)$ での formula

$\sigma(X, Y; a, b)$ が positive operator form であるとは、1) σ に中に X は positive には σ occur しない (i.e., $\sigma \notin X$ ない), 2) free variables は σ 々 a, b のみ、 σ とき σ する。(Y は negative に occur してよい)

2. 一階の言語 L_{ID} は、 L_1 に、各 pos. operator form $\sigma = \sigma(X, Y)$ に binary predicate constant P^σ を付け加えて得られる:

$L_{ID} \equiv L_1 + \{ P^\sigma : \sigma \text{ is a pos operator form} \}$.

3. β 階の理論 ID_α ($\alpha < \varepsilon_0$) は、その言語 L_{ID} 上に、公理は、 L_{ID} の PA (= Peano Arithmetic) の公理 (つまり、induction axiom は L_{ID} の任意の formula に適用可) に、各 P^α に対して次の 2 つの公理を加えたもの:

$$(P^\alpha 1)_\alpha \quad \forall \beta < \alpha \ (O_\beta(P^\alpha_\beta) \subseteq P^\alpha_\beta)$$

$$(P^\alpha 2)_\alpha \quad \forall \beta < \alpha \ [O_\beta(F) \subseteq F \rightarrow P^\alpha_\beta \subseteq F] \quad , \quad F \text{ は } L_{ID} \text{ の任意の formula.}$$

$$\text{但し、} \quad x \in P^\alpha_\beta \Leftrightarrow P^\alpha_\beta(\beta, x) \quad , \quad x \in O_\beta(X) \Leftrightarrow O(X, P^\alpha_{<\beta}, \beta, x)$$

$$(x, y) \in P^\alpha_{<\beta} \Leftrightarrow x < \beta \ \& \ y \in P^\alpha_x$$

$$\text{— 同様に、} \quad O^\alpha_{Y, \beta}(X) \Leftrightarrow O(X, Y, \beta) \subseteq X \Leftrightarrow \forall x (O(X, Y, \beta, x) \rightarrow x \in X) \quad \text{と.}$$

$$(P^\alpha 1)_\alpha \quad \forall \beta < \alpha \ O^\alpha_{P^\alpha_{<\beta}, \beta}(P^\alpha_\beta) \quad (P^\alpha 2)_\alpha \quad \forall \beta < \alpha \ [O^\alpha_{P^\alpha_{<\beta}, \beta}(F) \rightarrow P^\alpha_\beta \subseteq F]$$

つまり、 $P^\alpha_\beta = \bigcap \{X : O^\alpha_{P^\alpha_{<\beta}, \beta}(X)\}$ として持ってくる。

$$4. \text{ limit } \lambda \leq \varepsilon_0 \text{ に対しては、} \quad ID_{<\lambda} \equiv \bigcup_{\alpha < \lambda} ID_\alpha$$

$$5. \text{ 言語 } L_{ID(W)} \stackrel{\circ}{=} L_1 + \{W\} \quad , \quad W : \text{ a binary predicate constant.}$$

理論 $ID_\alpha(W)$ は、言語 $L_{ID(W)}$ 上に、公理は $L_{ID(W)}$ の PA のそれ

に、 W を加える:

$$(W 1)_\alpha \quad \forall \beta < \alpha \quad \forall e \in Tr^{<\beta} [(\forall c \{e\}^{W_{<\beta}}(c) \neq 0) \vee \forall x (e(x) \in W_\beta) \rightarrow e \in W_\beta]$$

$$(W 2)_\alpha \quad \forall \beta < \alpha \quad \forall e \in Tr^{<\beta} [(\forall c \{e\}^{W_{<\beta}}(c) \neq 0) \vee \forall x (F(e(x))) \rightarrow Fe] \rightarrow \forall e \in W_\beta Fe$$

— 同様に、 F は $ID_\alpha(W)$ の言語 $L_{ID(W)}$ の任意の formula.

$$e \in Tr^{<\beta} \Leftrightarrow e \text{ is a code of a total rec. function in } W_{<\beta} (= \sum_{\gamma < \beta} W_\gamma)$$

$$\text{s.t. } Tre \equiv \{c \in W : \{e\}^{W_{<\beta}}(c) = 0\} \text{ is a tree.}$$

$$e(x) \text{ は } \{e(x)\}^{W_{<\beta}}(c) \simeq \{e\}^{W_{<\beta}}(x * c) \text{ として code.}$$

つまり W_β は the set of codes of well-founded and rec. in $W_{<\beta}$ trees.

明らかに $ID_\alpha(W) \subseteq ID_\alpha$

$$6. ID_{<\lambda}(W) \equiv \bigcup_{\alpha < \lambda} ID_\alpha(W) \quad \lambda: \text{limit} \leq \epsilon_0.$$

Rem. ID_α に α までの超限帰納法が公理として λ になっているのは、 $\alpha < \epsilon_0$

故に証明できてしまふ。一般の $\alpha \geq \epsilon_0$ については、 ID_α は α までの超限

帰納法を公理(図式)として与える。

Def. 理論 S と T と、 S, T の言語に共通な formulae の集合 $\mathcal{F}$ について、

$$1. S \subseteq_{\mathcal{F}} T \iff S \vdash A \Rightarrow T \vdash A \quad \text{for any } A \in \mathcal{F}$$

$$2. S \equiv_{\mathcal{F}} T \iff S \subseteq_{\mathcal{F}} T \ \& \ T \subseteq_{\mathcal{F}} S.$$

Lemma. a) 1. $ID_1 \subseteq \pi'_0 - (ACA_0 + \Pi^1_1 - CA_0)$ 2. $ID_1 \subseteq \pi'_0 - RCA_0 + BI^-$

$$b) RCA + \Pi^1_1 - CA^* + BI^- \subseteq \pi'_0 - ID_1(W)$$

但し、 $\Pi^1_1 - CA^* : \exists x \forall n (n \in x \leftrightarrow \forall f \exists n R(fn))$ であり、 $\Pi^1_1 - CA \in \Pi^1_1 -$

normal form なるものに制限した公理。

$$c) ID_\alpha \subseteq \pi'_0 - \Pi^1_1 - CA^\alpha_0$$

$$d) ID_{\omega^{\alpha+1}} \subseteq \pi'_0 - \Pi^1_1 - CA^{<\omega^{\alpha+1}} + BI$$

$$e) \Pi^1_1 - CA^{<\omega^\alpha}_0 \subseteq \pi'_0 - ID_{<\omega^\alpha}(W) \quad (0 < \alpha \leq \epsilon_0)$$

$$f) \Pi^1_1 - CA^\alpha_0 + BI \subseteq \pi'_0 - ID_{\alpha, \omega}(W) \quad (0 < \alpha < \epsilon_0)$$

よ、2.

Theorem 4.1. a) $\Pi^1_1 - CA^{<\omega^\alpha}_0 \equiv \pi'_0 - ID_{<\omega^\alpha} \quad (0 < \alpha \leq \epsilon_0)$

$$b) \Pi^1_1 - CA^{<\omega^{\alpha+1}} + BI \equiv \pi'_0 - ID_{\omega^{\alpha+1}} \quad (0 \leq \alpha < \epsilon_0)$$

$$c) \Pi^1_1 - CA^{<\omega^\lambda}_0 \equiv \pi'_0 - \Pi^1_1 - CA^{<\omega^\lambda} + BI \equiv \pi'_0 - ID_{<\omega^\lambda} \quad (\lambda: \text{limit} \leq \epsilon_0)$$

$$\text{よ、3. } d) \Pi^1_1 - CA_0 \equiv \pi'_0 - ID_{<\omega} \quad e) \Pi^1_1 - CA + BI \equiv \pi'_0 - ID_\omega$$

f) $\Sigma_2^1\text{-GDCR} \equiv \Pi_0^1\text{-ID}_{<\omega^\omega}$ g) $\Sigma_2^1\text{-GDC} \equiv \Pi_0^1\text{-ID}_{<\varepsilon_0}$.

Rem. $\lambda = \text{limit}$ なる $\text{ID}_{\omega^\lambda} \not\models \Pi_1^1\text{-CA}^{<\omega^\lambda} + \text{BI}$, $\text{ID}_{\omega^\lambda} \vdash \text{Consis}(\text{ID}_{<\omega^\lambda}) \not\models$.

Lemma a), b), d) の証明のスケッチ.

a) 各 P^σ 上, $I^\sigma = \bigcap \{X : \mathcal{C}^\sigma(X)\} = \Pi_1^1\text{-}$ で解可である. 1. $\Pi_1^1\text{-CA}^{F_1}$ には λ 以上 ω^λ 存在する. 2. Thm 3.1 より $\text{RCA}_0 + \text{BI} \vdash \forall E(\Pi_0^1)$, したがって $(P^\sigma)^\omega$ を解可したものが OK である.

d) 各 P^σ の解可 $I^\sigma \in \Delta_2^1$ である. $F_{Y,\beta}^\sigma \equiv \bigcap \{X : \mathcal{C}_{Y,\beta}^\sigma(X)\} = \Pi_1^1$

$\mathcal{C}^\sigma(Y, \beta) \Leftrightarrow (Y)_\beta \subseteq F_{Y,\beta}^\sigma$ & $\mathcal{C}_{Y,\beta}^\sigma((Y)_\beta)$ である.

1) $\forall \beta \forall Y \mathcal{C}_{Y,\beta}^\sigma(F_{Y,\beta}^\sigma)$ 2) $\exists Y \mathcal{C}^\sigma(Y, 0) : (Y)_0 = F_{\emptyset,0}^\sigma$ である.

3) $\exists Y \forall \beta \leq \omega^\dagger \cdot n \mathcal{C}^\sigma(Y, \beta) \rightarrow \exists Y \forall \beta \leq \omega^\dagger \cdot (n+1) \mathcal{C}^\sigma(Y, \beta)$

③ $\forall \beta \leq \omega^\dagger \cdot n \mathcal{C}^\sigma(Y, \beta)$ である. $\forall \beta \leq \omega^\dagger \cdot (n+1) \mathcal{C}^\sigma(Z, \beta)$ である. Z は $(Z)_\beta \equiv (Y)_\beta$ for $\beta \leq \omega^\dagger \cdot n$. $\Pi_1^1\text{-CA}^{\omega^\dagger}$ より, $(Z)_{\omega^\dagger+1+r} = F_{Z < \omega^\dagger+1+r, \omega^\dagger+1+r}^\sigma$ for $r < \omega^\dagger$ である. $\omega^\dagger$ は $\omega^\dagger$ である.

4) $\forall n \exists Y \forall \beta \leq \omega^\dagger \cdot n \mathcal{C}^\sigma(Y, \beta)$, 5) $\forall r \forall Y Z [\forall \beta < r (\mathcal{C}^\sigma(Y, \beta) \& \mathcal{C}^\sigma(Z, \beta)) \rightarrow Y_{<r} = Z_{<r}] : b_y \text{ t.c. on } r < \varepsilon_0$.

6) $x \in I_\gamma^\sigma \Leftrightarrow \exists Y [\forall \beta \leq \gamma \mathcal{C}^\sigma(Y, \beta) \& x \in (Y)_\gamma]$

$\Leftrightarrow \forall Y [\forall \beta \leq \gamma \mathcal{C}^\sigma(Y, \beta) \rightarrow x \in (Y)_\gamma] : \Delta_2^1$

7) $\forall r < \omega^{\dagger+1} \mathcal{C}_{I_{\omega^\dagger, r}^\sigma}^\sigma(I_{\omega^\dagger, r}^\sigma) : 4) - 6) \text{ より } (\equiv \text{ } \omega^\dagger \text{ は } \Pi_1^1\text{-CA}^{\omega^\dagger} \text{ を使わずに})$

8) $\forall r < \omega^{\dagger+1} (\mathcal{C}_{I_{\omega^\dagger, r}^\sigma}^\sigma(B) \rightarrow I_{\omega^\dagger, r}^\sigma \subseteq B)$ for any B . ③ 4) より $\exists Y \text{ s.t.}$

$\forall \beta \leq r \mathcal{C}^\sigma(Y, \beta)$, したがって $(Y)_r \subseteq F_{Y < r, r}^\sigma$, Thm 3.1 より $\forall E(\Pi_0^1)$ より.

$\mathcal{C}_{Y < r, r}^\sigma(B) \rightarrow (Y)_r \subseteq B$, 6) より $Y_{<r+1} = I_{\omega^\dagger, r+1}^\sigma$. $\therefore$

b) $M \models R_c'(W)$ かつ、 QX ($Q = \forall, \exists$) $\in Qx \in R_c'(W)$ かつ、 $n \in X \in$.

$n \in' x \Leftrightarrow \langle x \rangle^W(n) \simeq 0$ かつ、 $\bar{x}$ は formula $A^M \in$. 各 A in L_2 について

7c, 7. $RCA + \Pi_1' - CA^* + BI^- \vdash A \Rightarrow ID_1(W) \vdash A^M$ ではない.

1) $ID_1(W) \vdash (\Pi_1' - CA^*)^M \Leftrightarrow \exists y \in M \forall n (n \in' y \Leftrightarrow \forall f^M \exists x P(\bar{f}x, n))$

($\forall f^M$ は $\forall f \in^M M$) $P(\bar{f}x, n) \in P_n(\bar{f}x)$ かつ、 $\cdot$ は monotonic かつ

上: $P_n \subset \& \& c \in d \rightarrow P_n d$. 各 prim. rec. g_p について、 $g_p(n) \in W \Leftrightarrow$

$\forall f^M \exists x P_n \bar{f}x$ ではない. $e_{P_n} \stackrel{\circ}{=} g_p(n) \in$.

$c \in' e_{P_n} \Leftrightarrow \neg P_n c$. monotonicity より e_{P_n} codes a tree $Tr_{e_{P_n}}$

$c \in Tr_{e_{P_n}} \Leftrightarrow c \in' e_{P_n} \Leftrightarrow c$ is unsecured. となる.

$e_{P_n} \in W \Leftrightarrow \forall f^M \exists x P_n \bar{f}x$ ② $n: \mathbb{N}$. $c \in Sec_p$ (c is secure) $\Leftrightarrow$

$e_p \upharpoonright c \in W$ かつ、a) $Pc \vee \forall x (c * \langle x \rangle \in Sec_p) \rightarrow c \in Sec_p$ (MA51).

b) $\forall c [Pc \vee \forall x (c * \langle x \rangle \in Q) \rightarrow Qc] \rightarrow Sec_p \subseteq Q$ for any Q :

$e \in Tr = Tr^\phi$ について、 $f_c e \Leftrightarrow \forall d [Tr_e = Tr_{e_p \upharpoonright c * d} \rightarrow c * d \in Q]$ かつ、

$W \subseteq F_c$ かつ、例として、 $Tr_e = \phi \rightarrow f_c e$ ではない、 $Tr_{e_p \upharpoonright c * d} = \phi \Rightarrow P(c * d)$

$\Rightarrow Q(c * d)$ かつ、 $\& \& c \in Sec_p \rightarrow e_p \upharpoonright c \in W \rightarrow F_c(e_p \upharpoonright c) \rightarrow c \in Q$.

c) $c \in Sec_p \rightarrow \forall f^M \exists x P(c * \bar{f}x)$: b) より、 $\langle \rangle \in Sec_p \rightarrow \forall f^M \exists x P \bar{f}x$.

d) $\forall f^M \exists x P \bar{f}x \rightarrow \langle \rangle \in Sec_p$, i.e., $e_p \in W$: $\langle \rangle \notin Sec_p$ かつ、

$\lambda \in M = R_c(W) \in \lambda c \simeq \mu x$. ($c \notin Sec_p \rightarrow c * \langle x \rangle \notin Sec_p$). λ より $f \in M$

は a) により $\& \& \forall x \neg P \bar{f}x$ かつ、

□) $ID_1(W) \vdash (BI_M)^M : \forall f^M \exists x P \bar{f}x \& \forall c \forall d (Pc \rightarrow P(c * d)) \& \forall c (Pc \rightarrow Qc) \&$

$\& \forall d (\forall x Q(c * \langle x \rangle) \rightarrow Qc) \rightarrow Q\langle \rangle$: b), d) より

7.

Rem 1. Lemma の言明より、 $\pi_n' - CA + BI \subseteq \Sigma_1' - \Pi_n' - CA_0^w$

($\pi_n' - CA_0 + \Pi_n' - CA^w$) $\subseteq \Sigma_1$, $n \geq 1$. ($M \models U_{\omega} R_C(Y|c)$ w/

$H_{\omega}^{\#}(\phi, Y)$). 同様に、 $BI(\Pi_n') \cup BI(\Sigma_n') \subseteq \Pi_n' - CA + BI$.

2. $\Sigma_1' - AC_0 + \Pi_1' - CA \subseteq \Pi_0' - ID_1(W) \oplus 1$ β_2 の A. Carline の言明より.

$\Sigma_1' - AC_0 + \Pi_1' - CA \subseteq \Sigma_1' - \Pi_1^{0'} - CA_0^{<w}(W) + \Pi_1' - CA^*(W)$ (sets は各 n に

ついて、 W の n -th jump に rec. in Σ_1 かつ PR 子), 同様に、これは

$ID_1(W)$ で modeling できる。

3. $ID_1 \not\vdash \Pi_1' - ACA + \Pi_1' - CA : ACA + \Pi_1' - CA \vdash$ Howard ordinal までの

超 PR 帰納法。より $ACA + \Pi_1' - CA \vdash$ Consis (ID_1)

4. $BI = BI + \Sigma_1' - GDC \vdash A$, $A \in \Pi_0'$ かつ $\exists \alpha < \text{Howard ordinal s.t.}$

$PA + \text{"}\alpha\text{までの超PR帰納法"} \vdash A$ より $ID_1 \vdash A$ 。つまり、

$$BI = BI + \Sigma_1' - GDC \subseteq \Pi_0' - ID_1$$

5. $ID_2 \subseteq \Pi_0' - BI + \Pi_1' - CA$: 事実、 ID_1 の $p_0^\alpha \in \Pi_1' - CA$ で set になっている、

2. ID_2 の p_1^α は BI による。

6. $BI + \Pi_1' - CA \subseteq \Pi_0' - ID_2$: 4. と同様、言明論による。^{*}

付記。 $ID_1^\wedge$ を、最小の fixed point $p^\alpha(ID_1)$ があり、ではなく、 π

かつ fixed point p^α , i.e., $p^\alpha = \cap(p^\alpha)$ for pos. $\cap(X^\dagger, n)$, が

あるという理論とすると、 $ID_1^\wedge \equiv \Pi_0' - \Sigma_1' - AC$ が知られている。[5]。

しかし、[5] での $\Sigma_1' - AC \subseteq \Pi_0' - ID_1^\wedge$ の言明はかなり間接的であ

る。直接、 $\Pi_1^0 - CA_0^{<e_0} \subseteq \Pi_0' - ID_1^\wedge$ は示せないか？

^{*} 先に $\Pi_1' - CA$ の cut Σ をとる。o.d. で言えば、 $\Pi_1' - CA \in (0, \infty)$ BI も $(1, \infty)$ 。

§6. iterated Π_1^0 -CA の順序数.

Def. 1. $\Omega \equiv \omega_1$ = the 1st uncountable ordinal ω_1 . $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ が
normal ω_1 strictly increasing ($\alpha < \beta < \Omega \Rightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$) である.

continuous ($\varphi(\lambda) = \sup_{\alpha < \lambda} \varphi(\alpha)$ for limit $\lambda < \Omega$) $\omega_2 = \omega_1$.

2. normal $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ の derivative $\varphi': \Omega \rightarrow \Omega$ は ω_1 で定義される
normal function: $\varphi'(\alpha) =$ the α -th fixed point of φ .

3 Veblen hierarchy $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha < \Omega}$ は ω_1 の Π_1^0 に ω_1 未満の normal
functions の列: 3.1 $\varphi_0(\alpha) = \omega^\alpha$ 3.2 $\varphi_{\alpha+1} = (\varphi_\alpha)'$

3.3 $\lambda = \text{limit} \Rightarrow \text{rg } \varphi_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} \text{rg } \varphi_\alpha$ ($\text{rg } \varphi =$ the range of $\varphi = \varphi''\Omega$)
 ω_1 . $\varphi_\lambda(\beta) =$ the β -th common fixed point of φ_α 's w/ $\alpha < \lambda$.

Proposition 1. $\varphi_{\alpha+1}(0) = \sup_{n < \omega} \varphi_\alpha^n(0)$, $\forall \alpha$. $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ である.

φ^n は φ の n -th iterate, $\varphi^0(\alpha) = \alpha$; $\varphi^{n+1}(\alpha) = \varphi(\varphi^n(\alpha))$

2 $\varphi_{\alpha+1}(\beta+1) = \sup_{n < \omega} \varphi_\alpha^n(\varphi_{\alpha+1}(\beta) + 1)$

3. limit λ である. $\varphi_\lambda(0) = \sup_{\alpha < \lambda} \varphi_\alpha(0)$

$\varphi_\lambda(\beta+1) = \sup_{\alpha < \lambda} \varphi_\alpha(\varphi_\lambda(\beta) + 1)$

4. $\varphi_\alpha(\beta) = \sup_{\gamma < \beta} \varphi_\alpha(\gamma)$ for limit $\beta < \Omega$.

5. $\varphi = \lambda_\omega$. $\varphi_\omega(0) = \Omega \rightarrow \Omega$ は normal.

Def. 順序数 $\Gamma_0 \equiv$ the least α ($\alpha = \varphi_\omega(0) = \varphi'(0)$)
= the least $\alpha > 0$ ($\forall \beta, \gamma < \alpha$ ($\varphi_\beta(\gamma) < \alpha$)).

is F. order type Γ_0 の prim. rec. well-ordering on ω である
standard ω の ε の ω 未満の fix (cf. [9]).

Theorem 5.1. 1) $\Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\omega^\alpha}$ is Π_1^0 -conservative over $\text{ACA}_0 + I(<\varphi_{\alpha(0)})$
 ($\alpha \leq \Gamma_0$)

2) $\Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\omega^{\alpha+1}}$ is Π_1^0 -conservative over $\text{ACA}_0 + I(<\varphi_{\alpha+1}(\epsilon_0))$
 ($\alpha < \Gamma_0$)

但し. $I(<\alpha) \triangleq \bigvee_{\delta < \alpha} I(\delta)$; $I(\delta) \Leftrightarrow \forall X I(X, \delta)$

$I(X, \delta) \triangleq \text{Pr}_g[<, X] \rightarrow \forall x < \delta (x \in X)$ ($<$ は Γ_0 -ordering).

Lemma 1. 1) $\nu = \omega^\alpha > 1$ に對し. $\Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\nu} \vdash I(<\varphi_{\alpha 0})$ かつ

$\Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\nu} \vdash I(\delta)$ for each $\delta < \varphi_{\alpha 0} \triangleq \varphi_{\alpha(0)}$.

2) $\nu = \omega^{\alpha+1}$ に對し. $\Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\nu} \vdash I(<\varphi_{\alpha+1}(\epsilon_0))$.

これは Lemma 1 の証明が素直で. 當分の間 $\Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\nu}$ の中でこのことを

ν は a fixed set parameter とする. $\beta < \nu$ に對し.

$I^{<\beta}(\gamma) \Leftrightarrow \forall X \in \bigcup_{\delta < \beta} \text{Rc}(H_\delta^\nu) I(X, \gamma)$ (H_δ^ν は ν の δ -th jump).

各 $\delta < \nu$ に對し. $A_\delta(\alpha) \Leftrightarrow 0 < \alpha \rightarrow \forall \beta \forall \delta > 0 [I^{<\omega^\alpha(\delta+1)}(\beta) \&$
 $\& \omega^\alpha(\delta+1) \leq \delta \rightarrow I^{<\omega^\alpha(\varphi_{\alpha\beta})}]$

とかく. なるべき.

Proposition 1. 各 $\delta < \nu$ に對し. $\Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\nu} \vdash \text{Pr}_g[A_\delta]$

但し. $\text{Pr}_g[A_\delta] \Leftrightarrow \text{Pr}_g[<, A_\delta]$ ($< := \Gamma_0$ -ordering)

Proposition 2. $\Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\nu} \vdash I(<\nu)$

Lemma 1 の証明. 1) Prop. 1, 2 より $\Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\nu} \vdash \forall \alpha < \delta A_\delta(\alpha)$ for

each $\delta < \nu$. 1) $\nu = \omega^\lambda$, λ : limit のときは 各 α w/ $0 < \alpha < \lambda$ に對し.

$I(\varphi_{\alpha 0})$ を示せばよい. $\delta = \omega^\alpha$. 2 とし. $A_\delta(\alpha)$ より $\beta = 0, \delta = 1$ とし

2. $I^{<\omega^a}(\varphi a 0)$. $\alpha < 1$. $I(\varphi a 0)$. $\square$) $\omega = \omega^{b+1}$ のときは $b > 0$ である。

各 $n < \omega$ に対し $I(\varphi_b^n(0))$ について。 $\alpha = \omega^b \cdot (n+1) < \omega^{b+1}$ であり、 $A_\alpha(b)$

より $\forall \beta \forall m \in I^{<\omega^{b(m+1)}}(\beta) \ \& \ 0 < n \leq m \rightarrow I^{<\omega^b m}(\varphi b \beta)$]

$\beta = 0$, $\varphi_b(0)$, $\varphi_b^2(0)$, ..., $\varphi_b^{n-1}(0)$ であり、 $I^{<\omega^b}(\varphi_b^n(0))$.

$m = n, n-1, n-2, \dots, 1$ であり、 $I(\varphi_b^n(0))$.

2) $\alpha = 0$ のときは $\Pi_1^0 - CA^{<\omega} = ACA \vdash I(<\varphi_1(\varepsilon_0))$ ($\varphi_1(\varepsilon_0) = \varepsilon_{\varepsilon_0}$) ではない。

だからこれは知られている。 $\alpha > 0$ である。 $A_{\omega^\alpha n}(\alpha)$ for each $n > 0$ である。

$A_{\omega^\alpha 2}(\alpha)$, i.e., $\forall \beta \in I^{<\omega^\alpha 2}(\beta) \rightarrow I^{<\omega^\alpha}(\varphi a \beta)$]。 かつ、

$\forall \beta \in I(\beta) \rightarrow I(\varphi a \beta)$]。 $\Pi_\omega^1 - IA$ であり、 $\forall n \forall \beta \in I(\beta) \rightarrow I(\varphi_a^n(\beta))$] ... (1)

$B(\beta) \stackrel{\circ}{=} I(\varphi_{a+1}(\beta))$ であり、 $\text{Pr}_g \vdash B$ であり、 $\odot$ i) $B(0) : B(0) \Leftrightarrow$

$I(\varphi_{a+1}(0)) \Leftrightarrow \forall n < \omega \ I(\varphi_a^n(0))$ 。 (1) であり $\beta = 0$ 。 ii) $B(\beta) \rightarrow B(\beta+1) :$

つまり $I(\varphi_{a+1}(\beta)) \rightarrow I(\varphi_{a+1}(\beta+1)) \Leftrightarrow \forall n < \omega \ I(\varphi_a^n(\varphi_{a+1}(\beta)+1))$

(1) であり $\Pi_\omega^1 - IA$ であり OK。 iii) $\lambda = \text{limit}$ & $\forall \beta < \lambda \ B(\beta) \rightarrow B(\lambda) : \text{明らか}$ 。

よって $\Pi_\omega^1 - IA$ であり $I(B, <\varepsilon_0)$ 。 $\therefore I(<\varphi_{a+1}(\varepsilon_0))$ であり。

Prop. 1 の $\frac{1}{2}$ は明らか。 $\alpha < \omega \in \text{fix}$ 。 $\forall b < \alpha \ A_\alpha(b) \in \langle \text{反定} \rangle$ (つまり $A_\alpha(a)$ は反定)。

($\alpha = 1$ のときは) $\forall \beta \forall \delta > 0 \in I^{<\omega^\delta + \omega}(\beta) \ \& \ \omega \delta + \omega \leq \alpha \rightarrow I^{<\omega^\delta}(\varphi_1 \beta)$]

であり。 $\delta > 0$, $\omega \delta + \omega \leq \alpha$ であり、 $B(\beta) \stackrel{\circ}{=} I^{<\omega^\delta}(\varphi_1(\beta))$ であり。

$B \in \text{Rc}(H_{\omega^\delta + k}^\vee)$ for some $k < \omega$ であり $\text{Pr}_g \vdash B$ であり、 $B(\beta) \rightarrow$

$B(\beta+1)$ には $\omega \delta = \text{limit}$ であり、 $I^{<\omega^\delta}(\beta) \rightarrow I^{<\omega^\delta}(2^\beta)$ であり。

($\alpha = b+1 > 0$ のときは) $A_\alpha(b)$, $\delta > 0$, $I^{<\omega^{\delta+1}}(\beta)$, $\omega^\alpha(\delta+1) \leq \alpha$ であり。

$I^{<\omega^\delta}(\varphi a \beta)$ は $\frac{1}{2}$ ではない。 $B(\beta) \stackrel{\circ}{=} I^{<\omega^\delta}(\varphi a \beta) \in \text{Rc}(H_{\omega^\alpha \delta + \omega}^\vee)$ であり。

$\text{Pr}_g \sqsubset B \sqsupset$ である。1) $B(0)$ 2) $B(\beta) \rightarrow B(\beta+1)$ 3) $\lambda = \text{limit}$ &

$\forall \beta < \lambda \ B(\beta) \rightarrow B(\lambda)$ 1) は 2) と同様。3) は明らか。2) $B(\beta)$, i.e.,

$I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a\beta)$ とある。 $\varphi_a(\beta+1) = \sup_{n < \omega} \varphi_b^n(\varphi_a(\beta)+1)$.

2.1 $\delta = \delta_0 + 1$ のとき: $\forall m, n < \omega$ 1) $\omega^b(\omega\delta_0 + m + n) < \omega^b(\omega\delta_0 + \omega)$

$= \omega^{\alpha\delta}$ 1) $I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a\beta) \rightarrow I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a\beta+1) \rightarrow$

$\rightarrow I^{<\omega^b(\omega\delta_0 + m + n)}(\varphi_a(\beta)+1)$ for $\forall m, n < \omega \rightarrow I^{<\omega^b(\omega\delta_0 + m)}(\varphi_b^n$

$(\varphi_a(\beta)+1))$ for $\forall m, n < \omega$ ($A_\delta(b)$ と ind on $n < \omega$) $\rightarrow I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a(\beta+1))$

($\omega^{\alpha\delta} = \sup_{m < \omega} \omega^b(\omega\delta_0 + m)$)

2.2 $\delta = \text{limit}$ のとき: $I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a\beta) \rightarrow I^{<\omega^b(\omega\gamma+n)}(\varphi_a(\beta)+1)$

for $\forall n < \omega$, $0 < \forall \gamma < \delta \rightarrow I^{<\omega^{\alpha\gamma}}(\varphi_b^n(\varphi_a(\beta)+1))$ for $\forall n < \omega$,

$0 < \forall \gamma < \delta$ ($A_\delta(b)$ と ind on $n < \omega$) $\rightarrow I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a(\beta+1))$

($\omega^{\alpha\delta} = \sup_{\gamma < \delta} \omega^{\alpha\gamma}$)

($\alpha = \text{limit}$ のとき) $\forall b < \alpha \ A_\delta(b)$, $I^{<\omega^{\alpha}(\delta+1)}(\beta)$, $\delta > 0$, $\omega^{\alpha}(\delta+1)$

$\leq \delta$ (仮定より $B(\beta) \Leftrightarrow I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a\beta)$ とある) $\text{Pr}_g \sqsubset B \sqsupset$ とある。

2) $B(\beta) \rightarrow B(\beta+1)$: $I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a\beta) \rightarrow I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a(\beta+1))$

$\varphi_a(\beta+1) = \sup_{b < \alpha} \varphi_b(\varphi_a(\beta)+1)$.

2.1 $\delta = \delta_0 + 1$ のとき: $I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a\beta) \rightarrow I^{<\omega^{\alpha\delta_0} + \omega^{\alpha}}(\varphi_a(\beta)+1) \rightarrow$

$\rightarrow I^{<\omega^{\alpha\delta_0} + \omega^c + \omega^b}(\varphi_a(\beta)+1)$ for $0 < \forall b \leq \forall c < \alpha \rightarrow (A_\delta(b) \neq \emptyset)$

$\rightarrow I^{<\omega^{\alpha\delta_0} + \omega^c}(\varphi_b(\varphi_a(\beta)+1))$ for $0 < \forall b \leq \forall c < \alpha \rightarrow$

$\rightarrow I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a(\beta+1))$ ($\omega^{\alpha\delta} = \omega^{\alpha\delta_0} + \sup_{b \leq c < \alpha} \omega^c$)

2.2 $\delta = \text{limit}$ のとき: $I^{<\omega^{\alpha\delta}}(\varphi_a\beta) \rightarrow I^{<\omega^{\alpha\gamma} + \omega^b}(\varphi_a(\beta)+1)$ for

$$0 < {}^V r < \delta, 0 < {}^V b < a \rightarrow I^{<\omega^a}(\varphi_b(\varphi_a(\beta)+1)) (A_\delta(b)) \rightarrow \\ \rightarrow I^{<\omega^a}(\varphi_a(\beta+1)). \quad \gamma.$$

Prop. 2 の証明. $\delta < \mathcal{L}$ について, ordinals $\leq \delta$ の有限集合 $S(\delta)$ を

$$0) \delta \in S(\delta) \quad 1) \beta = \beta_1 + \dots + \beta_n, \beta_1 > \dots > \beta_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \text{rg } \varphi_0 \text{ として}$$

$$(2) \beta \in S(\delta) \Rightarrow \beta_1, \dots, \beta_n \in S(\delta) \quad 2) \varphi r \delta \in S(\delta) \text{ \& } r, \delta < \varphi r \delta$$

$$\Rightarrow r, \delta \in S(\delta). \quad \text{を帰納的に定義する. } \forall \beta \in S(\delta) \Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\mathcal{L}} \vdash$$

$$I(\beta) \text{ である. 以下, } \Pi_1^0\text{-CA}_0^{<\mathcal{L}} \text{ での命題. } I(r) \text{ \& } I(\delta) \rightarrow I(\varphi r \delta)$$

$$\varphi r \delta \in S(\delta) \text{ であることはよい. } r=0 \text{ なら, } \varphi r \delta = 2^\delta \text{ より明らか. } r>0 \text{ なら}$$

$$\omega^r \cdot 2 < \omega^{\varphi r \delta} \cdot 2 = \varphi r \delta \cdot 2 \leq \delta \cdot 2 < \mathcal{L}. \text{ Prop. 1 より } \text{Pr}_g[A_{\delta, 2}].$$

$$I(r) \text{ より } A_{\delta, 2}(r), \text{ したがって } \forall \beta \in I^{<\omega^{r, 2}}(\beta) \rightarrow I^{<\omega^r}(\varphi r \beta)]$$

$$I(\delta) \text{ より } I^{<\omega^{r, 2}}(\delta). \text{ よって } I^{<\omega^r}(\varphi r \delta) \text{ である. } I(\varphi r \delta) \quad \gamma.$$

次に conservative のほうの証明. 最初に各 $\delta < \Gamma_0$ について, 1 階の理論

$$(H^X)_\delta \text{ (} X: \text{a set parameter) を定義する. } (H^X)_\delta \text{ の言語 } \equiv L_1 +$$

$$\{H^X, X, \in\}. \text{ atomic formulae は } L_1 \text{ のそれと. term } t \text{ について } t \in X,$$

$$t \in H^X \text{ の形の } t \text{ の. } t \in H^X_\delta \Leftrightarrow \langle s, t \rangle \in H^X \text{ (} \langle _, _ \rangle: \text{pairing function)}$$

$$(H^X)_\delta \text{ の公理は. PA の公理 (induction axiom は } H^X, X \text{ が } \in \text{-closed であることにより)}$$

$$1) \text{ } \mathcal{L} \text{ 上の公理: } H^X_0 = X \text{ \& } \forall \beta \leq \delta [(\text{Suc}(\beta) \rightarrow H^X_\beta = (H^X_{\text{Pd}(\beta)})') \text{ \& }$$

$$\& (\text{Lim}(\beta) \Rightarrow H^X_\beta = \sum_{\gamma < \beta} H^X_\gamma)] \quad (\text{つまり, ほぼ } (H^X)_\delta = \Pi_1^0\text{-CA}_0^\delta)$$

$$\text{明らかに. } A(X) \text{ は } \Pi_1^0\text{-formula であり, } X \text{ の set parameter は } X \text{ のみ. } \mathcal{L}$$

$$\text{より. } 1) \Pi_1^0\text{-CA}_0^\delta \vdash A(X) \Rightarrow (H^X)_{\delta \cdot n} \vdash A(X) \text{ for } \exists n < \omega.$$

$$2) \Pi_1^0\text{-CA}^\delta \vdash A(X) \Rightarrow (H^X)_{\delta \cdot \omega} \vdash A(X).$$

Def. normal functions $\{\theta_\alpha\}_{\alpha < \Omega} \in$. 0) $\theta_0(\beta) = \beta$ 1) $\theta_1(\beta) = 2^\beta$

2) $\theta_{\alpha+1}(\beta) = \theta_\alpha(\theta_1(\beta))$, i.e., $\theta_{\alpha+1} = \theta_\alpha \circ \theta_1$.

3) $\text{rg } \theta_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} \text{rg } \theta_\alpha$, $\lambda = \text{limit}$ と定義する。

Proposition 1. $\theta_{\alpha+\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta$ for $\alpha, \beta < \Omega$.

2. $\theta_{\omega\alpha} = \varphi_\alpha$, $\alpha < \Omega$

Lemma 2. $A(x)$ is set parameter is x occur (ない) Π_2^0 -formula

して. $(H^x)_\alpha \vdash A(x) \Rightarrow ACA_0 + I(<\theta_\alpha(\epsilon_0)) \vdash A(x)$

($A(x)$ には H^x ない)

この Lemma と上の注意より, Thm 5.1 が従う。以下, Lemma 2 の証明。

$(H^x)_\alpha$ is semi-formal system $\underbrace{(H^x)_\alpha}$ としておく。Ctm $\equiv$ the set of closed terms in L_1 とする。 $(H^x)_\alpha^*$ の formulae $\in \mathcal{F} < \mathcal{F}$.

1) $s, t \in \text{Ctm} \Rightarrow s = t, s \neq t, t \in H_n^x, t \notin H_n^x (n < \omega)$ は atomic

formulae (つまり, H_n^x は, $\forall n < \omega$ について unary predicate と見る)

2) Φ は formulae の countable set $\Rightarrow \bigwedge \Phi, \bigvee \Phi \in \text{formulae}$.

$\Phi = \{A_0, A_1, \dots\}$ のとき, $\bigwedge \Phi, \bigvee \Phi$ はそれぞれ $\bigwedge_n A_n, \bigvee_n A_n$ と書く。

Def. atomic formulae A, B は numeq. (= numequivalent) とは, B の中のいくつかの (closed) terms s をそれぞれ同じ値をもち terms t にかきかえて A が得られるときと言う。

Def. $(H^x)_\alpha^*$ の derivations. Γ は formulae の有限集合。

(Ax) 1. $\Gamma, s = t$ if $\mathbb{N} \models s = t$ 2. $\Gamma, s \neq t$ if $\mathbb{N} \models s \neq t$

3. $\Gamma, A, \neg B$ $A \in B$ は numeq. ない atomic formulae.

$$(\wedge) \quad \frac{\dots \Gamma, A_n \dots}{\Gamma, \bigwedge_n A_n} \quad \text{for } \forall n < \omega \quad (V) \quad \frac{\Gamma, A_n}{\Gamma, \bigvee_n A_n} \quad \text{for } \exists n < \omega$$

$$(cut) \quad \frac{\Gamma, A \quad \neg A, \Delta}{\Gamma, \Delta} \quad \text{for limit } \beta \quad \lambda \leq \beta \text{ について.}$$

$$(H_\lambda^X) \quad \frac{\Gamma, n \in H_\beta^X \quad (\neg H_\lambda^X)}{\Gamma, m \in H_\lambda^X} \quad \frac{\Gamma, n \notin H_\beta^X}{\Gamma, m \notin H_\lambda^X} \quad \text{== 1. } \beta < \lambda \text{ とき. } m = \langle \beta, n \rangle.$$

$$(Ax') \quad \text{各 } n \text{ s.t. } n \neq \omega \text{ について. } \Gamma, t \notin H_n^X.$$

$\beta+1 \leq \omega$ なる β についての $(H_{\beta+1}^X)$ と $(\neg H_{\beta+1}^X)$ を書くための準備。

$H_{\beta+1}^X$ は H_β^X の jump たち。 $n \in H_{\beta+1}^X \Leftrightarrow \exists y \, T(n, n, \bar{H}_\beta^X(y), y)$

$\Leftrightarrow \exists y \exists z \, ['z \text{ は } \mathbb{N} \text{ 上 } y \text{ の } 0-1 \text{ 列}' \wedge T(n, n, z, y) \wedge \forall i < y \, ((z)_i \equiv z(i) = 0 \Leftrightarrow i \in H_\beta^X)]$ 従って p.r. function $f \in$.

$f(n, k, m) = 0 \Leftrightarrow 'k \text{ は } \mathbb{N} \text{ 上 } m \text{ の } 0-1 \text{ 列}' \wedge T(n, n, k, m)$

と $\exists z. n \in H_{\beta+1}^X \Leftrightarrow \bigvee_{m, k} [f(n, k, m) = 0 \wedge \bigwedge_{i < m} [(k(i) = 0 \wedge i \in H_\beta^X)$

$\vee (k(i) \neq 0 \wedge i \notin H_\beta^X)]] \Leftrightarrow \bigvee_{m, k} [f(n, k, m) = 0 \wedge \bigvee_{c \in m_2} \bigwedge_{i < m}$

$[(k(i) = 0)^{c(i)} \wedge (i \in H_\beta^X)^{c(i)}]]$, 1 個 formula A について.

$$A^c \Leftrightarrow \begin{cases} A & , c = 0 \\ \neg A & , c = 1. \end{cases}$$

$$n \notin H_{\beta+1}^X \Leftrightarrow \bigwedge_{m, k} [f(n, k, m) \neq 0 \vee \bigwedge_{c \in m_2} \bigvee_{i < m} [(k(i) = 0)^{1-c(i)} \vee (i \in H_\beta^X)^{1-c(i)}]]$$

$(H_{\beta+1}^X), (\neg H_{\beta+1}^X)$ は次のように 33。

$$(H_{\beta+1}^X)$$

$$\frac{\Gamma, f(n, k, m) = 0 \quad \dots, \Gamma, (k(i) = 0)^{c(i)} \quad \Gamma, (i \in H_\beta^x)^{c(i)} \quad \dots}{\Gamma, n \in H_{\beta+1}^x}$$

for some $m, k < \omega$ and $c \in {}^m 2 = \{c \in \omega : c : m \rightarrow 2\}$.

⊥ $\nVdash (1+m)_7$.

$$\frac{(\neg H_{\beta+1}^x) \quad \dots \quad \Gamma, A_{m,k,c} \quad \dots}{\Gamma, n \notin H_{\beta+1}^x} \quad \text{for all } m, k < \omega \text{ and } c \in {}^m 2.$$

但し $A_{m,k,c}$ は $f(n, k, m) \neq 0, (k(i) = 0)^{1-c(i)}, (i \in H_\beta^x)^{1-c(i)}$ ($i < m$)

といふ $(1+m-2)$ の formulae のいずれかを表わす。

Def. formula の $\mathbb{F}_2$ 値 = rank.

$$1. \quad r(s=t) \equiv r(s \neq t) = 0$$

$$r(t \in H_n^x) = r(t \notin H_n^x) = \begin{cases} n & n \leq \omega \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$2. \quad r(\wedge \Phi) = r(\vee \Phi) = \sup\{r(A) + 1 : A \in \Phi\}$$

Def. derivation の $\mathbb{F}_2$ 値 = depth

$$1. \quad \mathcal{D} \text{ が axiom } (Ax), (Ax') \text{ だけのものであるとき} : |\mathcal{D}| = 0$$

$$2. \quad |\mathcal{D}| = \sup_{i < \omega} (|\mathcal{D}_i| + 1) \quad \{\mathcal{D}_i\}_{i < \omega} \text{ は } \mathcal{D} \text{ の lmn.}$$

subderivations.

Rem. 無限の長さの formula, derivations の長さを上の様に定義したいで、以下に $|\mathcal{D}| \leq \beta$ ($|\mathcal{D}| = \beta$ でなく) を定義すれば constructive-arithmetical にできる。

Def. $\vdash \Gamma \sqsubset \gamma, \beta \iff \exists \text{ derivation } \mathcal{D} \text{ s.t. } |\mathcal{D}| \leq \beta \text{ and } r(A) < \gamma \text{ for any cut formula } A \text{ in } \mathcal{D}.$

これで setting が終わった。あとはふつうのように (cf. [9]):

Elimination Lemma. $\vdash \Gamma, A \in \mathcal{R}, \beta_0] \ \& \ \vdash \neg A, \Lambda \in \mathcal{R}, \beta_1]$
 $\& \ r(A) \leq \mathcal{R} \Rightarrow \vdash \Gamma, \Lambda \in \mathcal{R}, \beta_0 \# \beta_1]$

($\beta_0 \# \beta_1$ は natural (commutative, Hessenberg) sum)

Elimination Theorem. $\vdash \Gamma \in \alpha + \beta, \mathcal{R}] \Rightarrow \vdash \Gamma \in \alpha, \theta_\beta(\mathcal{R})]$
 $\alpha < 1$: $\vdash \Gamma \in \alpha, \mathcal{R}] \Rightarrow \vdash \Gamma \in 0, \theta_\alpha(\mathcal{R})]$

Embedding Lemma. $(H^\omega)_\alpha \vdash A(X) \Rightarrow \vdash A^*(H^\omega_0) \in \alpha + \omega, < \omega + \omega]$

i.e., $\vdash A^*(H^\omega_0) \in \alpha + \ell, \omega + k]$ for some $\ell, k < \omega$.

($\exists$) $A^*(H^\omega_0)$ は $A(X)$ の X に $H^\omega_0 \in \mathcal{A} + \mathcal{X} \subset \cdot \forall n, \exists n \in \cdot \wedge_n, \vee_n$
 で置きかえた formula ($A(X)$ に H^ω なく)

Lemma 2 の証明。 $(H^\omega)_\alpha \vdash A(X) \Rightarrow \vdash A^*(H^\omega_0) \in 0, < \theta_\alpha(\varepsilon_0)]$

となる。($\theta_\alpha(\omega + k) < \varepsilon_0$) 　これを算術化・形式化して partial
 truth def. を経て、 $ACA_0 + I(< \theta_\alpha(\varepsilon_0)) \vdash A(X)$ 。　/-

§7. 補遺

ここでは、M. Rathjen [8] から本稿に直接関係のある結果を拾
 う。

Def. 1. binary R について、 R を順序のように考えるときには、 $R(a, b)$
 を aRb と書く。 $WO(R)$ は ' R is a well ordering on ω ' を Π'_1 で書
 いた formula (以下、 ACA_0 を仮定するから、無限下降列がない、 $WF(R)$ と
 書いても、 $\forall X I(R, X)$ と書いても同じ)。

$$2. Y_{Ri} \equiv \{ \langle i', x \rangle : i' R i \text{ \& } \langle i', x \rangle \in Y \}$$

$$3. \text{ pos. quantifier form } \mathcal{Q}(X^+, Y, i, x) \text{ is } \pi_1 \pi_2.$$

$$\mathcal{Q}_{Y,i}^n(X) \Leftrightarrow \mathcal{Q}^n(X, Y, i) \Leftrightarrow \forall x [\mathcal{Q}(X, Y, i, x) \rightarrow x \in X]$$

$$IT^n(R, Y) \Leftrightarrow \forall i [\mathcal{Q}^n(Y|_i, Y_{Ri}, i) \text{ \& } \forall x (\mathcal{Q}^n(X, Y_{Ri}, i) \rightarrow (Y|_i \leq x))]$$

(cf. p. 60)

$$4. \text{AUT-ID}_0 \equiv \text{ACA}_0 + (\text{IT.1})$$

$$(\text{IT.1}) \forall R [W_0(R) \rightarrow \exists Z IT^n(R, Z)] \quad \text{各 pos. quantifier form } \mathcal{Q}.$$

$$5. \text{AUT-ID}_2 \equiv \text{ACA} + (\text{IT.1}) + (\text{IT.2})$$

$$(\text{IT.2}) \forall R \forall Y \forall i [W_0(R) \text{ \& } IT^n(R, Y) \text{ \& } \mathcal{Q}^n(A, Y_{Ri}, i) \rightarrow (Y|_i \leq A)]$$

各 $\mathcal{Q}$ と、任意の formula A in L_2 について。

以下、 $\mathcal{F}$ を L_2 での formulae の集合とす。

$$6. \mathcal{F}\text{-TR}_0 \equiv \text{ACA}_0 + (\mathcal{F}\text{-TR})$$

$$(\mathcal{F}\text{-TR}) \forall R [W_0(R) \rightarrow \exists Z \forall i \forall y (y \in (Z)_i \Leftrightarrow B(Z_{Ri}, i, y))]$$

$$B \in \mathcal{F}.$$

$$7. \mathcal{F}\text{-TRDC} \equiv \text{ACA}_0 + (\mathcal{F}\text{-TRDC})$$

$$(\mathcal{F}\text{-TRDC}) W_0(R) \text{ \& } \forall i \forall x \exists Y A(i, x, Y) \rightarrow \exists Z \forall i A(i, Z_{Ri}, Z_i).$$

$$8. \mathcal{F}\text{-TI} : \forall R [W_0(R) \rightarrow I(R, A)] \quad A \in \mathcal{F}$$

$$9. \text{但し、} \mathcal{F} = \Delta_n^1 \text{ のときは、} \Delta_n^1\text{-TR}_0 \equiv \text{ACA}_0 + (\Delta_n^1\text{-TR})$$

$$(\Delta_n^1\text{-TR}) W_0(R) \text{ \& } \forall x \forall i \forall y [B(x, i, y) \Leftrightarrow A(x, i, y)] \rightarrow$$

$$\exists Z \forall i \forall y (y \in (Z)_i \Leftrightarrow B(Z_{Ri}, i, y))$$

$$, B, \neg A \in \Sigma_n^1.$$

Proposition. 1. $\Pi_1^1\text{-TR}_0 = \text{AUT-ID}_0$

2. $\Pi_1^1\text{-TR} + \text{BI} = \text{AUT-ID}_2 = \text{AUT-ID}_0 + \text{BI}$

3. $\Delta_2^1\text{-TR}_0 = \Sigma_2^1\text{-TRDC}_0 \leq \Delta_2^1\text{-CA}_0 + \Sigma_2^1\text{-TI}$

Proof. 1. $\Pi_1^1\text{-TR}_0 \leq \text{AUT-ID}_0$ には Π_1^1 -normal form を使った。

2. §5 3 $\Delta_2^1\text{-TR}_0 \vdash \Sigma_2^1\text{-TRDC}$ には Π_1^1 -uniformization を使った。

Proposition 1. $\text{ATR}_0 \vdash \text{BI}(\Delta_1^{0=}) \rightarrow \text{BI}(\Sigma_1^{1=})$

2. $\text{ATR}_0 \vdash \text{BI}(\Delta_1^{0=}) \rightarrow \text{BI}(\Sigma_1^{1=})$

但し、 $\text{ATR}_0 \equiv \Pi_0^1\text{-TR}_0$, $\mathcal{F}^=$ は $A \in \mathcal{F}$ (formulae の集合) であつた A に
 $=$ かつ $\text{parameter } \neq L, i.e., \text{ sentence.}$

Proof. ([Satg 6.9]). 2. Σ_1^1 -boundedness には $\exists \gamma, \gamma \neq 1, \gamma \in \Sigma_1^{1=}$,

$\text{WO}(\gamma) \times \mathbb{N}$, $e \in \omega$ には $m <_e n \Leftrightarrow \{e\}(\langle m, n \rangle) \geq 0$,

$\text{LO}(\langle e \rangle)$: $\langle e \rangle$ is a linear order, $|\langle e \rangle| \leq |\gamma| \in \Sigma_1^{1=}$ formula s.t.

$\exists$ order preserving $f: \langle e \rangle \rightarrow \gamma$ である。

$B \equiv \{e \in \omega: \langle e \rangle \text{ is total, } \text{LO}(\langle e \rangle) \wedge |\langle e \rangle| \leq |\gamma|\} \in \Sigma_1^{1=}$ である。

Kleene の $\mathcal{O}$ の Π_1^1 -completeness より $\exists d \in \mathcal{O} (d \notin B)$, ATR_0 で

CWO (Comparability of Well Orderings) を使った。 $\exists g$ s.t. g は

γ から $\langle d \rangle$ への order preserving map. したがって γ には γ の超超限

帰納法は、 $\langle d \rangle$ には γ の外に帰納法がある。

／

Proposition 1. $\text{ATR}_0 + \Sigma_1^1\text{-IA} \vdash \text{Con}(\text{ATR}_0)$

2. $\text{RCA}_0 + \Sigma_1^1\text{-GDC} \vdash \Sigma_1^1\text{-IA}$

3 $ATRDC_0 \vdash C_n(ATR_0)$

Proof. 3. $ATRDC_0 \vdash \Sigma'_1\text{-}GDC$ より 1, 2 から.

1. [12] より $ATR_0 + \Sigma'_1\text{-}IA = ATR_0 + \Pi'_3\text{-}RFN_{ATR_0}$.

$\Pi'_3\text{-}RFN_{ATR_0} : P_{ATR_0}('A(n)') \rightarrow A(n)$, $A \in \Pi'_3$ %

Rem. [12] より, より強く, $ATR_0 \vdash \Sigma'_1\text{-}GDC \leftrightarrow \Pi'_3\text{-}\omega\text{-}RFN_{ATR_0}$.

$\Pi'_3\text{-}\omega\text{-}RFN_{ATR_0}$ は, $ATR_0 + \omega\text{-}rule$ で証明できる Π'_3 は true という公理.

謝辞. 本稿の主な部分, すなわち §1, 2, 6 は, 1986年の暮れに, 河合文教研研において行なわれた研究集会の際に筆者が用意したノートに基づいている. そこでの講演の機会をください. また, 今回 §4 を書くための資料(筆者の手紙)を快くお貸し下さった 倉田 令二郎 先生に感謝致します.

参考文献

- [1] W. Buchholz, S. Feferman, W. Pohlers, W. Sieg, Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-theoretical Studies, LNM 897, Springer (1981).
- [2] S. Buss, Bounded Arithmetic, Bibliopolis (1986).
- [3] A. Cantini, On the relation between choice and comprehension principles in second order arithmetic, JSL 51 (1986), 360-373.

- [4] S. Feferman, Formal theories for transfinite iterations of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis, in 'Intuitionism and Proof Theory' (1970), 303-325.
- [5] S. Feferman, Iterated inductive fixed-point theories: Applications to Hancock's conjecture, Patras Logic Symposium, 171-196 (1982).
- [6] J.-Y. Girard, Proof Theory and Logical Complexity, vol. I. Bibliopolis (1987)
- [7] W.A. Howard & G. Kreisel, Transfinite induction and bar induction of type zero and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis. JSL 31(1966), 325-358.
- [8] M. Rathjen, Untersuchungen zu Teilsystemen der Zahlentheorie zweiter Stufe und der Mengenlehre mit einer zwischen Δ_2^1 -CA und Δ_2^1 -CA + BI liegenden Beweisstärke, dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1989
- [9] K. Schütte, Proof Theory, Springer (1977).
- [10] H. Schwichtenberg, Proof theory: some applications of cut-elimination, Handbook of Mathematical Logic, 867-895, (1977).
- [11] W. Sieg, Fragments of arithmetic, Ann. Pure & Appl. Logic 28(1985), 33-72.

- [12] S. Simpson, Σ_1^1 and Π_1^1 transfinite induction, *Logic Colloquium 80* (1982), 239-253.
- [13] S. Simpson, Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations? *JSL* 49 (1984), 783-802.
- [14] W. W. Tait, Functionals defined by transfinite recursion. *JSL* 30 (1965), 155-174.
- [15] A. Wilkie & J. Paris, On the scheme of induction for bounded arithmetic formulas, *Ann. of Pure & Appl. Logic* 35 (1987), 261-302.